

CAPITOLO TERZO

Come ci arrivo e quanto tempo impiego?

L'uomo ha sempre amato viaggiare per mare e per terra, attraverso fiumi e montagne, a piedi, a cavallo, in barca, con carri tirati dai buoi, in ogni modo possibile. Per alcune popolazioni nomadi è uno stile di vita. Con il viaggio l'uomo ha dovuto imparare a orientarsi per trovare la strada. L'ha fatto con il Sole e con le stelle, con bussole e sestanti, con il suono dei tamburi, senza farsi intimorire dalla poca precisione dei metodi o dalla variabilità del cielo.

Oggi possiamo invece viaggiare con più comodità e sicurezza. I mezzi di locomozione hanno modificato drasticamente i tempi degli spostamenti, i metodi per l'orientamento hanno reso più facile raggiungere le destinazioni e l'attrattiva per i viaggi è rimasta la stessa. Uno strumento che tutti abbiamo usato almeno una volta nei nostri spostamenti è il GPS (*Global Positioning System*): si tratta di un

sistema di posizionamento globale che unito a un ricevitore (come uno smartphone) permette anche ai viaggiatori con poco senso dell'orientamento, di arrivare a destinazione quando si spostano in autonomia.¹² Creato per scopi militari è stato definitivamente messo a disposizione per usi civili nel 2000. Con un navigatore nessuna meta è preclusa, non importa se non c'è nessuno accanto a leggere una cartina o a guidarci, si può andare dove si vuole: una voce perentoria ci guida e, in caso di errore, ordina immediatamente di invertire la rotta o ricalcola il percorso.

Il GPS

Il GPS è un sistema che permette di stabilire la posizione esatta del ricevitore (un navigatore o uno smartphone) in qualsiasi posizione del mondo. È un sistema composto da una rete di satelliti artificiali che orbitano intorno alla Terra, e di stazioni terrestri che controllano ed elaborano i dati trasmessi dai satelliti. Possono fornire al ricevitore informazioni preziose sulle sue coordinate geografiche e sull'orario.

Come fa un ricevitore a calcolare la propria posizione in base alle informazioni ricevute dai sa-

¹² Sempre che le mappe siano aggiornate, ci sia campo durante tutto il tragitto e il telefono non si scarichi. Di recente, per esempio, a causa di un errore su Google Maps, centinaia di turisti in Norvegia sono finiti in un villaggio non molto conosciuto anziché su una delle più spettacolari scogliere del Paese.

telliti? Il procedimento è analogo a quello per la determinazione dell'epicentro di un terremoto.

Quando si verifica un terremoto le onde sismiche, cioè le vibrazioni del terreno, si propagano su tutta la terra e vengono registrate da strumenti detti *sismografi*. Poiché le onde possono arrivare da diverse direzioni, occorrono almeno tre sismografi in grado di registrare le oscillazioni. Le onde si dividono in onde P e onde S. Le prime sono longitudinali e molto veloci (tra i 7 e i 13 km/s), le seconde trasversali e più lente (tra i 4 e i 7 km/s). Per determinare la distanza dall'epicentro, ogni sismografo sfrutta questa differenza di velocità. Infatti, quanto più è elevato l'intervallo di tempo fra l'arrivo dei due tipi di onde, tanto più è distante l'epicentro del terremoto dal sismografo.

Supponiamo che il primo sismografo si trovi a Milano e che abbia determinato che l'epicentro è a 280 km di distanza. Da questa prima informazione possiamo solo dedurre che l'epicentro sia in un punto qualsiasi su una circonferenza con centro a Milano e con raggio pari a 280 km (figura 15 a pagina seguente). Supponiamo poi che il secondo sismografo si trovi a Roma con epicentro a 347 km di distanza.

A questo punto possiamo ridurre la rosa delle possibilità a due punti sulla superficie, cioè i punti in cui le due circonferenze si intersecano (i punti x e y nella figura). Se infine il terzo sismografo si trova a Firenze e ha determinato che l'epicentro è a 86 km di distanza, allora possiamo determinare l'unica posizione che soddisfa tutte e tre le condi-

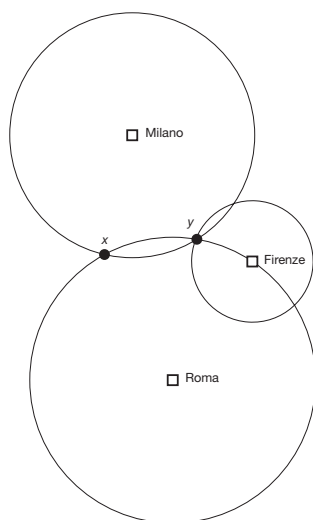


Figura 15. La triangolazione nel procedimento di determinazione dell'epicentro di un terremoto. I tre sismografi sono a Milano, Roma e Firenze e hanno determinato che le loro distanze dall'epicentro sono, rispettivamente, 280 km, 347 km e 86 km. Quindi, l'epicentro si trova nel punto y , cioè nell'intersezione delle 3 circonferenze con centro, rispettivamente, Milano, Roma e Firenze e con raggio, rispettivamente, 280, 347 e 86. Tale punto corrisponde alla città di Pisa.

zioni, il punto che appartiene a tutte e tre le circonferenze: Pisa (il punto y nella figura 15).

È questo il modo in cui funziona anche il GPS nel nostro smartphone: tre o più satelliti, captati dal ricevitore, comunicano la loro distanza e il ricevitore, con un procedimento del tutto simile a quello descritto per il calcolo dell'epicentro di un terremoto, è in grado di determinare precisamente la sua posizione.

Il GPS è usato dai navigatori per determinare la posizione esatta in cui ci troviamo, poi sta al navi-

gatore trovare la rotta che porti a una destinazione. Un navigatore ha in memoria delle mappe e mostra sul proprio schermo il percorso da seguire, accompagnato da una voce che fornisce le indicazioni (per esempio, «alla rotonda prendi la terza uscita»). Il percorso proposto dal navigatore è in genere quello più breve: tale percorso è determinato per mezzo di un algoritmo. La mappa viene rappresentata da un grafo in cui i nodi (le località) sono connessi tramite archi (le strade).

Le strategie usate dai navigatori commerciali sono tenute strettamente segrete, ma è possibile fare delle ipotesi sugli algoritmi utilizzati. L'algoritmo più usato è l'algoritmo di Dijkstra: è uno degli algoritmi classici sui grafi che è stato definito tanti anni fa¹³ e ha moltissime applicazioni. In generale quest'algoritmo calcola, a partire da un nodo stabilito, il percorso minimo per raggiungere tutti gli altri nodi del grafo, se raggiungibili attraverso i suoi archi.

Oltre che nel navigatore, l'algoritmo di Dijkstra si usa in Internet per smistare la posta elettronica: ogni messaggio transita dal mittente al destinatario, spostandosi da un nodo all'altro della rete, seguendo il percorso più breve. Il percorso minimo è calcolato come il numero di archi, detti *hop*, oppure, se a ogni arco è associato un peso, come la somma dei pesi lungo tutti gli archi del percorso.¹⁴

¹³ L'algoritmo di Dijkstra risale al 1956: per l'informatica è preistoria.

¹⁴ Nel caso di Internet il peso di un arco è legato al tempo di percorrenza dell'arco stesso, che in genere è a sua volta funzione della distanza tra i nodi, della qualità della connessione e del traffico su quell'arco.

L'algoritmo di Dijkstra

L'algoritmo di Dijkstra calcola il percorso minimo che parte da un nodo specifico s e arriva a tutti gli altri nodi del grafo. Consideriamo un grafo *orientato*, cioè un grafo che ha su ogni arco una freccia che ne stabilisce il senso di percorrenza.

Consideriamo inoltre che il grafo sia *pesato*, cioè a ogni arco $x \rightarrow y$ sia associato un valore non negativo, detto *peso*. Nel caso delle reti stradali, il peso dell'arco potrebbe essere la lunghezza (espressa generalmente in chilometri) della strada che collega i due nodi, generalmente detta *distanza*. Un nodo si dice *vicino* di un altro nodo, se collegato a quest'ultimo da un unico arco.

Per esempio nella figura 16 si vede, sulla sinistra, una porzione della mappa stradale di Pisa, dove le lettere maiuscole indicano punti di interesse. Nella figura di destra è indicato il grafo orientato e pesato associato alla mappa: i nodi sono le lettere della mappa di Pisa e gli archi le strade di comuni-

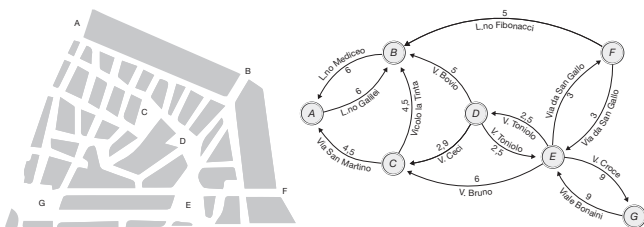


Figura 16. Una porzione della mappa stradale di Pisa (a sinistra) e il grafo corrispondente (a destra). Nel grafo gli archi sono orientati secondo il senso di circolazione consentito e il peso indica la distanza tra 2 punti della mappa, espressa in centinaia metri.

cazione orientate secondo il senso di circolazione (una doppia connessione indica un doppio senso di marcia: è cioè possibile andare da un nodo all'altro e viceversa). Per esempio il nodo F è vicino del nodo E e del nodo B , ma non del nodo C e del nodo D . Ai nomi delle strade aggiungiamo il peso, nel nostro caso la distanza tra i due punti, espressa in centinaia di metri.

Scegliamo come nodo di partenza il punto G che corrisponde a Piazza Vittorio Emanuele, punto di interesse più vicino alla stazione ferroviaria.

L'algoritmo procede considerando un nodo dopo l'altro a partire da un nodo iniziale (G nel nostro caso). Il *frammento* del grafo è il sottoinsieme dei nodi che sono considerati in ciascun passo dell'algoritmo e corrisponde alla porzione di grafo già elaborata che viene incrementato a ogni passo con l'aggiunta di un nuovo nodo: all'inizio il frammento è vuoto; al primo passo contiene soltanto il nodo G e alla fine del procedimento tutti i nodi del grafo. Una volta che un nodo è aggiunto al frammento se ne calcola il percorso (o cammino) minimo dal nodo di partenza.

All'inizio del procedimento, a ogni nodo x eccetto quello di partenza, viene assegnato un valore non significativo, detto *distanza provvisoria*, per esempio il valore ∞ . Questo valore serve a indicare che x non è stato ancora considerato. La distanza effettiva di x , se raggiungibile dal nodo di partenza, sarà sicuramente minore del valore ∞ .

A ogni passo, ciascun nodo conosce la sua distanza provvisoria dal nodo di partenza; quando un

nuovo nodo è aggiunto al frammento si controlla la distanza provvisoria dei suoi nodi vicini non ancora inseriti nel frammento. Si calcola la distanza del percorso, non ancora considerato prima, che dal nodo iniziale arriva a questi vicini, passando per il nuovo nodo inserito nel frammento. Se la nuova distanza calcolata diminuisce viene aggiornata nei nodi di arrivo. La distanza di un nodo diventa poi definitiva soltanto quando questo entra a far parte del frammento.

Capire Dijkstra con un esempio

L'operazione fondamentale dell'algoritmo di Dijkstra è l'aggiornamento della distanza provvisoria. Ciò accade quando al frammento si aggiunge un nuovo nodo u e si considerano tutti i nodi z connessi a u con un arco e non ancora inseriti nel frammento. In questo momento, si controlla se la distanza tra z e il nodo di partenza è minore se si utilizza un percorso alternativo che passi da u . Si trova cioè un percorso alternativo che non era stato ancora considerato e che costa meno del precedente. In questo caso l'algoritmo registra la nuova distanza.

È meglio capire questi passi attraverso il nostro esempio della città di Pisa. Supponiamo di aver selezionato nel frammento il nodo G come mostrato in figura 17 dove accanto a ogni nodo è indicata la distanza provvisoria. Notiamo che i nodi non ancora considerati hanno un valore ∞ che è più

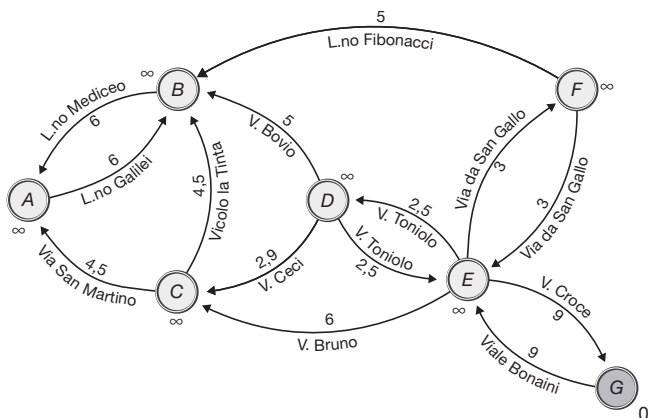


Figura 17. Frammento contenente soltanto il nodo G , in grigio. Accanto a ogni nodo mostriamo le distanze minime provvisorie calcolate finora. Questo è il primo passo dell'algoritmo, quindi tutte queste distanze sono poste uguali a infinito.

grande di tutti i valori possibili delle distanze calcolabili.

Adesso consideriamo tutti i nodi connessi a G da un arco. C'è solo il nodo E che inseriamo nel frammento (figura 18 a pagina seguente).

La distanza di E da G viene quindi aggiornata a 9. Consideriamo i nodi connessi con E , esterni al frammento, cioè D , F e C . Poiché la loro distanza da E è rispettivamente 2,5, 3 e 6, la loro distanza da G è rispettivamente $9 + 2,5 = 11,5$; $9 + 3 = 12$ e $9 + 6 = 15$. Queste distanze sono tutte minori del valore iniziale, cioè ∞ , e vengono quindi assegnate ai nodi D , F e C come distanze provvisorie.

Al prossimo turno, si seleziona quindi il nodo esterno al frammento a distanza minima da G , cioè D ,

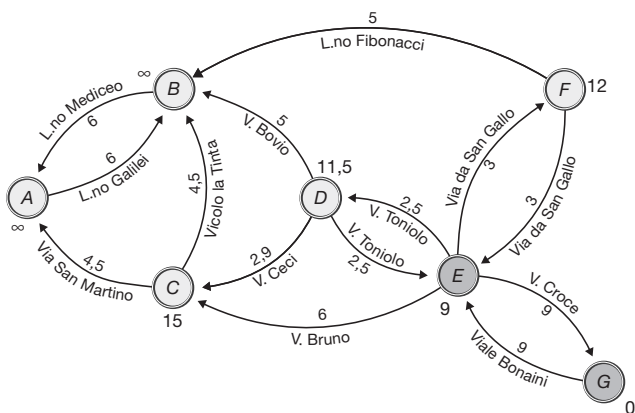


Figura 18. Frammento contenente i nodi G ed E . Le distanze provvisorie per F , D e C sono state modificate dal valore iniziale ∞ rispettivamente ai valori 12, 11,5 e 15, che rappresentano la distanza di questi nodi da G passando per E .

in quanto la sua distanza provvisoria da G è la più piccola. D viene inserito nel frammento. I nodi a esso connessi, esterni al frammento, sono C e B , come mostrato nella figura 19.

Analizziamo il nodo C . Sommiamo la distanza di C da D pari a 2,9 e la distanza di D da G pari a 11,5: otteniamo 14,4. Poiché questo valore è minore del valore 15 calcolato precedentemente, verrà registrato come nuova distanza provvisoria di C da G . Il nodo B invece viene incontrato per la prima volta e quindi la sua distanza provvisoria sarà $11,5 + 5 = 16,5$.

Adesso il frammento si estende a F (cioè il nodo esterno al frammento a distanza minima da G), a cui è connesso B (figura 20). La distanza di F da G è 12 che sommata al peso dell'arco $F \rightarrow B$ dà 17 come distanza di B da G . La nuova distan-

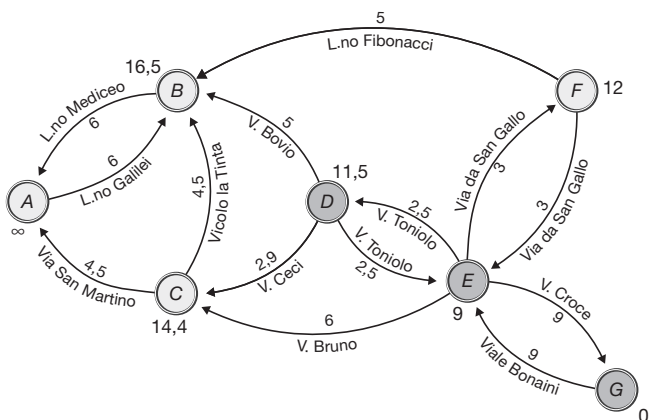


Figura 19. Frammento contenente i nodi G, E e D. La nuova distanza provvisoria da G a C passando per D è $14,4 < 15$, valore precedentemente calcolato.

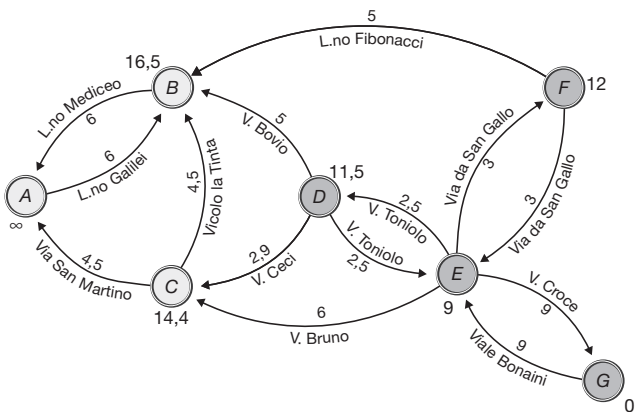


Figura 20. Frammento contenente i nodi G, E, D e F. Aggiungendo al frammento il nodo F, nessuna distanza provvisoria cambia.

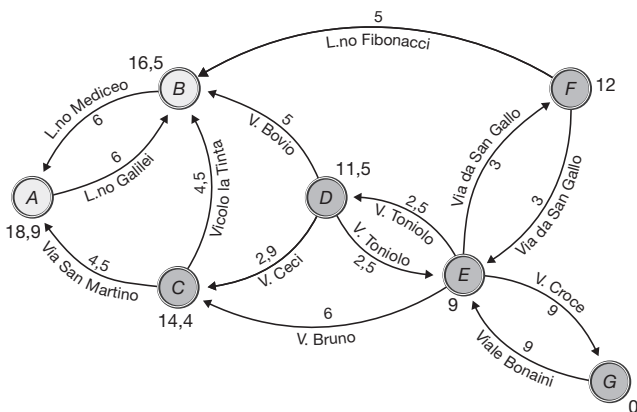


Figura 21. Frammento contenente i nodi G, E, D, F e C. La nuova distanza provvisoria da G a A passando per C è $18,9 < \infty$, valore precedentemente calcolato.

za viene scartata perché maggiore della distanza provvisoria precedentemente calcolata per B, cioè 16,5.

Ora si inserisce C nel frammento, come mostrato nella figura 21. I nodi collegati a C sono i nodi A e B. Il nodo A non è mai stato incontrato prima. Quindi la sua nuova distanza da G è data dalla distanza da G a C, ovvero 14,4, più il peso dell'arco $C \rightarrow A$, ovvero 4,5. In totale otteniamo 18,9, che diventa la distanza provvisoria di A, in quanto minore di ∞ . Si considera inoltre B la cui nuova distanza, passando da C, ammonta a $14,4 + 4,5 = 18,9$. Il valore è scartato perché maggiore di quello precedente, cioè 16,5.

Ora tocca a B a entrare nel frammento che è collegato soltanto ad A (figura 22). Il nuovo valore

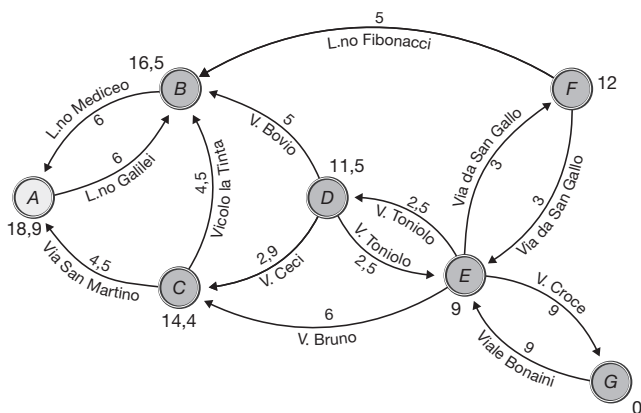


Figura 22. Frammento contenente i nodi G, E, D, F, C e B. Nessuna distanza provvisoria cambia.

della distanza da G a A, passando per B è 16,5 più il valore della distanza dell'arco $B \rightarrow A$ cioè 6: otteniamo in totale 22,5. Questo valore è più grande di quello della distanza provvisoria da G a A che era 18,9 e viene scartato.

Ultimo nodo inserito è A, che non ha vicini esterni al frammento. Quest'ultimo include ora tutti i nodi del grafo e quindi l'algoritmo termina: gli ultimi valori registrati per la distanza provvisoria di ogni nodo rappresentano i valori della distanza minima dal nodo G a quel nodo. Possiamo, quindi, concludere che le distanze dal nodo G di tutti gli altri nodi sono le seguenti:

A	B	C	D	E	F
18,9	16,5	14,4	11,5	9	12