Prefazione

La parola “lacrime” si incontra nei titoli dei libri di matematica con una frequenza sorprendente. Tra gli altri leggiamo di “matematica senza lacrime”, “geometria senza lacrime”, “topologia senza lacrime”, “statistica senza lacrime” e, ovviamente, “calcolo differenziale senza lacrime”, tra gli altri. Confrontiamo questi accostamenti di lacrime e matematica con quanto ebbe a scrivere una volta Laurent Schwartz, vincitore della medaglia Fields e membro dell’accademia Bourbaki: *“Il n’y a pas de mathematiques sans larmes* . . . ” [Non esiste matematica senza lacrime. . .]. Sembra che sulla matematica sia stata versata una gran quantità lacrime e che allo stesso tempo rimanga un disaccordo se il piangere sia inevitabile. Forse la metafora delle lacrime è stata spinta troppo in là, ma ciò che sta dietro questo disagio è stato espresso anche in altre forme. Nel ventesimo secolo, in collane di libri matematici in lingua inglese abbiamo visto proliferare titoli in cui comparivano parole come “*outline*” (sintesi), “*nutshell*” (in pillole), “*simple*” (facile), “*for dummies*” (per negati).

Ad esempio, S. P. Thompson pubblicò *Calculus Made Easy* nel 1910. È un testo che si presenta abbastanza bene anche oggi: dopo oltre un secolo, si può ancora comprare su Amazon una copia della seconda edizione del 1914 fresca di stampa. Nemmeno una più recente edizione riscritta nientemeno che da Martin Gardener è stata capace di ridurre all’oblio la seconda edizione. I testi di matematica sono fatti così. All’inizio del ventesimo secolo si insegnava agli studenti direttamente dalla versione originale degli *Elementi* di Euclide scritta in greco antico. In matematica le nozioni fondamentali durano. È questo che rende l’insegnante di matematica medio di oggi un po’ nichilista di fronte alla scelta del testo da adottare nell’insegnamento del calcolo differenziale: “È veramente importante il testo che utilizzo?” si domanda. A certi livelli in effetti non importa, per cui l’insegnante usa qualunque testo che sia stato impiegato l’anno prima. “Sempre il solito” diventa il modo standard di procedere. Ma non può valere sempre, altrimenti potremmo usare oggi il Thompson, invece di uno dei molti testi moderni in circolazione.

Una ragione per cui sempre-il-solito non è valido in ogni caso è che, pur rimanendo i fondamenti uguali, l’uditorio cambia. Nel testo *Calcolo differenziale 1, Funzioni di una variabile reale*, che costituisce il primo volume del nostro corso completo di calcolo differenziale per le funzioni reali di una o più variabili, abbiamo spiegato che gli studenti di oggi, abituati all’uso delle moderne interfacce grafiche dei computer, sono diversi dai loro predecessori e guardano alla matematica in un modo diverso. Per loro è pressoché immediato avere l’impressione che la matematica sia un’applicazione dell’informatica (*computer science*), e che esista solo come una semplice icona sullo schermo. Perché studiare matematica, pensano, quando sembra di poterla avere tutta con un “click”? Imparare che tra le due è l’informatica, non la matematica, l’applicazione, è un buon primo passo. Capire che i computer non sono qualcosa a cui si deve credere, tranne sotto determinate condizioni, è la lezione fondamentale da imparare nell’era dei computer. Questa, da sola, è una ragione sufficiente per imparare la matematica. Nel primo volume questo tema è stato affrontato sviluppando un argomento particolare denominato “mostri numerici”, contraddistinto dal simbolo “$\otimes$”. Tali esempi rappresentano una sorta di *analisi anti-numerica* — “anti” poiché sono affrontati in modo da ingigantire gli errori del computer, invece di ridurli al minimo. Gli esempi costituiscono applicazioni matematiche coerenti, che tuttavia riescono a mettere in scacco la rappresentazione finita dei numeri in qualunque computer. Il concetto che si impara è di natura fondamentale ed è qualitativamente indipendente dal programma di calcolo o dalla piattaforma computazionale usati. Si tratta di risultati inconcepibili per Euclide, Newton o S. P. Thompson.

C'è un'altra ragione per la quale sempre-il-solito pone dei problemi. Gran parte della matematica usata in ambiti applicativi fu edificata un secolo e mezzo fa. All'epoca di Thompson, un centinaio di anni fa, esisteva un certo divario tra i campi delle applicazioni e l'insegnamento del calcolo differenziale. L'approccio sempre-il-solito ha mantenuto questo divario fino ai giorni nostri. Quando gli studenti passano dal calcolo differenziale a uno di questi campi, entrano in uno strano mondo con abitudini matematiche che possono addirittura contraddire ciò che hanno imparato nei loro corsi di calcolo differenziale. Ad esempio, che cosa dire agli studenti di fisica, chimica e ingegneria della celebre equazione $dE = \delta W + \delta Q$? Essa indica che un differenziale eguaglia la somma di due entità che in realtà non sono differenziali. Intrigante, come minimo. Ma che cosa sono effettivamente queste entità a secondo membro? Nei testi del loro settore specifico si dice agli studenti di non allarmarsi poiché E non è effettivamente una funzione di W o Q. Orbene, dato che δW e δQ non sono comunque dei differenziali, forse va bene così. Talvolta i simboli δ sono sostituiti da d con una piccola barra scritta sopra, per sottolineare che è in gioco qualche tipo di "matematica" valida esclusivamente per la termodinamica. Questa rappresentazione è un anacronismo che risale al diciannovesimo secolo, che ricorda i tentativi di descrivere qualunque cosa, oltre alle funzioni, in termini di differenziali. I testi di calcolo differenziale hanno semplicemente rinunciato ad avventurarsi a mostrare come procedere per evitare le complicazioni novecentesche in circolazione ancora oggi.

Questo non è certo il solo esempio del fenomeno, che ha generato più confusione e "lacrime" di qualunque altro corso di matematica. Un buon libro di testo di calcolo differenziale applicato di livello introduttivo dovrebbe condurre gli studenti al punto in cui il calcolo differenziale si collega utilmente ai campi applicativi che incontreranno nel loro lavoro. Ciò non solo aiuta a risparmiare lacrime inutili, ma può portare a un livello di conoscenza più lucido nei campi in questione. Questi collegamenti ai campi delle applicazioni sono stati indicati nel primo volume come "applicazioni di frontiera". Non devono essere confusi con le comuni "applicazioni" che compaiono come esempi e problemi in tutti i testi. Le applicazioni di frontiera conducono invece il lettore da un dato argomento di calcolo differenziale direttamente a uno strumento matematico spesso trascurato nei libri di calcolo differenziale, ma fondamentale in qualche campo applicativo; oppure lo conducono a capire come il calcolo differenziale fornisca le strutture di un intero campo, senza necessariamente entrare nel merito degli sviluppi: ora il campo stesso è diventato un'applicazione!

Nel nostro testo intitolato *Calcolo differenziale 1, Funzioni di una variabile reale*, che precede il presente volume *Calcolo differenziale 2, Funzioni di più variabili*, sono state introdotte alcune di queste applicazioni di frontiera: dalle funzioni di Liapunov, alle trasformate di Legendre, alla termodinamica. In particolare, abbiamo introdotto una spiegazione dell'entropia basata sul calcolo differenziale, mostrando come essa emerga naturalmente da semplici proprietà del calcolo differenziale e come si adatti sia alla meccanica statistica della fisica sia all'informatica. Le applicazioni di frontiera non intendono comunque sostituire quelle "tradizionali"; piuttosto, servono a rafforzare le possibilità nell'ambito di un corso di calcolo differenziale di fornire materiale per progetti di studio indipendenti, oppure come approfondimento per un corso particolare che un insegnante può decidere di proporre. Inoltre, le applicazioni di frontiera costituiscono un valore aggiunto per permettere al testo di diventare un riferimento per il futuro. Quando gli studenti si accorgono di un divario fra le loro conoscenze di calcolo differenziale e quanto è richiesto per i loro corsi successivi, possono trovare le risposte che cercano in questa nuova edizione del testo, che si può rivelare uno strumento utile da consultare anche dopo avere seguito il corso!

C'è ancora un'altra ragione perché sempre-il-solito pone dei problemi. Su una scala temporale sufficientemente lunga la nostra comprensione della matematica e del suo uso in realtà cambia. Domande senza risposta persistono anche nel calcolo differenziale tradizionale, e non trovano risposta nel sempre-il-solito. Queste domande mettono in difficoltà gli studenti, impedendo loro l'apprendimento, e possono anche avere messo in difficoltà gli insegnanti stessi quando erano studenti a loro volta. Un esempio relativamente immediato è: come possiamo sapere che una minimizzazione in un problema con moltiplicatore di Lagrange fornisce effettivamente un minimo? Il celebre principio di massimo dell'entropia fornisce effettivamente un massimo? Come si fa a saperlo? Non si trova risposta in alcun testo di calcolo differenziale – cosa che dispiace – ma si può trovare in questa nuova edizione dei due volumi di *Calcolo differenziale, 1 e 2,* la quinta della traduzione italiana.

Una domanda più delicata nella mente degli studenti è quale sia la differenza tra il differenziale di una funzione e il differenziale che compare in un integrale multiplo (ad esempio $dy = f'(x)dx$ piuttosto che $dV = dx\,dy\,dz$). Se leggete Thompson o qualunque altro libro di testo o quasi, potreste essere portati a concludere che sono davvero la stessa cosa. Invece, ci sono differenze molto importanti, che rivelano strumenti capaci di semplificare e unificare il calcolo differenziale avanzato. Esse hanno allo stesso tempo implicazioni sorprendenti per le equazioni differenziali fondamentali che governano molte discipline scientifiche. Tutto ciò fa parte dell'argomento del *calcolo differenziale esterno*.

Nonostante la potenza del calcolo differenziale esterno, esso non è incluso nell'approccio del sempre-il-solito, anche perché si è sviluppato in parte in tempi successivi a testi come quello di Thompson. Ma ciò rende comunque la sua forma corrente vecchia quasi cento anni — come fosse ieri, nella prospettiva dell'insegnamento della matematica. Finora, una descrizione del calcolo differenziale esterno nella forma adatta a un libro di testo elementare non è mai stata disponibile, perché tale argomento è sempre stato considerato avanzato. Le monografie tecniche hanno solo contribuito a rinforzare questa idea, ma gli strumenti matematici necessari per il calcolo differenziale esterno, seppure di livello non basso, non sono poi nemmeno di livello tanto alto, almeno per una introduzione generale all'argomento. Vettori, algebra lineare, calcolo differenziale di base, un po' di immaginazione astratta e qualche familiarità con la terminologia è tutto ciò che occorre. Forse, fra qualche tempo, il programma del calcolo differenziale avanzato sarà strutturato in modo diverso, ma per il momento noi offriamo una risposta alla domanda degli studenti riguardo ai differenziali nella forma di un nuovo capitolo, l'ottavo, di questo volume intitolato *Calcolo differenziale 2, Funzioni di più variabili*, che, come già accennato, costituisce il seguito del nostro testo *Calcolo differenziale 1, Funzioni di una variabile reale*. Tale modo di procedere è coerente con l'idea di essere innovativi, e con il rispetto della tradizione, nella misura in cui essa è pratica.

Ma, come pure con altre caratteristiche che arricchiscono questo volume, un insegnante può semplicemente ignorare tale materiale e impostare l'insegnamento secondo un programma tradizionale. Poche trattazioni del materiale tradizionale sono più dirette o concise.

Se invece l'insegnante desidera andare un poco o molto più lontano, scegliere un punto di vista didattico semplice o trovare un buon progetto per gli studenti, se desidera indicare un punto in cui la domanda dello studente trova risposta, la presente edizione può aiutare. In particolare, il capitolo ottavo sul calcolo differenziale esterno è stato utilizzato in un corso di calcolo differenziale avanzato all'Università della British Columbia, con risultati positivi. Ma ciò che è veramente entusiasmante per noi è stato scoprire quanti colleghi abbiano espresso interesse per la trattazione in stile di libro di testo di qualcosa che essi stessi avevano sempre cercato di imparare.

Non c'è nulla di sbagliato in libri come *Calculus Made Easy*. Noi incoraggiamo i lettori a consultarne alcuni, non solo perché l'esposizione diversa di uno stesso argomento è sempre utile, ma anche per sradicare l'impressione che questi libri contengano sortilegi di insegnamento che trascendono il solito apparato di grafici, spiegazioni, affermazioni, deduzioni, definizioni, esempi risolti ed esercizi. Non esiste nulla di sbagliato nell'affrontare la matematica ricorrendo ai computer moderni e utilizzando le le loro capacità grafiche interattive. Anzi, vi sono molti vantaggi, tra cui la possibilità di esplorare il software invece che delle pagine. Ma anche qui non si deve cadere nella tentazione di credere nel falso mito di una via magica all'apprendimento della matematica. L'apprendimento attraverso programmi si riduce allo stesso apparato di un libro di testo: grafici, spiegazioni, eccetera. Aggiungete un insegnante e delle risposte alla fine del libro e genererete lo stesso spazio di apprendimento. Indipendentemente dal mezzo con cui è esposta, per essere capita la matematica richiede allo studente lavoro e, qualche volta, delle lacrime — si spera solo temporanee. Non esiste alcuna via magica. Pertanto, l'insegnante dovrebbe incoraggiare i suoi studenti a non avere paura, piuttosto che stare attento per evitare che versino lacrime. La sfida ardita conduce verso le migliori conquiste, in particolare in un libro di testo in cui il percorso è completamente conosciuto e segnato in modo chiaro. Gli studenti senza paura, piuttosto che senza lacrime, capiscono subito ciò che S. P. Thompson intendeva all'inizio del suo testo: "Ciò che può fare un pazzo, può farlo un altro".

Per lo studente

Avete in mano quello che nel mercato dei libri è noto come un testo di calcolo differenziale di “lusso”. Siete fortunati. Immaginatevi di avere un’auto di turismo di lusso, invece di un’utilitaria. Ma non “lusso” in senso materiale: non ha pagine seducenti da scorrere, stampate con inchiostro brillante o cose simili. È il contenuto che lo differenzia. In contrasto con la metafora automobilistica, il contenuto del libro di “lusso” non costa più degli altri libri. Il libro è uno dei rari beni acquistabili che qualunque consumatore può permettersi di comprare nella classe alta. Ma c’è una trappola. Diversamente dall’auto, siete voi che dovete lavorare per raggiungere ciò che il libro promette! Quindi, in quel senso, “classe alta” o “lusso” è più simile a una forma di “segreta” arte marziale per la vostra mente, che non può essere garantita dalla versione economica. Se vi esercitate, la vostra mente si rafforzerà. Diventare più sicuri e disciplinati. I segreti del passato vi saranno dischiusi. Non avrete più paura quando la vostra mente si troverà ad affrontare una nuova sfida matematica.

Ma la parola d’ordine è: lavoro duro. Fare pratica, fare pratica, fare pratica. Pensate a come lavorano senza sosta le api per produrre il loro miele. Vi è una sorta di “miele” anche nel calcolo differenziale. È dolce quando, alla fine, riuscite a capire un concetto nuovo che prima non comprendevate. Vi sono poche esperienze forti come capire qualcosa di nuovo. Questa è una delle ragioni per cui è sempre esistita un’industria florida dei *puzzle* e dei rebus. Ma in un libro di lusso si ritrova più miele che nei *puzzle* o nei testi ordinari di calcolo differenziale. Fare gli esercizi e verificare le soluzioni con quelle riportate in fondo al libro costituisce la pratica della matematica su un testo. La stessa cosa si può fare sull’interfaccia di un calcolatore: risolvete ancora i problemi e verificate le risposte. In qualunque modo lo facciate, più esercizi significano una maggiore pratica e un apprendimento migliore.

In questo testo ci sono molti esercizi, troppi per essere svolti tutti, ma: siate ambiziosi. Alcuni sono esercizi di approfondimento per aiutarvi a sviluppare l’abilità di calcolo. Più importanti sono tuttavia quei problemi che affinano la capacità di ragionare e di applicare le tecniche studiate a situazioni concrete. Talvolta, quando il problema richiede di giungere alla soluzione in più passi, si deve delineare un piano di attacco. Altri esercizi hanno lo scopo di estendere la teoria presentata nel testo e quindi aiutano a consolidare la comprensione dei concetti del calcolo differenziale. Considerate i problemi come uno strumento per aiutarvi a collegare le idee. Potete avere in testa un gran numero di concetti ma, se non li collegate in modo appropriato, il “teatro” della vostra mente non funzionerà.

Gli esercizi differiscono notevolmente nel grado di difficoltà. Di solito quelli più difficili sono raggruppati alla fine, ma gli esercizi di ogni gruppo non si trovano in ordine di difficoltà crescente, poiché gli esercizi dedicati a uno specifico argomento tendono a essere messi assieme. Inoltre, la qualifica di “difficile” può essere soggettivo. Ad alcuni studenti gli esercizi indicati come difficili possono sembrare facili, mentre esercizi indicati come facili possono sembrare difficili.

Comunque sia, alcuni esercizi sono contrassegnati con il simbolo “!” che indica un esercizio più difficile degli altri. Altri esercizi sono contrassegnati dal simbolo “?” che indica un esercizio di carattere più teorico. Gli esercizi teorici posso essere facili e talvolta lo sono proprio. Molti dei *Problemi difficili* che si trovano nel *Riepilogo del capitolo* alla fine di ogni capitolo sono invece veramente difficili.

Non è una cattiva idea rivedere il materiale di base contenuto nel *Capitolo C* preliminare, che contiene un compendio delle nozioni fondamentali del calcolo differenziale delle funzioni di una sola variabile. L'intero argomento è trattato estesamente dagli stessi autori nel testo *Calcolo differenziale 1, Funzioni di una sola variabile*, Quinta edizione, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 2013, di cui il presente volume costituisce la naturale continuazione.

Se trovate difficili alcuni dei concetti introdotti nel testo, *rileggete* lentamente, se necessario più volte; *riflettete sull'argomento*; formulate delle domande da porre al vostro compagno di studio o al vostro insegnante. Non rimandate. È importante che superiate la vostra difficoltà prima possibile. Se non capite un argomento oggi, potreste non capire anche come si applica domani. La matematica è una "disciplina lineare" che si costruisce un'idea dopo l'altra. Verificando la vostra comprensione dell'argomento successivo si verifica anche la comprensione di quelli precedenti. Non scoraggiatevi se non riuscite a fare tutti gli esercizi. Alcuni sono veramente difficili. La loro varietà assicura che quasi tutti gli studenti possano fare pratica al loro livello specifico e nello stesso tempo permette di mettersi alla prova al crescere della loro abilità.

Le risposte della maggior parte degli esercizi dispari sono fornite alla fine del libro. Mancano solo le risposte relative a esercizi che non hanno una risposta breve, ad esempio, gli esercizi del tipo "Dimostrare che . . . " o "Mostrare che . . . " la cui risposta è costituita dall'intera soluzione.

Oltre ai simboli "!" e "?" impiegati per distinguere i problemi più difficili e teorici, per contrassegnare esercizi di tipo particolare sono impiegati i seguenti simboli:

- Esercizi riguardanti le equazioni differenziali o i problemi ai valori iniziali. Tale simbolo non è però usato nei paragrafi dedicati interamente alle equazioni differenziali.
- Problemi che richiedono l'uso di una calcolatrice. Spesso è necessaria una calcolatrice scientifica. Alcuni di questi problemi possono richiedere una calcolatrice programmabile.
- Problemi che richiedono l'uso di una calcolatrice con capacità grafiche o di un programma di visualizzazione eseguibile su un personal computer.
- Problemi che richiedono l'impiego di un calcolatore. Tipicamente questi esercizi richiedono l'uso di programmi di algebra computazionale (ad esempio Maple, Mathematica) o di programmi con foglio elettronico come Microsoft Excel.