

Premesse

“(...) coloro che conoscono e comprendono i principi della matematica sembrano avere un sesto senso per le cose biologiche.”

Lettere, Charles Darwin

Matematica e Scienze della Vita

Cosa c'entrano le Scienze della Vita con la Matematica? Certamente si fanno questa domanda tutti gli studenti che, iscrivendosi a un corso universitario di Scienze Biologiche, Naturali, Ambientali o di Biotecnologie, di Farmacia o Medicina, trovano nel loro piano di studi uno o più esami di Matematica. Ma anche le persone colte spesso ignorano che le interazioni tra le due discipline hanno origini antiche. Le influenze della Matematica in molti ambiti delle Scienze della Vita (e viceversa) sono state stimolanti e feconde: Pitagora, uno dei più grandi matematici dell'antichità, insegnava nella sua scuola argomenti naturalistici in termini matematici e, molto più di recente, nel secolo scorso, Godfrey Harold Hardy, Erwin Schrödinger, Alan Turing, Vito Volterra, solo per citare qualche nome di matematici e fisici tra i più importanti del Novecento, hanno contribuito allo sviluppo della genetica, della biologia cellulare, della teoria dell'evoluzione (*vedi* le letture consigliate alla fine della presentazione).

Come suggerisce la frase di Darwin che abbiamo scelto come apertura di questa presentazione, la Matematica ha spesso aiutato a trovare risposta o a dare definitiva sistemazione teorica a problemi riguardanti importanti questioni di Scienze della Vita. D'altra parte, nuove idee per lo sviluppo della Matematica sono venute da questioni biologiche: gli algoritmi genetici, le reti neurali, l'intelligenza di sciami (ottimizzazione della gestione di complesse reti informatiche) hanno origine proprio dall'osservazione e dallo studio di fenomeni concreti.

Nonostante i molti successi ottenuti dalle interazioni tra le due discipline però, la formazione matematica degli studiosi della vita non è migliorata né, viceversa, è cresciuta, almeno in Italia, la sensibilità dei matematici nei confronti delle applicazioni biologiche. Molte sono le cause di questo ritardo culturale e non è compito di questo libro esaminarle; l'obiettivo che qui ci poniamo è, molto più modestamente, quello di stimolare nei lettori un approccio diverso alle due discipline. In particolare, come abbiamo già tentato di fare anche nel precedente testo “Matematica per le Scienze della Vita” [1], ci piacerebbe convincere gli studenti del fatto che una formazione matematica che dedichi speciale attenzione agli aspetti applicativi può essere interessante, oltre che molto utile. Nelle scuole secondarie italiane la matematica è, purtroppo, spesso considerata come



Figura 1
Il grande fisico austriaco Erwin Schrödinger (1887–1961) in una banconota austriaca da 1000 scellini. Fu uno dei padri della meccanica quantistica. In una serie di conferenze (raccolte nel famoso libro *What's life* del 1944) aprì le porte a un approccio teorico alle questioni riguardanti la genetica e contribuì alla formazione di una nuova generazione di scienziati (tra i quali M. Delbruck) che svilupparono la biologia molecolare.

un profondo e interessante gioco intellettuale, che stimola l'intelligenza, ma che ha pochi utilizzi pratici. Anche le altre discipline scientifiche vengono spesso insegnate come se fossero indipendenti, senza considerare le relazioni che le legano l'una all'altra. La scoperta che la conoscenza è, invece, una rete di fatti interconnessi può essere sorprendente e stimolante e, per tutte le discipline, possono derivarne grandi vantaggi.

Questo libro

Questo libro è dedicato principalmente all'introduzione degli strumenti matematici di base, **essenziali** per lo studio dei fenomeni naturali, in particolare al Calcolo Differenziale e Integrale (gli argomenti di Statistica e Probabilità sono trattati nel precedente testo *Matematica per le Scienze della Vita* [1], in cui sono presenti anche molti approfondimenti). Per aiutare il lettore a orientarsi, all'inizio di ciascun capitolo vengono elencati, con una breve presentazione, tutti i paragrafi che lo compongono. Accanto sono anche indicate le “parole chiare” per riconoscere i principali argomenti trattati nel paragrafo. Nell'impostazione e nella stesura abbiamo cercato di:

- fornire allo studente gli strumenti matematici essenziali, che devono far parte delle competenze di qualunque laureato in una disciplina scientifica;
- motivare lo studio di questi strumenti, indicando le questioni che hanno portato al loro sviluppo e mostrandone qualche applicazione.

Per soddisfare la prima di queste esigenze, nel testo trattiamo gli argomenti classici della matematica di base: i vettori, le matrici e le loro operazioni, le principali funzioni elementari, il calcolo differenziale e integrale. Tutti questi strumenti permettono di affrontare la descrizione quantitativa dei fenomeni e la previsione del loro sviluppo.

Gli argomenti sono introdotti nel modo più semplice possibile, tentando di non dare per scontate troppe conoscenze ed evitando una presentazione eccessivamente astratta.

Per rispondere alla seconda esigenza, nell'introduzione e nello svolgimento degli argomenti diamo spazio a spiegazioni relative al significato e ai vantaggi che un metodo matematico può fornire nelle applicazioni. A questo scopo utilizziamo gli esempi “verdi”, che hanno il seguente aspetto grafico.

Esempio 0.0.1 Verde

Sono esempi di carattere biologico, fisico, chimico, o, più in generale, applicativo, in cui la matematica e il problema descritto hanno un ruolo paritario.

Questo tipo di esempio serve a illustrare un'applicazione reale, o almeno realistica, di un metodo, di un'idea o di una formula matematica, nonché a mostrare il profondo legame tra la matematica e le altre discipline.

In particolare nel testo sono presenti molti esempi verdi di carattere fisico, che abbiamo introdotto per due motivi:

- proprio nell'interazione tra matematica e fisica sono stati sviluppati molti importanti concetti, che vale la pena di conoscere anche per le applicazioni ad altre discipline;

- oltre a quello di matematica, tra gli insegnamenti fondamentali dei primi anni dei corsi universitari vi è quello di fisica, e mostrare il collegamento tra le due discipline può aiutare una migliore comprensione di entrambe. ■

D'altra parte, per ottenere effettivi vantaggi dalla conoscenza della matematica è necessario padroneggiare con sicurezza i suoi strumenti. A questo scopo utilizziamo gli esempi "blu", che hanno il seguente aspetto grafico.

Esempio 0.0.2 Blu

Si tratta di esempi di natura più strettamente matematica, che introducono o approfondiscono concetti astratti, o che servono a esercitarsi nell'uso delle formule.

Gli aspetti applicativi di questi esempi, se presenti, servono solo a illustrare come si usa in pratica la matematica, senza necessariamente descrivere situazioni reali. ■

Per evitare che lo studente, concentrandosi sui singoli esempi, perda di vista la sequenza dei concetti, utilizziamo un'ulteriore struttura grafica.

Evidenziamo su fondo giallo le principali **definizioni** e i più importanti **enunciati** e **teoremi**. Questi riquadri costituiscono il filo logico il quale, nel testo, si snoda la matematica.

Occorre tenere presente che questi riquadri sono solo punti di sintesi di argomenti che possono essere realmente compresi solo attraverso una lettura integrale e attenta del testo.

● **ATTENZIONE:** Attireremo con questa scritta rossa l'attenzione del lettore su alcuni fatti che devono essere tenuti ben presenti per evitare clamorosi errori.

All'interno dei capitoli abbiamo inserito delle schede (box con fondo verde) che introducono importanti temi scientifici, spesso di carattere biologico. Visto che la scienza non è un insieme di discipline rigidamente separate, queste brevi presentazioni, che non hanno pretesa di essere esaustive, possono permettere al lettore curioso ma inesperto di inquadrare in un contesto più generale gli esempi applicativi.

In qualche capitolo presentiamo anche alcuni argomenti che usualmente non sono contenuti nei testi di matematica di base. Li abbiamo introdotti sia perché costituiscono un naturale complemento agli argomenti più elementari e sono una base per eventuali corsi successivi, sia per stimolare ulteriormente l'interesse del lettore verso i metodi matematici, mostrando i risultati che si possono raggiungere con un po' di lavoro in più.

Alla fine di ogni capitolo proponiamo numerosi esercizi (risolti nell'ultimo capitolo del libro), che permettono di verificare il livello di competenza raggiunto. Tali esercizi sono divisi in tre classi:

- esercizi di natura elementare, che lo studente deve saper risolvere rapidamente e senza incertezze; il caso contrario indica considerevoli lacune nella preparazione scolastica, assolutamente da colmare.

- esercizi che vanno svolti dopo lo studio del testo e che sono indispensabili per l'addestramento alle tecniche matematiche introdotte.
- esercizi notevolmente più complessi, a volte per gli aspetti matematici avanzati, a volte per la loro natura decisamente più applicativa. In quest'ultimo caso è richiesto uno sforzo non semplice per comprendere quali idee e metodi matematici vadano impiegati. Questi esercizi possono generare qualche frustrazione, se scambiati per esercizi di addestramento (che invece richiedono solo di dar prova di aver appreso le tecniche matematiche). Il lettore con minore confidenza con la matematica, avvertito dal colore, potrà affrontarli più proficuamente dopo aver consolidato le proprie conoscenze.

Letture consigliate e altri strumenti

Dobbiamo riconoscere il grande debito della nostra trattazione al bel libro *Introduzione alla matematica per biologi* di E. Batschelet, il primo che oltre vent'anni fa ha proposto, con l'uso di esempi di reale interesse biologico, un testo di matematica dal punto di vista di un biologo.

Il nostro testo ha un'impostazione più classica e presenta gli argomenti in modo più adeguato alle conoscenze degli studenti che frequentano oggi l'Università per ottenere la laurea triennale. Privilegiamo gli esempi di natura applicativa (non solo biologici) più importanti, in modo da stimolare il lettore senza distrarlo troppo dall'apprendimento dei concetti matematici nella loro generalità. La sequenza di questi concetti è scandita in modo chiaro, così il nostro testo resta un manuale di matematica relativamente semplice, adatto anche agli studenti con minore preparazione di base, che vengono guidati passo passo verso la comprensione. Per non mortificare l'interesse di quelli con basi di partenza più solide, trattiamo anche applicazioni e approfondimenti più impegnativi, fornendo motivazioni sia di carattere matematico che biologico.

In questo spirito, elenchiamo alcuni testi di matematica che possono essere di utile appoggio nei due casi.

- [1] Benedetto, D., Degli Esposti, M., Maffei, C. *Matematica per le Scienze della Vita*, CEA, Milano 2012.

È un testo universitario più esteso di questo, adatto anche a corsi più avanzati. Sono inoltre presenti 3 capitoli dedicati alla Probabilità e alla Statistica. Contiene più materiale di approfondimento, sia per quel che riguarda la matematica (per esempio sul calcolo combinatorio e integrali in più variabili e curvilinei), sia per quel che riguarda le applicazioni biologiche (per esempio sui modelli di crescita di popolazioni divise in fasce d'età e sulla genetica di popolazione).

- [2] Batschelet, E., *Introduzione alla matematica per biologi*, Piccin, Padova, 1988.
- [3] Segnaliamo alcuni testi universitari che trattano sostanzialmente gli stessi argomenti di questo libro, ma in modo matematicamente più formale:

Villani, V., *Matematica per discipline bio-mediche*, 4a ed., McGraw-Hill, Milano, 2007.

Cammarota, C., *Elementi di calcolo e di statistica*, Libreria Scientifica Dias, Roma, 2001.

- [4] È opportuno che lo studente abbia a portata di mano i libri di matematica delle scuole secondarie, per richiamare rapidamente alla mente le nozioni elementari. Tra gli altri segnaliamo la serie di testi:

Bergamini, M., Barozzi, G., *Matematica multimediale (Azzurro, Bianco, Blu, Verde)*, Zanichelli, Bologna, 2014.

In questo testo abbiamo cercato di illustrare gli argomenti trattati descrivendo brevemente il contesto scientifico e applicativo in cui si inquadrano e, in qualche caso, fornendo cenni storici per il loro sviluppo. Nel reperire in modo rapido molte informazioni, la rete ci è stata di insostituibile aiuto, in particolare abbiamo trovato, in genere, le pagine di wikipedia.it.wikipedia.org ben scritte, sintetiche e accurate. Qui di seguito aggiungiamo un breve elenco di alcune letture anche a carattere divulgativo che ci hanno ispirato.

- [5] D'Arcy Thompson, W., *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino, 1992.

Si tratta del famoso e affascinante testo del 1917 con il quale D'Arcy Thompson introduce lo studio della morfogenesi, con metodi quantitativi legati alla descrizione geometrica degli organismi, ben prima della comprensione dei meccanismi biomolecolari che la determinano (*vedi* box 3.1 e, più in generale, il capitolo 3).

- [6] Schroedinger, E., *Che cos'è la vita*, Adelphi, Milano, 2001.

È la raccolta delle conferenze tenute da uno dei padri della meccanica quantistica presso il Trinity College di Dublino, nel febbraio del 1943. Un'intera schiera di giovani fisici teorici, condizionati da queste letture e affascinati dalla complessità dei sistemi biologici, contribuirà, nella seconda metà del Novecento, alla fondazione della moderna biologia molecolare.

- [7] Murray, J.D., *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Springer, Milano, 2002; Murray, J.D., *Mathematical Biology: II. Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 2004;

sono testi fondamentali di metodi matematici avanzati per la biologia.

Abbiamo citato nella presentazione alcuni fondamentali risultati di matematica che hanno contribuito alla comprensione di fenomeni biologici, ricordiamo dove si possono trovare:

- [8] Hardy G.H., *Mendelian proportions in mixed population* *Science* **28** (706), pp. 49-50 (1908).
[9] Turing A.M. *The chemical basis of morphogenesis?* *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond* **237** (641) pp. 37-72 (1952).
[10] Volterra V. *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together* *J. Cons. int. Explor. Mer* **3** (1): pp. 3-51 (1928).