

Sommario

1. Che cos'è la matematica?	1
➔ 1.1. Un sapere onnipresente e temuto	1
➔ 1.2. La domanda più difficile	6
➔ 1.3. Che cosa ci insegna la storia	10
➔ 1.4. Ai primordi delle rappresentazioni simboliche	11
➔ 1.5. Ogni grande cosa può avere solo un grande inizio	17
➔ 1.6. Il mondo è matematico?	20
➔ 1.7. La perdita della certezza e gli ambigui successi della matematica moderna	21
2. Numeri naturali e sistemi di numerazione	23
➔ 2.1. La notazione simbolica dei numeri per contare	24
➔ 2.2. I nomi dei numeri	28
➤ Parole per contare	28
➤ Le parole-numero e i numeri concreti	31
➤ L'etimologia delle parole numerali: i numeri e il contare	31
➔ 2.3. La rappresentazione simbolica dei numeri nella storia: i sistemi di numerazione additivi	33
➤ La contabilità dei Sumeri e l'origine della scrittura	34
➤ I sistemi di numerazione additivi nelle antiche culture del Mediterraneo	36
➔ 2.4. Alcuni esempi storici di notazione posizionale	39
➤ Il sistema di numerazione sessagesimale babilonese	39
➤ La notazione posizionale dei numeri frazionari nell'astronomia antica	42
➤ La notazione simbolica dei numeri nell'antica Cina	43
➤ Il sistema vigesimale dei Maya	45
➤ Origine e diffusione delle cifre indiane	46
➔ 2.5. Rappresentazione simbolica dei numeri e decomposizione aritmetica	48
➤ Sistemi di numerazione posizionali e teorema di rappresentazione dei numeri interi	48
➤ La notazione posizionale dei numeri frazionari	50
➔ 2.6. La rappresentazione simbolica matematica	50
LETTURA 2.1 – La serie dei numeri nella tradizione popolare	52

3.	I numeri interi	55
➤	3.1. I numeri naturali e le operazioni	55
➤	I modelli concreti di numero	59
➤	3.2. Oltre il concetto empirico di numero naturale	60
➤	"Aggiungere uno" e il ragionamento per ricorrenza	61
➤	3.3. L'infinito dei numeri naturali: il principio di induzione	64
➤	3.4. Gli assiomi di Peano	72
➤	3.5. Una digressione sugli insiemi	75
➤	3.6. L'ordinamento dei numeri naturali	80
➤	Confronti	82
➤	Il principio del buon ordinamento	83
➤	3.7. Contare. La cardinalità di un insieme finito	84
➤	La conta e il contare	84
➤	Corrispondenza biunivoca e cardinalità	86
➤	Il contare dei bambini	88
➤	3.8. L'ampliamento del sistema dei numeri naturali	91
➤	Lo zero	92
➤	3.9. L'insieme dei numeri interi \mathbb{Z}	95
➤	Ordinamento dei numeri interi	97
	Lettura 3.1 – Sull'astrazione	99
	Lettura 3.2 – La serie infinita dei numeri. Concetto empirico e concetto razionalistico del numero	100
	Lettura 3.3 – Induzione matematica e induzione fisica	101
4.	L'aritmetica elementare	103
➤	4.1. La divisione in \mathbb{N}	103
➤	L'algoritmo euclideo del massimo comune divisore	107
➤	4.2. Congruenze e relazioni di equivalenza	110
➤	Relazioni di equivalenza	113
➤	Classi resto	113
➤	4.3. I numeri primi	116
➤	4.4. Alcuni problemi di insegnamento	121
➤	Uguaglianza: il segno =	121
➤	Scrittura dei numeri e addizione	124
➤	Sottrazione	124
➤	Moltiplicazione e divisione	125
	Appendice 4.1 – Altre forme del principio di induzione	126
	Lettura 4.1 – Pitagora e il suo tempo	127
	Lettura 4.2 – I numeri primi e il ragionamento per assurdo	127

5.	I numeri razionali	129
➔	5.1. Parti, rapporti, misure	129
➤	Nuovi simboli per le quantità frazionarie	129
➤	Rapporto e proporzione	133
➔	5.2. Frazioni e decimali	137
➤	I molti significati della notazione frazionaria	137
➤	Percentuali	139
➤	La frazione come numero	140
➤	I numeri decimali: la rappresentazione posizionale dei numeri frazionari	143
➤	Espressioni decimali periodiche	145
➔	5.3. La costruzione dell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali come ampliamento di \mathbb{Z}	147
➤	Le operazioni con i numeri razionali	149
➔	5.4. L'ordinamento dei numeri razionali. Interpretazione geometrica	151
➤	Numeri razionali positivi e negativi	152
➤	L'ordinamento totale di \mathbb{Q}	152
6.	I numeri reali e il continuo	155
➔	6.1. La matematica o le matematiche?	155
➔	6.2. Pitagora e l'incommensurabilità	158
➔	6.3. Zenone e i paradossi dell'infinito	163
➔	6.4. La costruzione dei numeri reali	166
➔	6.5. La teoria degli insiemi e gli infiniti	172
7.	Il pensiero geometrico e la geometria euclidea	179
➔	7.1. Lo sguardo della geometria	179
➔	7.2. Le origini antiche dei concetti geometrici	185
➤	La geometria nell'arte	190
➔	7.3. Punto, linea, piano: le forme nella geometria euclidea	191
➤	Le figure piane	195
➤	Le figure solide	198
➤	La congruenza delle figure	199
➔	7.4. Le costruzioni con riga e compasso e i postulati della geometria euclidea	201
➤	Rette e cerchi	203
➤	Il postulato delle parallele	206
➔	7.5. Gli assiomi di Hilbert per la geometria euclidea	208

➤ 7.6. I teoremi della geometria euclidea	211
➤ Uguaglianza di figure piane	211
➤ Rette perpendicolari e parallele	215
➤ I triangoli	220
➤ Equivalenza di figure piane	221
➤ Il metodo della dimostrazione	225
➤ Figure simili e proporzionalità geometrica	226
➤ Geometria solida	231
Letture 7.1 – La geometria e l'esperienza	235
Letture 7.2 – «Lo fren dell'arte»	235
8. Algebra, geometria e il concetto di spazio	237
➤ 8.1. Sistemi di coordinate	237
➤ Lo spazio euclideo reale tridimensionale	239
➤ Il piano euclideo reale	243
➤ 8.2. Lo spazio geometrico astratto	248
➤ Algebra e geometria	250
➤ Proiezioni	254
➤ 8.3. Isometrie e similitudini nello spazio geometrico euclideo	255
➤ Le isometrie nel piano euclideo reale	258
➤ Simmetrie	263
➤ Similitudini	265
➤ 8.4. Geometrie e gruppi di trasformazioni	267
➤ 8.5. Geometria, intuizione ed esperienza a scuola	277
➤ La geometria nella cultura	278
➤ La geometria euclidea sintetica come orizzonte dell'esperienza	279
➤ Fra numeri e geometria: misura e posizione	281
➤ Lo spazio	282
Letture 8.1 – Spostamenti, deformazioni e le leggi di composizione	284
Letture 8.2 – Confronto tra il linguaggio ordinario, il linguaggio della geometria e dell'algebra	285
9. L'analisi matematica	287
➤ 9.1. La matematica nello studio della natura	287
➤ 9.2. Funzioni	290
➤ L'idea di funzione a scuola	303
➤ 9.3. Limiti, derivate, continuità	305
➤ 9.4. Aree e integrali	315
➤ 9.5. Le equazioni differenziali	322

➔ 9.6. Il vasto mondo dell'analisi matematica	332
Lettura 9.1 – La nuova fisica e la nuova matematica	334
Lettura 9.2 – L'analisi matematica è estesa quanto la natura	335
Lettura 9.3 – L'analisi matematica è il fondamento delle applicazioni pratiche esatte	337
10. La matematica assiomatica	339
➔ 10.1. Il "rigore" in matematica	339
➔ 10.2. L'algebra astratta e il movimento assiomatico	343
➔ 10.3. Hilbert: assiomatica e formalismo	351
➔ 10.4. Le "strutture" in matematica	355
Appendice 10.1 – I numeri complessi	360
11. Probabilità	363
➔ 11.1. Il caso	363
➔ 11.2. Il concetto di probabilità e le sue definizioni	369
➔ 11.3. Le formule elementari e alcune applicazioni	379
➤ Probabilità condizionata	382
➤ Probabilità inversa	385
➤ Variabili aleatorie	388
➤ Caratteristiche di posizione	390
➤ Lotterie	392
➔ 11.4. La statistica	394
Appendice 11.1 – Elementi di calcolo combinatorio	409
Lettura 11.1 – Determinismo e probabilità	412
Lettura 11.2 – Probabilità e questioni morali	414
Lettura 11.3 – La statistica	415
12. La matematica applicata e la modellistica	417
➔ 12.1. Matematica, scienza e tecnologia	417
➔ 12.2. L'analisi numerica: approssimazione ed errore	423
➤ Algoritmi e approssimazione nell'istruzione matematica elementare	430
➔ 12.3. Che cos'è la modellistica matematica?	433
➔ 12.4. La matematica dei conflitti: la teoria dei giochi	445
➔ 12.5. Il mondo è matematico?	455
Lettura 12.1 – Il calcolatore non può sostituire la matematica "mentale"	458
Lettura 12.2 – Il delicato equilibrio tra matematica pura e applicata	459

13. Restituire la matematica alla cultura	461
➤ 13.1. Una matematica per tutti: scopo formativo e scopo utilitarario	463
➤ 13.2. Abbasso Euclide! La matematica moderna a scuola	469
➤ 13.3. La mente matematica del bambino	472
➤ 13.4. Per concludere	475
14. Esercizi	479
Bibliografia	507
Indice analitico	517