

Indice generale

Prefazione	xiii
1 Introduzione alla probabilità	1
1.1 Definizione di probabilità	1
1.2 Proprietà di base delle probabilità	5
1.2.1 Probabilità di eventi caratterizzati da variabili discrete	5
1.2.2 Assiomi della Teoria della probabilità	6
1.2.3 Probabilità di eventi caratterizzati da variabili continue	7
1.3 Probabilità di intersezioni e unioni di insiemi	7
1.4 Probabilità condizionate	12
1.4.1 Probabilità congiunta di eventi indipendenti	14
1.5 La formula di Bayes	14
1.5.1 La probabilità marginale	15
1.5.2 Moltiplicazione della probabilità condizionata	16
1.5.3 La probabilità condizionata nei test diagnostici	18
2 Distribuzioni di probabilità	21
2.1 Proprietà delle distribuzioni	21
2.1.1 I momenti	21
2.1.2 I cumulanti	22
2.1.3 La mediana	23
2.2 Eventi di Bernoulli e distribuzione binomiale	26
2.2.1 Definizione e proprietà della distribuzione binomiale	26
2.2.2 Il limite di Poisson	29
2.3 La distribuzione di Poisson	29
2.4 La distribuzione gaussiana	31
2.4.1 Relazione tra le distribuzioni binomiale e gaussiana	32
2.4.2 Relazione tra le distribuzioni poissoniana e gaussiana	34
2.5 Distribuzione di Cauchy-Lorentz	35
2.5.1 Distribuzione di Cauchy generalizzata	36
Appendici matematiche	
2.A Integrali gaussiani	36
2.B Funzione Gamma di Eulero	37
2.B.1 La formula di Stirling	39
2.C Metodo di Laplace	39
3 Legge dei grandi numeri e Teorema del limite centrale	41
3.1 La Legge dei grandi numeri	42
3.1.1 Enunciato debole della Legge dei grandi numeri	42
3.1.2 Enunciato forte della Legge dei grandi numeri	44
3.1.3 Il Lemma di Čebyšëv	46
3.1.4 Dimostrazione dell'enunciato debole	47

3.2	Il Teorema del limite centrale	47
3.2.1	Dimostrazione costruttiva del Teorema del limite centrale	48
3.2.2	Dimostrazione dei momenti del Teorema del limite centrale	52
3.3	Teorema del limite centrale generalizzato	54
3.4	Distribuzioni stabili	57
Appendici matematiche		
3.A	Il limite di Markov	58
3.B	Cambiamento di variabili	59
3.C	Trasformata di Fourier, funzione generatrice	60
3.C.1	Funzione generatrice dei momenti di una distribuzione	61
3.C.2	Funzione generatrice dei cumulanti di una distribuzione	62
3.C.3	Generatrice dei cumulanti di una variabile gaussiana	62
3.C.4	Teorema di convoluzione	63
3.C.5	Alcuni dettagli sulla dimostrazione costruttiva del Teorema del limite centrale	64
3.C.6	Trasformata di Fourier di funzioni con decadimento a potenza	66
3.D	Trasformata di Laplace	69
3.E	Polinomi di Hermite	70
3.F	Distribuzioni esatte di somme di variabili aleatorie	70
3.F.1	Distribuzione della somma di variabili con distribuzione uniforme	70
3.F.2	Distribuzione della somma di variabili con distribuzione di Rademacher	72
3.F.3	Distribuzione della somma di variabili con distribuzione esponenziale	72
3.G	Analisi dimensionale	74
3.H	Miscellanea sulla distribuzione delta di Dirac	76
3.H.1	Integrale multiplo della delta di Dirac di una somma	77
3.I	Convergenza di funzioni	78
3.I.1	Convergenza in distribuzione	81
3.J	La generazione di numeri pseudocasuali	82
4	Grandi deviazioni	89
4.1	Teorema delle grandi deviazioni	89
4.2	Dimostrazione del Teorema delle grandi deviazioni	90
4.3	Esempi di applicazione del Teorema delle grandi deviazioni	93
4.3.1	Il caso gaussiano	93
4.3.2	La distribuzione bimodale (o di Rademacher)	93
4.3.3	La distribuzione semigaussiana	95
4.3.4	La distribuzione esponenziale	97
4.3.5	Un confronto	98
4.4	Formalismo termodinamico per le grandi deviazioni	99
4.5	La trasformata di Legendre	101
4.5.1	Proprietà della trasformata di Legendre	102
4.5.2	Trasformata di Legendre in fisica	103
4.5.3	La trasformata di Legendre per funzioni solo continue	104

4.6	Alcuni teoremi delle grandi deviazioni	105
4.6.1	Teorema di Cramer	106
4.6.2	Teorema di Gärtner-Ellis	106
4.6.3	Teorema di Varadhan	106
Appendici matematiche		
4.A	Il metodo del punto di sella	107
4.A.1	Alcune proprietà delle funzioni armoniche e delle funzioni analitiche	107
4.A.2	Proprietà dell'intorno di un punto di sella	109
4.A.3	Dimostrazione del Teorema del punto di sella	110
4.A.4	Esempio di calcolo di un integrale con il metodo del punto di sella	112
5	Inferenza statistica e analisi dei dati sperimentali	117
5.1	Analisi dei dati sperimentali nel caso semplice	117
5.2	L'uso del principio di Bayes	119
5.2.1	L'inferenza delle urne	121
5.2.2	L'inferenza bayesiana per eventi continui	122
5.3	La scelta della distribuzione a priori	124
5.3.1	Dati distribuiti secondo la distribuzione binomiale e un paradosso	125
5.3.2	Dati distribuiti in modo poissoniano	126
5.3.3	La probabilità a priori per la massima ignoranza: la soluzione del paradosso	127
5.3.4	Il caso di diverse categorie poissoniane	130
5.3.5	Dati distribuiti in modo gaussiano	133
5.3.6	Inferenza da dati con distribuzione di Cauchy	135
5.4	Il caso generale di una distribuzione di probabilità ignota	136
5.4.1	Il metodo del ripesaggio	136
5.4.2	Una prima verifica del ripesaggio: la distribuzione di Poisson	142
5.4.3	Una seconda verifica: il caso gaussiano	143
5.5	Metodi di ricampionamento	146
5.5.1	Il ricampionamento binario: come scovare un dato anomalo	146
5.5.2	Il metodo del raggruppamento e le correlazioni temporali	149
5.5.3	Ricampionamento jackknife	152
5.5.4	Ricampionamento bootstrap	155
5.5.5	Un confronto tra ricampionamenti	159
Appendice matematica		
5.A	La distribuzione a posteriori di eventi di Bernoulli	159
6	Analisi di dati sperimentali vettoriali e correlati	161
6.1	Il caso gaussiano	161
6.1.1	Propagazione degli errori	164
6.2	Il caso di sottocampionamento	165
6.3	Il metodo del ripesaggio nel caso vettoriale	166
6.4	I metodi di ricampionamento nel caso vettoriale	169

6.4.1	Ricampionamento jackknife per variabili correlate	169
6.4.2	Ricampionamento bootstrap per variabili correlate	171
6.5	Il metodo dei minimi quadrati	173
6.5.1	Il caso di dati scorrelati	173
6.5.2	La distribuzione del χ^2	179
6.5.3	Il caso di dati correlati	180
6.5.4	Il metodo dei minimi quadrati con il ripescaggio	184
6.5.5	La scelta della matrice della funzione dei minimi quadrati	186
7	Cammini aleatori	189
7.1	Cammini aleatori in un mezzo omogeneo	189
7.1.1	Il caso reticolare	189
7.1.2	Il caso continuo	193
7.2	Cammini aleatori in mezzi non omogenei	194
7.3	Il limite al continuo dei processi di diffusione	195
7.3.1	L'equazione di Fokker-Planck	197
7.4	Cammini aleatori con trappole	198
7.5	Soluzione stazionaria dell'equazione di Fokker-Planck del moto browniano	200
7.5.1	La relazione di Stokes-Einstein	202
7.5.2	Unicità della soluzione di Fokker-Planck stazionaria	203
7.5.3	Equazione di Fokker-Planck ed equazione di Schrödinger	205
7.6	L'equazione di Langevin	206
7.6.1	I processi di Wiener	206
7.6.2	L'autocorrelazione del processo di Wiener	208
7.6.3	La delicata questione dell'integrazione stocastica	209
	Appendici matematiche	
7.A	La trasformata di Fourier su reticolo	210
7.B	Derivazione e proprietà dell'equazione di Fokker-Planck	213
7.B.1	Limite al continuo del camminatore aleatorio	213
7.B.2	Spettro e autofunzioni dell'operatore di Fokker-Planck	215
8	Funzioni generatrici e reazioni a catena	219
8.1	Funzioni generatrici	219
8.1.1	Funzioni generatrici e trasformate di Fourier e Laplace	220
8.1.2	Funzioni generatrici inverse	221
8.1.3	Funzioni generatrici delle probabilità delle code e cumulativa	222
8.1.4	Funzione generatrice della convoluzione	223
8.1.5	Teorema delle probabilità composte	225
8.2	Reazioni a catena	226
8.2.1	Teorema fondamentale delle reazioni a catena	228
8.2.2	Dimostrazione del Teorema fondamentale delle reazioni a catena	229

9	Eventi ricorrenti	233
9.1	Definizioni	233
9.1.1	Esempi di eventi ricorrenti	233
9.2	Classificazione degli eventi ricorrenti	234
9.2.1	Eventi periodici e aperiodici	234
9.2.2	Eventi certi, nulli e transienti	235
9.3	Relazioni fondamentali	236
9.3.1	Probabilità di primo ritorno	236
9.3.2	Funzioni generatrici delle probabilità degli eventi ricorrenti	238
9.4	Teorema della probabilità limite degli eventi ricorrenti	240
9.4.1	Generalizzazione del Teorema al caso periodico	241
9.4.2	L'approccio alla distribuzione limite per tempi lunghi	243
Appendici matematiche		
9.A	Due teoremi per la somma di serie divergenti	244
9.A.1	Dimostrazione del Teorema di divergenza della funzione generatrice nel limite di una serie	245
9.A.2	Dimostrazione del Teorema del limite di una serie data la divergenza della sua funzione generatrice	247
10	Catene di Markov	253
10.1	Esempi di catene di Markov	253
10.1.1	Il camminatore aleatorio	253
10.1.2	Le reazioni a catena	254
10.1.3	Gli eventi ricorrenti	254
10.2	Proprietà generali delle catene di Markov	255
10.2.1	Probabilità di transizione e probabilità condizionata	255
10.2.2	Matrice stocastica	256
10.2.3	Probabilità congiunta	256
10.2.4	Catene di Markov stazionarie	257
10.2.5	Equazione di Chapman-Kolmogorov per le catene	258
10.3	Altri esempi di catene di Markov	258
10.3.1	Ancora gli eventi ricorrenti	258
10.3.2	La catena a due stati	259
10.3.3	La rovina del giocatore, o del perché c'è lo zero alla roulette	260
10.4	Classificazione delle catene di Markov	262
10.4.1	Tipi di catene di Markov	262
10.4.2	Teorema di riducibilità della matrice stocastica	264
10.4.3	La chiusura di uno stato	265
10.4.4	Classificazione degli stati	265
10.5	Probabilità limite di transizione a uno stato persistente	268
10.6	Teoremi fondamentali delle catene di Markov irriducibili	269
10.6.1	Tutti gli stati sono dello stesso tipo	269
10.6.2	Tutti gli stati di una catena finita sono persistenti non-nulli	271
10.6.3	Teorema della chiusura di uno stato persistente	272

10.6.4	Teorema dell'indipendenza dalle condizioni iniziali	273
10.6.5	Teorema della ripartizione degli stati	274
10.7	La relazione di bilancio per catene irriducibili ergodiche	275
10.7.1	Teorema dell'equazione di bilancio	276
10.7.2	Teorema di unicità della soluzione dell'equazione di bilancio	277
10.8	Catene finite e decomposizione spettrale	277
10.8.1	L'ordinamento delle pagine	277
10.8.2	Decomposizione spettrale delle matrici non-hermitiane	279
10.9	Esempi di catene non di Markov	283
10.9.1	Processi non-markoviani continui	284
Appendici matematiche		
10.A	Scambio di limite e somma nell'ipotesi di assoluta convergenza	285
10.B	Decomposizione spettrale	286
10.B.1	Decomposizione delle matrici hermitiane	286
10.B.2	Decomposizione delle matrici non-hermitiane	287
10.C	Teorema di Perron-Frobenius	288
11	Simulazioni numeriche	291
11.1	Catene di Markov inverse	291
11.1.1	Catene di Markov reversibili	292
11.2	Bilancio dettagliato per catene reversibili	292
11.3	Metodi Monte Carlo	296
11.3.1	Integrali in poche e molte dimensioni	296
11.3.2	Campionamento per importanza	299
11.3.3	L'algoritmo di Metropolis	300
11.3.4	Il modello di Ising	302
12	Eventi correlati	307
12.1	Il limite centrale per catene di Markov	307
12.2	Il limite centrale per eventi ricorrenti	312
12.3	Funzioni di correlazione	320
12.3.1	Definizioni	320
12.3.2	Costruzione di van Kampen	322
12.3.3	Funzioni generatrici delle funzioni di correlazione	324
12.3.4	Funzione generatrice delle correlazioni di variabili gaussiane multivariate	325
12.4	Limite centrale e grandi deviazioni per eventi correlati	327
12.4.1	Grandi deviazioni per variabili correlate	331
12.4.2	Il limite centrale per catene di Markov, rivisto	332
12.5	Eventi fortemente correlati e transizioni di fase	333
12.5.1	Limite centrale gaussiano e assenza di transizione di fase	335
12.5.2	Limite centrale generalizzato e comportamento critico	335
12.5.3	Probabilità asintotica nel caso correlato generale	336
Appendice matematica		
12.A	Comportamenti asintotici delle serie e singularità complesse	337

13	Processi dipendenti dal tempo	341
13.1	Processi di Poisson	341
13.2	Processi di nascita pura	343
13.2.1	Processi divergenti di nascita e il Teorema di Feller	347
13.2.2	Un'analisi approssimata	348
13.2.3	La dimostrazione di Feller	349
13.2.4	Una dimostrazione costruttiva del Teorema di Feller	351
13.2.5	Un calcolo esplicito del tempo di divergenza	354
13.3	Processi di nascita e morte	356
13.4	I processi di Markov	358
14	Entropia, probabilità e meccanica statistica	363
14.1	L'entropia microscopica e la Teoria dell'informazione	364
14.1.1	Definizione dell'entropia di Shannon	364
14.1.2	Codifica di un messaggio	368
14.1.3	Primo teorema di Shannon, o Teorema della codifica della sorgente	370
14.1.4	Dimostrazione del Primo teorema di Shannon	371
14.1.5	Trasmissione di informazione in presenza di rumore	374
14.1.6	Secondo teorema di Shannon, o Teorema della codifica del canale con rumore	376
14.1.7	Dimostrazione del Secondo teorema di Shannon	377
14.2	L'entropia nei sistemi dinamici	379
14.2.1	L'esponente principale di Lyapunov	379
14.2.2	La produzione di entropia	382
14.2.3	L'entropia di Kolmogorov-Sinai	383
14.3	Intermezzo: richiami di meccanica statistica	384
14.3.1	La distribuzione di Boltzmann	385
14.3.2	Il Teorema di risposta lineare	385
14.3.3	Potenziali termodinamici	386
14.3.4	Principi variazionali	387
14.4	Il principio di massima entropia	387
14.4.1	Una derivazione probabilistica della meccanica statistica	389
14.5	Grandi deviazioni e termodinamica	390
14.5.1	Energie libere di Helmholtz e di Gibbs	392
14.5.2	Entropia e funzione di decrescita delle grandi deviazioni	394
14.6	L'entropia configurazionale dei sistemi vetrosi	395
	Appendici matematiche	
14.A	Derivazione delle espressioni di informazione ed entropia di Shannon	397
14.A.1	Costruzione della funzione informazione	398
14.A.2	Dimostrazione della formula dell'entropia di Shannon	399
14.B	Messaggi autodelimitanti	401
	Bibliografia	403
	Indice analitico	409
	Esercizi risolti	online.universita.zanichelli.it/leuzzi-probabilita