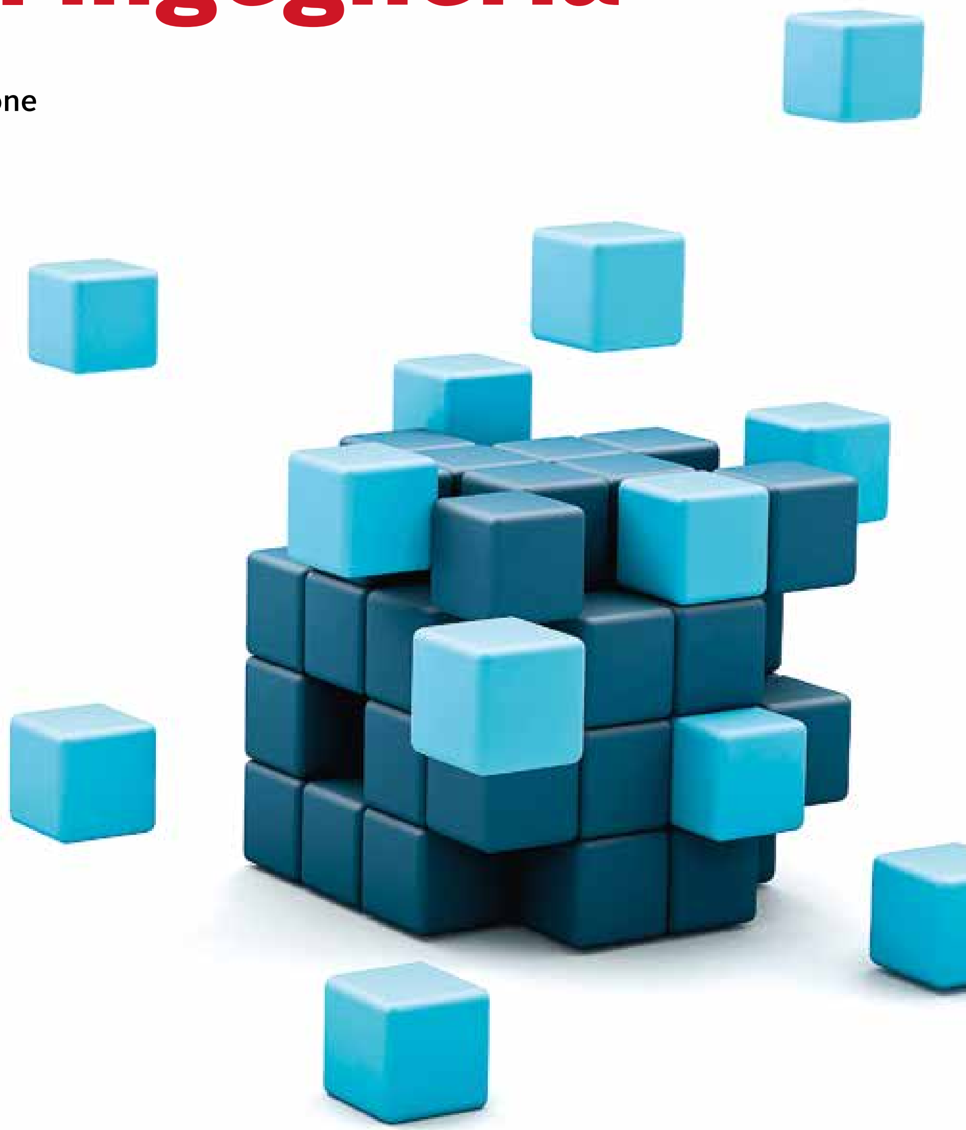
Marco Codegone Luca Lussardi

Metodi matematici per l'ingegneria

Seconda edizione



MATEMATICA ZANICHELLI

Marco Codegone Luca Lussardi

Metodi matematici per l'ingegneria

Seconda edizione

Se vuoi accedere alle risorse online riservate

1. Vai su **my.zanichelli.it**
2. Clicca su *Registrati*.
3. Scegli *Studente*.
4. Segui i passaggi richiesti per la registrazione.
5. Riceverai un'email: clicca sul link per completare la registrazione.
6. Cerca il tuo codice di attivazione stampato in verticale sul bollino argentato in questa pagina.
7. Inseriscilo nella tua area personale su **my.zanichelli.it**

Se sei già registrato, per accedere ai contenuti riservati di altri volumi ti serve solo il relativo codice di attivazione.

MATEMATICA ZANICHELLI

Impaginazione: Compomat, Configni (RI)

Copertina:
– *Progetto grafico*: Falcinelli & Co., Roma
– *Immagine di copertina*: © jbresco/iStockphoto

Prima edizione: novembre 1995

Seconda edizione: aprile 2021

Ristampa: **prima tiratura**

5 4 3 2 1 2021 2022 2023 2024 2025

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli:
sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.
L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro
privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: linea_universitaria@zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza, identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo online per l'Università.

Per comunicazioni di tipo commerciale: universita@zanichelli.it

Stampa:

per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Indice generale

Introduzione

Questo libro costituisce la nuova edizione, riveduta e ampliata, dell'omonimo testo edito nel 1995. Abbiamo qui raccolto i contenuti di un corso tradizionale di Metodi Matematici per l'ingegneria, ispirandoci agli insegnamenti erogati al Politecnico di Torino.

Dopo un primo capitolo dedicato ai richiami sui numeri complessi e sulle serie in campo complesso, vi è poi un capitolo dedicato agli argomenti legati alle serie di Fourier, sottolineandone la presentazione nella forma dell'esponenziale complesso e le proprietà analoghe a quelle delle trasformate di Fourier.

La parte sulle funzioni analitiche mette in evidenza gli sviluppi di Taylor e di Laurent e vuole fornire una buona capacità di classificare le singolarità isolate e di calcolare i residui, anche in vista della antitrasformata di Laplace di funzioni razionali.

Il capitolo sulle distribuzioni privilegia la loro comprensione come *funzioni generalizzate* ovvero come limite opportuno di funzioni o come derivata, in un senso nuovo, di funzioni. L'aspetto di funzionali lineari e continui è solo lasciato intravedere come strumento teorico che consente di dimostrare le proprietà delle distribuzioni e, in modo particolare, della delta di Dirac.

I capitoli sulle trasformate sono strutturati in modo da iniziare con la trasformata di Fourier per funzioni e distribuzioni. Si sottolinea come, da poche trasformate ottenute con la definizione, grazie alle proprietà, si possono calcolare, in modo semplice, molte trasformate interessanti per le applicazioni. La convoluzione con il treno di impulsi è lo strumento che consente di presentare la trasformata di Fourier di segnali periodici e di vederne il legame con la serie di Fourier.

È presentata poi la trasformata di Laplace bilatera, che si presta a vederne i legami con la trasformata di Fourier e a discuterne il dominio; qualche cenno è fatto alla trasformata unilatera. Viene anche segnalata qualche applicazione ai modelli ingresso-uscita di tipo differenziale e all'uso delle trasformate in tali modelli.

Infine, un breve capitolo sulla trasformata Zeta conclude il libro.

Il modo di impostare gli argomenti vuole collocarsi tra la trattatazione matematica formalmente rigorosa e il testo di carattere esclusivamente applicativo.

Il trattato strettamente matematico risulta estraneo agli scopi di un corso universitario in cui è privilegiato l'aspetto operativo e applicativo. D'altro canto si ritiene utile presentare gli argomenti in modo da farne risaltare la concatenazione logica e l'ambito proprio di validità, in modo che chi poi diviene un utilizzatore della matematica lo possa fare con sicurezza.

Non è sempre facile stabilire quali siano le cognizioni in possesso dello studente che segue un corso di questo tipo, che presuppone molte conoscenze di Analisi matematica. Alcune nozioni sono richiamate nel primo capitolo o nel corso del testo, per altre non si fanno espliciti richiami. Alcune dimostrazioni fanno riferimento a contenuti che potrebbero risultare non conosciuti. In questi casi sono segnalati in nota i prerequisiti necessari.

Il configurarsi dei contenuti del libro e il modo di presentazione degli argomenti provengono dalle esperienze degli autori, che hanno prevalentemente svolto la propria attività di insegnamento in corsi di laurea dell'area dell'ingegneria.

I colleghi ingegneri con cui gli autori hanno avuto molti contatti e molti dialoghi, insieme ai colleghi del Dipartimento di Scienze matematiche «G.L. Lagrange» del Politecnico di Torino hanno dato agli autori un prezioso aiuto per la loro disponibilità e il loro interesse a parlare di questi argomenti e a fornire utili consigli.

Speriamo di poter trasmettere ai lettori l'entusiasmo e l'interesse che abbiamo visto sul volto dei molti studenti che ci sono stati di fronte in aula in questi anni.

Gli Autori

1 Numeri complessi

In questo primo capitolo ricorderemo anzitutto alcune nozioni di base sui numeri complessi, quali le operazioni algebriche piuttosto che la forma cartesiana e trigonometrica o le radici di un numero complesso. Inoltre, buona parte del capitolo sarà dedicata all'esponenziale complesso e all'estensione in campo complesso delle funzioni circolari e iperboliche. Infine, daremo qualche cenno di topologia dell'insieme dei numeri complessi.

1.1 DEFINIZIONE DI NUMERO COMPLESSO

Definizione 1.1 Data una coppia ordinata di numeri reali (a, b), si definisce numero complesso l'espressione

$$z = a + \mathrm{j}b$$

I numeri a e b sono detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di z e sono indicati con i simboli

$$a = \operatorname{Re} z$$
$$b = \operatorname{Im} z$$

I numeri con parte immaginaria nulla possono essere identificati con i numeri reali; per questo scriviamo semplicemente a invece che $a + \mathrm{j}0$. I numeri con parte reale nulla sono detti *immaginari puri* e in questo caso scriviamo $\mathrm{j}b$ invece che $0 + \mathrm{j}b$: in particolare il numero $0 + \mathrm{j}1$ è indicato semplicemente con j ed è detto *unità immaginaria*.

La rappresentazione geometrica di un numero complesso è del tutto naturale: nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ associamo al numero complesso z il punto di coordinate (a, b) oppure, in maniera equivalente, il vettore di componenti (a, b) (vedi Figura 1.1); in particolare il numero complesso 0 corrisponde all'origine, i numeri con parte immaginaria nulla ai punti dell'asse delle ascisse e gli immaginari puri ai punti dell'asse delle ordinate.

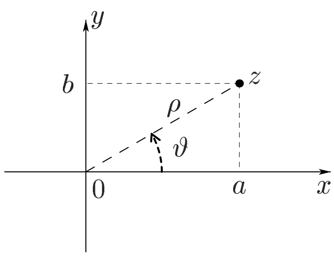


Figura 1.1. Forma cartesiana e forma trigonometrica di un numero complesso.

Il confronto tra due numeri complessi può essere fatto confrontando le parti reali e le parti immaginarie.

Definizione 1.2 Due numeri complessi $a + \mathrm{j}b$ e $c + \mathrm{j}d$ sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$.

1.2 OPERAZIONI TRA NUMERI COMPLESSI

Nell'insieme dei numeri complessi si possono introdurre le operazioni di somma e di prodotto, tramite la seguente definizione.

Definizione 1.3 Dati due numeri complessi $a + \mathrm{j}b$ e $c + \mathrm{j}d$, la loro somma è il numero complesso

$$(a + c) + \mathrm{j}(b + d)$$

mentre il loro prodotto è il numero complesso

$$(ac - bd) + \mathrm{j}(ad + bc)$$

L'operazione di somma gode della proprietà associativa e della proprietà commutativa. Osserviamo che $(a + \mathrm{j}b) + 0 = a + \mathrm{j}b$, per cui lo zero ha la stessa proprietà formale che ha nei reali: quella di essere *elemento neutro* della somma. Per ogni numero $a + \mathrm{j}b$ è possibile definire un *opposto*, che è $(-a) + \mathrm{j}(-b)$, tale che $(a + \mathrm{j}b) + [(-a) + \mathrm{j}(-b)] = 0$.

L'interpretazione geometrica della somma è molto semplice, se ricordiamo l'associazione fatta tra numeri complessi e vettori; si tratta di una somma "componente a componente", analoga alla somma di vettori mediante la regola del parallelogramma.

La differenza tra numeri complessi può essere definita tramite la somma e l'opposto; si pone infatti

$$(a + \mathrm{j}b) - (c + \mathrm{j}d) = (a + \mathrm{j}b) + [(-c) + \mathrm{j}(-d)] = (a - c) + \mathrm{j}(b - d)$$

Anche il prodotto gode della proprietà associativa e della proprietà commutativa; inoltre si ha che $(a + \mathrm{j}b) \cdot 1 = a + \mathrm{j}b$; il numero 1 è l'elemento neutro del prodotto (analogamente a quanto avviene nei reali). Per ogni numero $a + \mathrm{j}b \neq 0$ è possibile definire un *inverso* o *reciproco*, cioè un numero $c + \mathrm{j}d$, tale che $(a + \mathrm{j}b)(c + \mathrm{j}d) = 1$.

L'inverso di $z = a + \mathrm{j}b$, che si indica con $1/z$, è

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{j}\,\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Il quoziente tra numeri complessi può essere definito come il prodotto del dividendo per il reciproco del divisore (che si suppone non nullo):

$$\frac{a + \mathrm{j}b}{c + \mathrm{j}d} = (a + \mathrm{j}b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2} + \mathrm{j}\,\frac{-d}{c^2 + d^2} \right)$$

L'insieme dei numeri complessi, dotato delle operazioni di somma e prodotto appena viste, è indicato con il simbolo $\mathbb{C}$.

Osservazione 1.4 È importante vedere come si comporta l'unità immaginaria j rispetto alla moltiplicazione; utilizzando la Definizione 1.3, si ha immediatamente che

$$\mathrm{j}^2 = \mathrm{j} \cdot \mathrm{j} = (0 + \mathrm{j}1)(0 + \mathrm{j}1) = -1 + \mathrm{j}0 = -1$$

Questa relazione permette di interpretare la Definizione 1.3 in modo formale come un prodotto che segue le regole dell'algebra (dei polinomi) con la convenzione che $\mathrm{j}^2 = -1$. Possiamo svolgere le operazioni tra numeri complessi seguendo questa regola; da essa derivano anche le seguenti importanti relazioni

$$\mathrm{j}^3 = -\mathrm{j} \qquad \mathrm{j}^4 = 1 \qquad \frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$$

che consentono, in particolare, di calcolare tutte le potenze intere di j. □

Esempio 1.5 Calcolare j^{34} e j^{-7}.

Osserviamo che $j^{34} = j^{32} \cdot j^2 = \left(j^4\right)^8 \cdot j^2 = 1 \cdot (-1) = -1$, mentre per quanto riguarda la seconda espressione possiamo scrivere

$$\frac{1}{j^7} = \frac{j}{j^8} = j$$

Osservazione 1.6 Nell'insieme dei numeri complessi non possono essere introdotte relazioni d'ordine con proprietà analoghe a quelle soddisfatte dalla relazione di minore o uguale in $\mathbb{R}$. Per questo non ha senso scrivere disuguaglianze tra numeri complessi, come $z < 1$ oppure $z \geq 1 + j$. □

1.3 FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

La rappresentazione in forma vettoriale ci permette di introdurre un secondo modo di rappresentare un numero complesso: quello in forma trigonometrica.

Consideriamo il numero complesso $z = a + jb$ e il punto P del piano che lo rappresenta (o il vettore $\vec{OP}$). Possiamo rappresentare il vettore $\vec{OP}$ assegnandone le componenti oppure assegnandone il modulo, che indichiamo con ρ, e l'angolo formato con l'asse reale positivo, intendendo come positivi gli angoli ottenuti mediante rotazione in verso antiorario dal semiasse reale positivo alla semiretta che contiene $\vec{OP}$ (vedi ancora la Figura 1.1).

Il numero reale ρ, che risulta sempre maggiore o uguale a zero, si chiama *modulo* del numero complesso e si indica con $|z|$; l'angolo ϑ si chiama *argomento* del numero complesso e si indica con il simbolo arg z.

Le relazioni che legano a e b al modulo e all'argomento sono:

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re} z = |z|\cos(\arg z) \\ b = \operatorname{Im} z = |z|\sin(\arg z) \end{cases} \tag{1.1}$$

oppure

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} & (1.2a) \\ \sin\vartheta = b/\rho & (1.2b) \\ \cos\vartheta = a/\rho & (1.2c) \end{cases}$$

Se $a = 0$ il valore di ϑ è $\pm\pi/2$ (il segno è determinato da quello di b); se invece $a \neq 0$, dividendo membro a membro le equazioni (1.2b) e (1.2c), si ha:

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{b}{a} \tag{1.3}$$

Il rapporto del seno e del coseno dà la tangente, per cui le equazioni (1.2b) e (1.2c) si possono scrivere, per $a \neq 0$, come

$$\tan\vartheta = \frac{b}{a}$$

o anche, ricordando che, nell'intervallo aperto $]-\pi/2, \pi/2[$, la tangente ha come funzione inversa l'arcotangente:

$$\begin{array}{ll} \vartheta = \arctan(b/a) & \text{se } a > 0 \\ \vartheta = \arctan(b/a) \pm \pi & \text{se } a < 0 \end{array} \tag{1.4}$$

Utilizzando le equazioni (1.1) si può scrivere il numero complesso nella seguente forma, detta *forma trigonometrica*:

$$z = |z|(\cos(\arg z) + \mathrm{j}\sin(\arg z)) \tag{1.5}$$

Esempio 1.7 Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $\sqrt{3} + \mathrm{j}$.

Utilizzando le equazioni (1.2a), (1.2b) e (1.2c) possiamo scrivere

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ \cos\vartheta = \sqrt{3}/2 \\ \sin\vartheta = 1/2 \end{cases} \tag{1.6}$$

La seconda equazione ha due soluzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi)$: $\vartheta_1 = \pi/6$ e $\vartheta_2 = -\pi/6$, mentre la terza ha le soluzioni: $\vartheta_3 = \pi/6$ e $\vartheta_4 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. La soluzione comune alle due equazioni è allora: $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_3 = \pi/6$. A un risultato analogo si perviene risolvendo l'equazione

$$\vartheta = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il numero complesso z può quindi essere scritto nella forma

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Osservazione 1.8 Se utilizziamo la rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non abbiamo una corrispondenza biunivoca tra le coppie $(|z|, \arg z)$ e i punti del piano complesso. Mentre la formula (1.5) individua uno ed un solo punto del piano, non è vero il viceversa.

L'origine del piano complesso corrisponde alle (infinite) coppie della forma $(0, \vartheta)$, indipendentemente dal valore di ϑ. Se assumiamo $|z| \neq 0$, notiamo che un punto del piano complesso individua sia la coppia $(|z|, \vartheta)$, sia le coppie del tipo $(|z|.\vartheta + 2k\pi)$, con k intero relativo. □

1.4 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL PRODOTTO

Per interpretare geometricamente il prodotto tra due numeri complessi, scriviamoli in forma trigonometrica

$$z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + \mathrm{j}\sin\vartheta_1) \qquad \text{e} \qquad z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + \mathrm{j}\sin\vartheta_2) \tag{1.7}$$

e calcoliamo il prodotto:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \mathrm{j}(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_1)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \mathrm{j}\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Otteniamo quindi che il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei moduli dei fattori, mentre l'argomento è la somma degli argomenti dei fattori.

La formula (1.8) si presta a fornire l'interpretazione geometrica del prodotto tra numeri complessi: fissato z_1, osserviamo l'effetto prodotto su z_1 dalla moltiplicazione per z_2. L'argomento di z_1 passa da ϑ_1 a $\vartheta_1 + \vartheta_2$: il vettore che rappresenta z_1 risulta quindi ruotato (si veda la Figura 1.2) di un angolo ϑ_2, pari all'argomento di z_2. Il prodotto corrisponde quindi a una *rotazione*.

Il modulo di z_1 è moltiplicato per il modulo di z_2; dal punto di vista geometrico, questo significa che il vettore $\vec{OP_1}$ viene “allungato” (se $|z_2|> 1$) oppure “accorciato” (se $|z_2|< 1$)) di un fattore pari al modulo di z_2. Questa operazione è chiamata *omotetia.* Il prodotto di due numeri complessi corrisponde geometricamente alla combinazione di una rotazione e di una omotetia: una *roto-omotetia.*

Se $|z_2|= 1$ la moltiplicazione per z_2 si riduce a una semplice *rotazione*; ad esempio, se $z_2 = \mathrm{j}$, il punto z_1 viene ruotato di $\pi/2$.

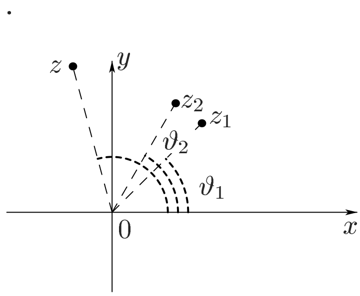


Figura 1.2. L'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi.

1.5 MODULO, ARGOMENTO, COMPLESSO CONIUGATO

Proposizione 1.9 *Il modulo di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $|z|\geq 0$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$, $|z|= 0$ *se e solo se* $z = 0$*;*
2. $|z_1 z_2|= |z_1||z_2|$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*;*
3. $|z_1 + z_2|\leq |z_1|+|z_2|$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*.*

L'ultima proprietà esprime il fatto che in un triangolo la lunghezza di un lato è sempre minore o uguale alla somma degli altri due lati: per questo motivo, viene detta *disuguaglianza triangolare.*

Proposizione 1.10 *L'argomento di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\arg\,(z_1 z_2) = \arg\, z_1 + \arg\, z_2$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*;*
2. $\arg\, \dfrac{z_1}{z_2} = \arg\, z_1 - \arg\, z_2$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$*.*

La verifica di questa affermazione è immediata se si utilizza la forma trigonometrica dei numeri complessi.

Definizione 1.11 Assegnato il numero complesso $z = a+\mathrm{j}b$ si dice complesso coniugato di z il numero complesso

$$z^* = z - \mathrm{j}b$$

Geometricamente il punto che corrisponde a z^* è il simmetrico rispetto all'asse reale del punto che corrisponde a z. Il complesso coniugato è legato al modulo, alla parte reale e a quella immaginaria dalle relazioni:

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2\mathrm{j}} \qquad |z|^2= zz^*$$

La verifica di queste relazioni si riduce a semplici calcoli, come quella delle relazioni che legano il complesso coniugato con le operazioni in $\mathbb{C}$:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

Esempio 1.12 Calcolare l'inverso di $z = 2 + 3j$.

Le proprietà del coniugato sono utili nel calcolo dell'inverso di un numero complesso. Infatti si può scrivere:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

utilizzando questa formula abbiamo immediatamente

$$\frac{1}{2+3j} = \frac{2-3j}{13} = \frac{2}{13} - j\frac{3}{13}$$

1.6 LA FORMULA DI DE MOIVRE

Nella formula (1.8) del prodotto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica poniamo $z_1 = z_2 = z = \rho(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$; otteniamo

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\vartheta + j\sin 2\vartheta)$$

che esprime il quadrato del numero complesso z.

Iterando questo procedimento è immediato dedurre la formula, detta *formula di De Moivre*, che permette di scrivere la potenza n-esima del numero complesso z:

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + j\sin n\vartheta) \tag{1.9}$$

Esempio 1.13 Dato il numero complesso $z = 1 + j$, scrivere z^4.

Scriviamo z in forma trigonometrica; dalle (1.2a), (1.2b) e (1.2c) si ottiene:

$$\rho = \sqrt{2} \qquad \vartheta = \pi/4$$

Utilizzando ora la formula di De Moivre, si ha:

$$(1+j)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos 4\pi/4 + j\sin 4\pi/4) = 4(\cos\pi + j\sin\pi) = -4$$

1.7 RADICI n-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Assegnato $w \in \mathbb{C}$ vogliamo determinare i numeri complessi z tali che $z^n = w$. Questi numeri sono detti *radici n-esime di w*: dimostriamo che ogni numero complesso ammette esattamente n radici n-esime distinte e troviamo una formula che permette di calcolarle.

A questo scopo scriviamo w e z in forma trigonometrica:

$$w = \sigma(\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad \text{e} \qquad z = \rho(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$$

L'equazione $z^n = w$ diventa

$$\rho^n(\cos n\vartheta + j\sin n\vartheta) = \sigma(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e l'argomento che differisce per multipli di 2π, dall'ultima equazione otteniamo

$$\rho^n = \sigma \qquad \text{e} \qquad n\vartheta = \varphi + 2k\pi$$

da cui possiamo ricavare le seguenti formule

$$\rho = \sqrt[n]{\sigma} \qquad \text{e} \qquad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

La seconda di queste equazioni fornisce dei valori di ϑ distinti in corrispondenza a $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; la radice ottenuta con $k = 0$ è detta *radice primitiva* o *fondamentale.*

Quando invece poniamo $k = n$ troviamo il numero complesso che ha modulo e argomento, rispettivamente:

$$\rho = \sqrt[n]{\sigma}, \qquad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

che coincide con la radice primitiva. Considerazioni analoghe si possono fare per $k > n$ e per $k < 0$.

Le radici n-esime distinte di un numero complesso risultano quindi essere n e sono definite dalle relazioni

$$\rho = \sqrt[n]{\sigma} \qquad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.10}$$

I punti P_0, P_1, $\ldots, P_{n-1}$ corrispondenti alle radici n-esime di w si trovano tutti sulla medesima circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\sigma}$ e sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

Esempio 1.14 Calcolare le radici quinte di 1.

Poiché $\sigma = 1$ e $\varphi = 0$, applicando la formula (1.10), otteniamo

$$\sqrt[5]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

I punti ottenuti sono i vertici di un pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio unitario (vedi la Figura 1.3).

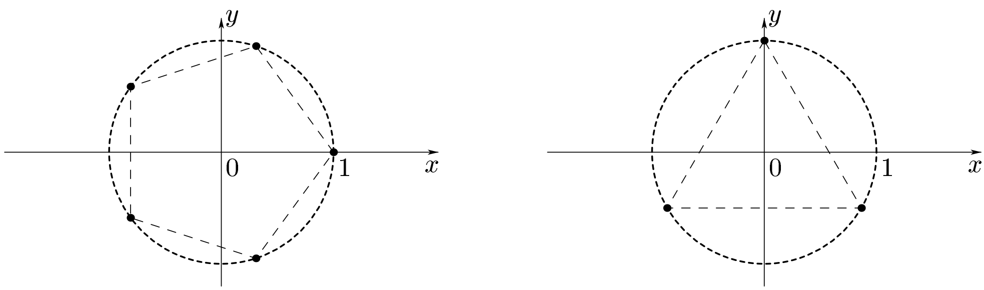


Figura 1.3. Radici quinte dell'unità e radici cubiche di $-\mathrm{j}$.

Esempio 1.15 Calcolare le radici terze di $-\mathrm{j}$.

In questo caso risulta $\sigma = 1$ e $\varphi = 3\pi/2$. Applicando ancora la formula (1.10), otteniamo

$$\sqrt[3]{-\mathrm{j}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) \qquad \text{con } k = 0, 1, 2$$

I punti ottenuti sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio unitario (vedi ancora la Figura 1.3).

1.8 ESPONENZIALE COMPLESSO

Introduciamo ora la forma esponenziale di un numero complesso. Sia z un numero complesso non nullo, che scriviamo in forma trigonometrica

$$z = \rho\,(\cos\vartheta + \mathrm{j}\sin\vartheta) \tag{1.11}$$

Il numero complesso

$$\frac{z}{|z|} = \cos\vartheta + \mathrm{j}\sin\vartheta \tag{1.12}$$

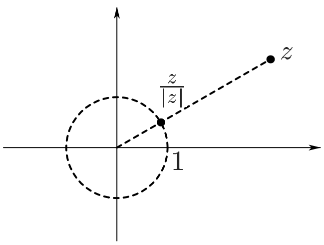


Figura 1.4. Espressione di z come prodotto $|z|{\cdot}z/|z|$.

ha modulo unitario e lo stesso argomento di z. Ogni numero complesso non nullo si può quindi esprimere come il prodotto di un numero reale positivo (il suo modulo) e di un numero complesso di modulo uno (vedi Figura 1.4):

$$z = |z|\,\frac{z}{|z|} \tag{1.13}$$

Siano z_1 e z_2 due numeri complessi di modulo unitario:

$$\begin{aligned} |z_1| &= 1, \quad z_1 = \cos\vartheta + \mathrm{j}\sin\vartheta \\ |z_2| &= 1, \quad z_2 = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \end{aligned}$$

Dalla definizione di prodotto di numeri complessi, si ha

$$\begin{aligned} & z_1 \cdot z_2 = \cos(\vartheta+\varphi) + \mathrm{j}\sin(\vartheta+\varphi) \\ & |z_1 \cdot z_2| = 1 \\ & \arg\,(z_1 \cdot z_2) = \vartheta + \varphi = \arg\,z_1 + \arg\,z_2 \end{aligned}$$

La moltiplicazione di z_1 e di z_2 si traduce in una somma (quella dei loro argomenti); in particolare se $\varphi = -\vartheta$ si ha che $z_1 \cdot z_2 = 1$. Questo comportamento è analogo a quello di un esponenziale reale:

$$\begin{aligned} & e^a \cdot e^b = e^{a+b} \\ & e^a \cdot e^{-a} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Questa analogia formale suggerisce di introdurre una rappresentazione del numero complesso di modulo unitario, che faccia intervenire l'esponenziale del suo argomento. Non si tratta di un esponenziale reale, in quanto dobbiamo rappresentare delle quantità non reali, come nel caso dell'argomento $\pi/2$ a cui deve corrispondere

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{j}$$

Queste considerazioni (del tutto intuitive!) contribuiscono a motivare l'introduzione della seguente, fondamentale, *formula di Eulero* per la rappresentazione dei numeri complessi di modulo unitario in forma esponenziale:

$$\boxed{e^{\mathrm{j}\vartheta} = \cos\vartheta + \mathrm{j}\sin\vartheta} \tag{1.14}$$

Scriviamo il generico numero complesso z nella forma cartesiana

$$z = x + \mathrm{j}y$$

Sempre considerando l'analogia formale con gli esponenziali, vogliamo che l'esponenziale di una somma sia il prodotto degli esponenziali, vale a dire che sia

$$e^z = e^{x+\mathrm{j}y} = e^x\, e^{\mathrm{j}y}$$

Questa relazione, unitamente alla formula di Eulero (1.14), induce a porre la seguente definizione di *esponenziale di un numero complesso*

$$\boxed{e^z = e^{x+\mathrm{j}y} = e^x\,(\cos y + \mathrm{j}\sin y)} \tag{1.15}$$

Da questa definizione si ha che

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\ e^z &= e^x \cos y \\ \mathrm{Im}\ e^z &= e^x \sin y \\ |e^z| &= \mathrm{e}^x \\ \arg\ e^z &= y \end{aligned}$$

Utilizzando la definizione (1.15) è facile mostrare che valgono per l'esponenziale complesso le stesse regole formali che conosciamo per l'esponenziale reale. Per ogni z e w complesso si ha:

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^z e^w \\ (e^z)^w &= e^{zw} \end{aligned} \tag{1.16}$$

La forma esponenziale si presta bene al calcolo delle potenze e delle radici di un numero complesso, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 1.16 Scrivere in forma esponenziale e calcolare la quarta potenza del numero complesso

$$z = -1 - \mathrm{j}\sqrt{3}$$

Poiché

$$|-1-\mathrm{j}\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\arg\left(-1-\mathrm{j}\sqrt{3}\right) = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi$$

possiamo scrivere z in forma esponenziale come

$$z = 2e^{-2\pi\mathrm{j}/3}$$

da cui, utilizzando la (1.16),

$$z^4 = \left(2e^{-2\pi\mathrm{j}/3}\right)^4 = 16e^{-8\pi\mathrm{j}/3} = 16e^{-2\pi\mathrm{j}-2\pi\mathrm{j}/3} = 16e^{-2\pi\mathrm{j}/3}$$

Esempio 1.17 Calcolare la radice quarta di

$$z = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{j}$$

Dapprima scriviamo z in forma esponenziale, ricavandone modulo e argomento:

$$|z| = |-2 + 2\sqrt{3}\mathrm{j}| = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\arg\left(-2 + 2\sqrt{3}\mathrm{j}\right) = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

Si ha quindi

$$z = 4e^{(2\pi/3)\mathrm{j}}$$

per cui le radici quarte di z sono

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4e^{2\pi\mathrm{j}/3 + 2k\pi\mathrm{j}}} = \sqrt[4]{4}e^{\mathrm{j}(2\pi/12 + k2\pi/4)}$$

ovvero:

$$\sqrt[4]{z} = \begin{cases} \sqrt{2}e^{\mathrm{j}\pi/6} \\ \sqrt{2}e^{\mathrm{j}2\pi/3} \\ \sqrt{2}e^{\mathrm{j}7\pi/6} \\ \sqrt{2}e^{\mathrm{j}5\pi/3} \end{cases}$$

Non è invece possibile estendere al campo complesso la proprietà che afferma che la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva (si ricordi che nel campo complesso non si possono definire relazioni d'ordine compatibili con le proprietà delle operazioni). Si verifica però che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha:

$$e^z \neq 0 \tag{1.17}$$

Infatti, supponiamo per assurdo che esista un numero complesso z tale che $e^z = 0$. In base alla definizione di uguaglianza tra numeri complessi e alla (1.15), si dovrebbe avere

$$\begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases}$$

Essendo la funzione esponenziale reale sempre diversa da zero, dovrebbe esistere un valore y in corrispondenza al quale sono nulle sia la funzione seno che la funzione coseno; questo non avviene, come sappiamo dallo studio delle funzioni trigonometriche. Quindi la funzione esponenziale complessa non è mai nulla (in particolare il suo modulo non è mai nullo).

La definizione (1.15) ha però una conseguenza imprevedibile, se si considera l'analogia con la funzione esponenziale reale. Se k è un qualunque intero relativo, dalla (1.15) risulta infatti:

$$e^{z+2k\pi\mathrm{j}} = e^x(\cos(y + 2k\pi\mathrm{j}) + \mathrm{j}\sin(y + 2k\pi\mathrm{j})) = e^x(\cos y + \mathrm{j}\sin y) = e^z \tag{1.18}$$

Da queste uguaglianze risulta che la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi\mathrm{j}$.

1.9 ALCUNE PROPRIETÀ DEL MODULO E DELL'ARGOMENTO

La forma esponenziale complessa permette di ricavare in modo particolarmente semplice le proprietà già analizzate del modulo e dell'argomento.

Siano

$$z_1 = \rho_1 e^{\mathrm{j}\vartheta_1} \qquad z_2 = \rho_2 e^{\mathrm{j}\vartheta_2}$$

a) Si ha:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{\mathrm{j}\vartheta_1} \rho_2 e^{\mathrm{j}\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{j}(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |\rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{j}(\vartheta_1+\vartheta_2)}| &&= \rho_1\rho_2 \\ \arg z_1 z_2 &= \arg\left(\rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{j}(\vartheta_1+\vartheta_2)}\right) &&= \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{aligned}$$

b) Si ha:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{\mathrm{j}\vartheta_1} \rho_2 e^{\mathrm{j}\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{j}(\vartheta_1-\vartheta_2)}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \left|\rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{j}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right| &&= \rho_1\rho_2 \\ \arg z_1 z_2 &= \arg\left(\rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{j}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right) &&= \vartheta_1 - \vartheta_2 \end{aligned}$$

c) Osserviamo infine che la moltiplicazione per un esponenziale con all'esponente un immaginario puro provoca una rotazione:

$$\arg\left(z_1 e^{\mathrm{j}\alpha}\right) = \alpha + \arg z_1$$

In particolare la moltiplicazione per j provoca una rotazione di $\pi/2$:

$$\arg(\mathrm{j}\, z_1) = \pi 2 + \arg z_1$$

In modo analogo si osserva che che la moltiplicazione per j^n provoca una rotazione di $n\pi/2$ e in particolare (si veda Figura 1.5):

$$\mathrm{j}^{4n} z = z \qquad \mathrm{j}^{4n-1} z = -\mathrm{j}z \qquad \mathrm{j}^{4n-2} z = -z \qquad \mathrm{j}^{4n-3} z = \mathrm{j}z$$

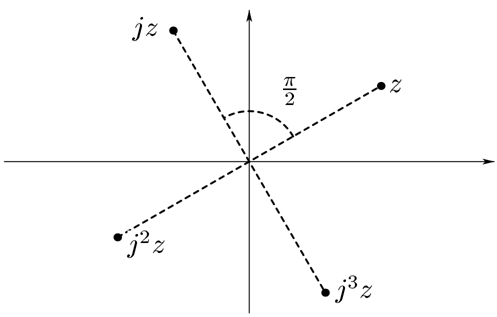


Figura 1.5. Moltiplicazione per potenze di j.

Esempio 1.18 Si determinino il modulo e l'argomento del seguente numero complesso:

$$z = \frac{1}{1+\mathrm{j}\sqrt{3}} e^{\mathrm{j}\pi/2}$$

Si ha:

$$|z| = \frac{|1|}{\left|1+\mathrm{j}\sqrt{3}\right|} \left|e^{\mathrm{j}\pi/2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

$$\arg z = \arg 1 - \arg\left(1+\mathrm{j}\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{2} = -\arctan\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

1.16 SERIE NEL CAMPO COMPLESSO

Il procedimento di definizione di una serie in campo complesso è analogo a quello visto in campo reale: assegnata una successione complessa (z_n) consideriamo la successione (s_n) delle *ridotte o somme parziali n-esime* definita da

$$s_0 = z_0, \qquad s_1 = z_0 + z_1 \qquad s_2 = z_0 + z_1 + z_2 \qquad \dots \qquad s_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n$$

Definizione 1.32 Se esiste finito $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ si dice che la *serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è *convergente* e si pone $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s$. Il numero s è detto somma della serie. Se invece il limite della successione delle somme parziali è infinito, si dice che la serie è divergente, mentre se il limite non esiste, si dice che la serie è oscillante o indeterminata.

Esempio 1.33

La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

converge per $|z| < 1$ e ha come somma $1/(1-z)$, mentre non converge negli altri casi.
Se $z = 1$, possiamo calcolare facilmente la somma parziale s_n; si ha

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n+1 \text{ volte}} = n + 1$$

poiché $\lim_{n\to+\infty}(n+1) = \infty$, la serie risulta divergente.

Supponiamo allora $z \neq 1$ e consideriamo la somma parziale n-esima

$$s_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n$$

moltiplichiamo questa relazione membro a membro per z, ottenendo

$$zs_n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n+1}$$

sottraendo membro a membro queste due uguaglianze otteniamo

$$(1-z)s_n = 1 - z^{n+1}$$

essendo $z \neq 1$, possiamo dividere ambo i membri per $1 - z$ e riscrivere la relazione precedente nella forma

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Calcoliamo ora il limite di s_n per $n \to +\infty$; in base ai risultati visti nel paragrafo precedente, abbiamo che la successione z^{n+1} tende a zero se $|z| < 1$, mentre non converge negli altri casi.

Possiamo quindi riassumere i risultati ottenuti affermando che

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{per } |z| < 1$$

mentre la serie non converge per gli altri valori di z.

Ricordiamo alcune proprietà delle serie reali che possono essere estese alle serie complesse.

Teorema 1.34 *Il comportamento di una serie (cioè il fatto che essa sia convergente, divergente o indeterminata) non cambia se si sopprime o si aggiunge o si modifica un numero finito di termini.*

Teorema 1.35 **Condizione necessaria di convergenza** *Condizione necessaria di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è che risulti

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Teorema 1.36 *Se una serie è convergente allora il suo resto n-esimo, definito da*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$$

tende a zero per $n \to +\infty$.

Teorema 1.37 *Consideriamo due serie convergenti*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = t$$

e sia $\lambda \in \mathbb{C}$; allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda z_n)$$

converge e ha come somma λs, mentre la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$$

converge e ha come somma $s + t$.

Il concetto di *convergenza assoluta* permette di stabilire una importante relazione tra una serie complessa e una serie reale.

Definizione 1.38 Si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è assolutamente convergente se risulta convergente la serie a termini reali non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

■

La verifica della convergenza assoluta di una serie complessa si riduce quindi allo studio di una serie numerica a termini reali non negativi, in cui possono essere utilizzati tutti i criteri noti (criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio dell'integrale o di McLaurin, criterio della radice, criterio del rapporto).

Il legame tra la convergenza assoluta e la convergenza di una serie è stabilito dal seguente teorema, il cui enunciato è analogo a quello che si dimostra nel caso reale.

Teorema 1.39 *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è assolutamente convergente allora è convergente.

Esempio 1.40

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

è convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Studiamo la convergenza assoluta della serie, cioè la convergenza della serie a termini reali non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

Utilizziamo il criterio del rapporto e calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0,$$

per ogni valore di $|z|$. Grazie al Teorema 1.39, la serie data è assolutamente convergente e quindi convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

QUIZ A RISPOSTA MULTIPLA

1. Sia dato il numero complesso $z = \sinh(3 + 3\pi j/2)$. Allora la sua parte immaginaria è:

A $-\sinh 3$

B $\cosh 3$

C $\sin 3 \cosh 3\pi/2$

D $-\cos 3 \sinh 3\pi/2$

2. Sia $z = \frac{3\sqrt{3}-3j}{-2+2j} e^{j\pi}$. Allora:

A $\arg z = 0$

B $\arg z = -11\pi/12$

C $\arg z = -\pi$

D $\arg z = \pi/12$

3. La parte reale del numero complesso $z = \frac{3+j}{2-j}$ è data da:

A $-\frac{1}{5}$

B $-\frac{1}{5}j$

C $\frac{9}{5}$

D 1

4. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $e^{z^*} = e^{\operatorname{Re} z - z}$ è dato da:

A $\{0\}$

B $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$

C $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$

D $\mathbb{C}$

5. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^2 + \mathrm{j}z + 1 = 0$ è dato da:

A $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\mathrm{j}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\mathrm{j}\right\}$

B $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{j}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\mathrm{j}\right\}$

C $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{5}\mathrm{j}, \frac{-1-\sqrt{3}}{5}\mathrm{j}\right\}$

D $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{j}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathrm{j}\right\}$

6. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $e^{2z} + 2 = 0$ è dato da:

A $\{z = \log\sqrt{2} + (\frac{\pi}{2} + k\pi)\mathrm{j} : k \in \mathbb{Z}\}$

B $\{z = \log\sqrt{2} + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\mathrm{j} : k \in \mathbb{Z}\}$

C $\{z = \log\sqrt{2} + (\frac{\pi}{2} + k\pi)\mathrm{j} : k \in \mathbb{N}\}$

D $\{z = \log\sqrt{2} + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\mathrm{j} : k \in \mathbb{N}\}$

7. Il numero complesso $z = 1 + i$ è uguale a:

A $e^{\pi/2}$

B $e^{\pi\mathrm{j}/4}$

C $\sqrt{2}e^{\pi\mathrm{j}/4}$

D $\sqrt{2}e^{\pi\mathrm{j}/2}$

8. Una delle radici quarte del numero complesso $z = 4$ è data da:

A $2\mathrm{j}$

B $-\sqrt{2}\mathrm{j}$

C $-2\mathrm{j}$

D -2

ESERCIZI A RISPOSTA APERTA

1. Si calcolino le seguenti quantità:

$$(1-\mathrm{j})(3+2\mathrm{j}) - 5\mathrm{j}, \quad |\mathrm{j}(\mathrm{j}-7)| - |1+2\mathrm{j}|^2, \quad (\mathrm{j}-2)^{-1}.$$

2. Si risolvano le seguenti equazioni:

$$\cos z + \mathrm{j}\sin z - 1 = 0, \quad e^{2\mathrm{j}z} + 2 = 0, \quad z - |z|^2 = 0.$$

3. Si disegni l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + \mathrm{j}| \leq \sqrt{2}, \operatorname{Re} z \leq 0\}$.

4. Si calcolino le radici quinte del numero complesso $z = 1 - \mathrm{j}$.

5. Si risolva l'equazione $z^6 + \mathrm{j} = 0$ e si disegnino le soluzioni.

6. Si determinino i valori di z per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{3^n}.$$

converge. Per tali valori, determinare la somma della serie.

Marco Codegone, Luca Lussardi

Metodi matematici per l'ingegneria

Seconda edizione

La seconda edizione di *Metodi matematici per l'ingegneria* riprende e rivisita i contenuti della prima, ai quali si aggiunge una parte del tutto nuova di esercizi alla fine di ogni capitolo, con soluzioni disponibili online. I capitoli, presentati in modo da mettere in luce la concatenazione logica degli argomenti, sono otto.

Numeri complessi (cap. 1) è un primo capitolo di richiamo sui numeri e sulle serie in campo complesso; *Serie di Fourier* (cap. 2) tratta argomenti legati alla serie di Fourier, sottolineandone la presentazione nella forma dell'esponenziale complesso e le proprietà analoghe a quelle delle trasformate di Fourier; *Funzioni analitiche* (cap. 3) e *Residui e applicazioni* (cap. 4) mettono in evidenza i fondamenti dell'analisi complessa, gli sviluppi di Taylor e di Laurent e forniscono un metodo per classificare le singolarità isolate e calcolare i residui, anche in vista della antitrasformata di Laplace di funzioni razionali; *Distribuzioni* (cap. 5) privilegia una comprensione delle distribuzioni come funzioni generalizzate, cioè come limite opportuno di funzioni o come derivata, in un senso nuovo, di funzioni.

Infine i tre capitoli dedicati alle trasformate mostrano come, da poche trasformate ottenute con la definizione, grazie alle proprietà, si possano calcolare in modo semplice molte trasformate interessanti per le applicazioni. Nel capitolo *Trasformata di Fourier* (cap. 6) la convoluzione con il treno di impulsi è lo strumento che consente di presentare la trasformata di Fourier di segnali periodici e di vederne il legame con la serie di Fourier; *Trasformata di Laplace* (cap. 7) presenta la trasformata di Laplace bilatera, nei suoi legami con la trasformata di Fourier, e ne discute il dominio, con qualche cenno alla trasformata unilatera; è segnalata qualche applicazione ai modelli ingresso-uscita di tipo differenziale e all'uso delle trasformate in tali modelli; il breve capitolo *Trasformata Zeta* (cap. 8) conclude l'opera.

Marco Codegone ha insegnato Analisi matematica 1 e 2 e Metodi matematici per l'ingegneria presso il Dipartimento di Scienze matematiche «Giuseppe Luigi Lagrange» del Politecnico di Torino.

Luca Lussardi insegna Analisi matematica 1, Fondamenti di matematica, Laboratorio Problem solving 1 presso il Dipartimento di Scienze matematiche «Giuseppe Luigi Lagrange» del Politecnico di Torino e Mathematical methods B presso la Turin Polytechnic University di Tashkent in Uzbekistan.

Le risorse digitali

online.universita.zanichelli.it/codegone2e
A questo indirizzo sono disponibili le risorse multimediali di complemento al libro. Per accedere alle risorse protette è necessario registrarsi su **my.zanichelli.it** inserendo la chiave di attivazione personale contenuta nel libro.

Libro con ebook

Chi acquista il libro può scaricare gratuitamente l'**ebook**, seguendo le istruzioni presenti nel sito. L'ebook si legge con l'applicazione *Booktab Z*, che si scarica gratis da App Store (sistemi operativi Apple) o da Google Play (sistemi operativi Android).

CODEGONE*METODI MAT INGEGNER 2E LUM
ISBN 978-88-08-52046-3
9 788808 520463
2 3 4 5 6 7 8 9 0 (60B)