

Introduzione

L'idea di questo libro è nata dalle esperienze che il secondo autore ha avuto nell'insegnamento della matematica e della didattica della matematica per il corso di laurea in Scienze della formazione primaria,¹ il quale è volto alla formazione universitaria di coloro che dovranno insegnare nel ciclo scolastico primario. Pertanto, la prima motivazione era di realizzare un manuale adatto a corsi di questo tipo e che rappresentasse anche un ausilio per gli insegnanti della scuola primaria e dell'infanzia nell'aggiornamento della formazione matematica nel corso della carriera. In seguito, l'ambizione del libro, pur restando legata a questa ispirazione originaria, si è allargata. Perché e in che senso si sia allargata si può spiegarlo rispondendo alla domanda su che cosa debba contenere un manuale rivolto alla formazione dei futuri maestri. Dovrà limitarsi a presentare niente più che gli argomenti di matematica che verranno insegnati ai bambini nel ciclo scolastico primario, magari con il contorno di indicazioni di metodologia didattica? La risposta, a nostro avviso, è negativa, e non solo perché un libro del genere si differenzerebbe poco da un testo scolastico direttamente rivolto ai bambini, ma soprattutto perché siamo convinti che a un maestro capace di introdurre la mente infantile in un mondo complesso come quello della matematica è richiesta una conoscenza profonda di quel mondo. Siamo di fronte a un paradosso che vale per la matematica come per ogni disciplina: l'insegnamento ai livelli superiori richiede una dose molto elevata di nozioni e di strumenti complicati, ma comporta un dispendio minore di sforzo didattico; l'insegnamento *in forma elementare* dei concetti di base esige una padronanza delle loro sottigliezze e delle innumerevoli difficoltà che sono state affrontate nel corso di secoli di riflessioni e di elaborazioni. Ciò che viene direttamente insegnato ai bambini può sembrare poca cosa in termini di quantità di concetti e metodi, ma la chiarezza e l'efficacia dell'insegnamento dipende da un retroterra di comprensione approfondita che, pur restando dietro le quinte, ha un ruolo decisivo.

I pilastri su cui poggia la matematica sono il *numero* e la *forma*, ovvero l'*aritmetica* e la *geometria*. Il compito straordinariamente impegnativo del maestro è di introdurre il bambino nel mondo dei numeri e nel mondo delle figure geometriche, di abituarlo a muoversi in modo spontaneo in questi mondi e ad avere un rapporto di *familiarità*, di *intimità* con gli oggetti che li popolano e poi, man mano, ad acquisire gli strumenti per manipolarli.² Per riuscire a realizzare un obiettivo così ambizioso il maestro deve addentrarsi nei concetti di base della matematica esplorandoli più di quel che può sembrare necessario a prima vista; a meno che non si concepisca la matematica come una scienza meramente "procedurale" – ovvero come un insieme di regole operative – come viene malamente detto da qualcuno. La capacità

1. Presso la Facoltà di Scienze della formazione dell'Università di Roma Tre.

2. Esiste oggi un sostanziale accordo internazionale sui contenuti della matematica nel ciclo elementare, ma manca spesso una visione culturale d'insieme che possa guidare i maestri nelle scelte didattiche, nell'organizzazione e nella conduzione della lezione di matematica.

di manipolare efficacemente gli oggetti della matematica nasce soltanto in stretta relazione con l'acquisizione del loro significato concettuale, sia pure al livello intuitivo e primitivo proprio del bambino. Al maestro si chiede – quasi più che a qualsiasi altro insegnante di matematica – di aver penetrato a fondo il senso dei concetti della matematica, del suo operare, di aver compreso la complessità di una disciplina che non è “procedurale” ma neppure logica pura, o sinonimo del pensiero razionale; di una disciplina che ha un rapporto profondo con lo studio della natura ma non si identifica con esso; della disciplina scientifica che ha raccolto la sfida di manipolare il concetto di infinito. Hermann Weyl definì la matematica come «la scienza dell'infinito»: anche questo tema viene incontro al maestro nelle sue esperienze didattiche, perché una delle prime domande che si pongono i bambini, dopo aver sperimentato che si può sempre costruire un numero più grande di un altro, è “quanti” numeri esistano, e se esistano “tutti” i numeri. Un bambino che costruisce un quadrato unendo quattro asticelle si rende conto con stupore, deformando la figura con un semplice movimento delle mani, che esistono infiniti rombi con i lati uguali a quelli del quadrato. Nell'affrontare il difficile compito di dare risposta a queste domande e di dare spazio a queste “scoper-te”, tanto formulate in modo ingenuo quanto profonde, il maestro deve avere nel suo retroterra culturale la conoscenza del rapporto della matematica con l'infinito. Questo tema evoca lo stretto rapporto che la matematica ha con la filosofia e, più in generale, con la cultura, rapporto che ruota attorno al tema della ricerca della verità e della conoscenza del mondo.

Nel rapporto multiforme della matematica con la scienza, la conoscenza, la filosofia, la cultura risiede la chiave per superare il famigerato ostacolo nell'apprendimento della matematica e cioè il suo carattere di disciplina ostica, tecnica, arida, persino repellente. Difatti, soltanto se si comprende a fondo il senso dei suoi concetti anche le tecniche e le procedure diventano interessanti e persino affascinanti, e si impongono come indispensabili all'acquisizione della materia.

Da quanto precede si intende perché siamo convinti dell'importanza di un'impostazione “culturale” e non meramente tecnica (anche se attenta a una presentazione precisa e rigorosa dei metodi e delle tecniche). Ne consegue che, a nostro avviso, questo testo non è soltanto un *manuale per i maestri* ma anche un libro che può servire in qualsiasi corso universitario di *didattica della matematica* (che si tratti di lauree magistrali per l'insegnamento, di laboratori o corsi didattici legati ai tirocini a scuola) e che, più in generale, *può servire a chiunque sia interessato a introdursi alla matematica* pur non sapendone assolutamente nulla (o tutt'al più avendone pochissime reminiscenze). Difatti, il percorso del bambino per accedere al mondo dei numeri e delle forme geometriche contiene o rappresenta molte delle difficoltà cui va incontro qualsiasi persona voglia introdursi alla matematica sapendone poco o niente, o voglia rinfrescare le nozioni apprese a scuola in modo meccanico e presto dimenticate.

Abbiamo detto che i pilastri su cui poggia la matematica sono l'*aritmetica* e la *geometria*, ovvero il *numero* e le *forme geometriche*. Siamo partiti dallo studio dei numeri – oggetto dei Capitoli da 2 a 6 –, ma si sarebbe potuto partire altrettanto legittimamente dallo studio della geometria, cui abbiamo

riservato i Capitoli 7 e 8. Prendere le mosse dalla geometria sarebbe stato più aderente al processo storico reale: di fatto, le difficoltà incontrate nello studio del sistema dei numeri indussero i Greci antichi a privilegiare un approccio puramente geometrico e soltanto molti secoli dopo, nella modernità, la matematica affrontò le enormi difficoltà dell'aritmetica introducendo a pieno titolo il numero nella geometria, con la geometria analitica. Tale combinazione di numeri e geometria, che è alla base dell'*analisi matematica*, aprì la strada a straordinari sviluppi che sono il fondamento dell'efficacia pratica della matematica, in particolare nello studio dei fenomeni fisici e nella tecnologia; il che dimostra come un'enorme potenza pratica sia derivata dall'aver affrontato un problema prettamente teorico come quello della manipolazione dell'infinito. Tuttavia, questo non è un libro di storia della matematica, anche se propone di frequente degli inquadramenti storici. Dal nostro punto di vista – di autori con specifica competenza nella storia della matematica – ricostruire la genesi dei concetti è fondamentale per comprenderli a fondo, ma per questo non è necessario seguire il percorso storico in tutti i suoi passaggi accidentati e un testo introduttivo deve assumere come punto di partenza lo stato più sviluppato e sistematizzato della disciplina.

Va sottolineato che il libro è strutturato in modo tale che sia possibile seguire anche un percorso che parta dalla geometria euclidea classica per poi passare attraverso l'aritmetica prima di accedere alla geometria analitica. Quello di cui invece siamo convinti – in accordo con alcuni punti di vista circa l'insegnamento della matematica di cui parleremo nel Capitolo 13 – è che una buona introduzione alla matematica non può avere come punto di partenza l'algebra.³ Quest'ultima è uno strumento straordinariamente potente ma, dal punto di vista didattico, presenta tutti gli inconvenienti che hanno generato l'immagine repulsiva della matematica di cui si diceva prima: come tutte le materie molto tecniche, l'algebra o propone procedure relativamente semplici e ripetitive, oppure pone di fronte a difficoltà elevate e di natura superiore. Insistiamo: le porte della matematica sono l'aritmetica e la geometria.

È evidente che un libro che ha le ambizioni descritte non può limitarsi all'introduzione degli argomenti strettamente relativi all'insegnamento della matematica nelle scuole primarie, in quanto il maestro deve avere una formazione matematica più vasta di quanto richieda quel che dovrà insegnare. Nelle scuole primarie non si parla dei numeri reali, ma un maestro non potrà introdurre adeguatamente i numeri interi e razionali se non avrà un'idea chiara della problematica dei numeri nel suo complesso. Inoltre, anche le più semplici idee relative all'uso della matematica nella descrizione dei fenomeni o in contesti pratici richiedono una conoscenza di che cosa sia la matematica applicata, la modellistica, l'uso dei grafici e nozioni elementari di probabilità e di statistica. Dal punto di vista di un lettore generico – di un lettore interessato a capire che cosa siano la matematica e i suoi metodi – è evidente che è indispensabile una visione più ampia.

3. Né l'algebra elementare né, tantomeno, l'algebra moderna delle strutture. La scelta didattica di introdurre l'algebra, ovvero lo studio dei polinomi e delle equazioni algebriche, dopo la scuola primaria, è condivisa internazionalmente.

Diversi capitoli sono dedicati a una presentazione più ampia della matematica. Il Capitolo 9 è dedicato all'analisi matematica, nucleo portante della matematica moderna. Il Capitolo 10 è di carattere più concettuale e riguarda la matematica "assiomatica": è un tema che contraddistingue la visione attuale di concetti basilari, come numero e retta, cui ci si accosta per la prima volta in modo ingenuo nell'età infantile. Il Capitolo 11 introduce in modo elementare i concetti della teoria della probabilità e della statistica. Il Capitolo 12 riguarda gli sviluppi più "concreti" della matematica: la matematica applicata, la modellistica, l'analisi numerica. Infine, l'ultimo capitolo tratta dell'influsso delle concezioni moderne della matematica sull'insegnamento.

È quasi superfluo sottolineare che questo libro non pretende affatto di offrire un panorama della matematica: per fare qualcosa di minimamente esauriente in tal senso occorrerebbe almeno il triplo di queste pagine! Sono state fatte delle scelte – opinabili, come tutte le scelte – ma che hanno una motivazione precisa: presentare le tematiche fondamentali da un punto di vista elementare, soprattutto quando permettono di evidenziare come la matematica si inserisca nel tessuto della scienza, della cultura e quali siano le sue relazioni con il mondo reale.

Un discorso a parte va fatto per gli esercizi e i problemi che non possono mancare in un libro del genere, perché la matematica si apprende soltanto addestrandosi a farne un uso diretto. Pertanto, alla fine del libro verrà proposto un buon numero di esercizi suddivisi per capitolo. Tuttavia gli esercizi sono la parte di un libro che più trae vantaggio da un approccio aperto e dinamico: è utile poterne aggiungere di nuovi anche tenendo conto delle reazioni dei lettori e delle loro richieste. Ne verranno quindi inseriti periodicamente altri sul sito web della casa editrice Zanichelli.

Il libro fornisce materiali più che sufficienti per i corsi di matematica e didattica della matematica nel corso di laurea in Scienze della formazione primaria. In generale, è possibile costruire differenti percorsi di studio. Per quanto riguarda l'aritmetica, si consiglia la lettura ordinata dei Capitoli da 1 a 6. Il lettore che voglia partire dalla geometria, dopo aver letto il Capitolo 1, potrà passare al Capitolo 7 e quindi al Capitolo 8 (dopo aver letto i Capitoli dedicati all'aritmetica e i primi tre paragrafi del Capitolo 6). Gli altri Capitoli del libro sono essenzialmente autonomi. Le osservazioni storico-epistemologiche del Capitolo 10 potranno interessare il lettore "generalista" ma serviranno anche a chi ha un interesse strettamente rivolto all'insegnamento nella scuola primaria, il quale potrà omettere parti più tecniche, in particolare nei Capitoli 9, 11 e 12, e trovare riflessioni di natura didattica nel Capitolo 13. Le considerazioni relative all'insegnamento della matematica, e all'eco dei concetti matematici nel pensiero del bambino potranno interessare anche i genitori.

In ogni caso, confidiamo che il lettore – quali che siano le sue motivazioni – attribuirà la dovuta importanza a quelle parti che mostrano come la matematica non sia una disciplina isolata e "aliena", ma uno dei più grandi contributi che l'umanità abbia dato al patrimonio della conoscenza e della cultura.