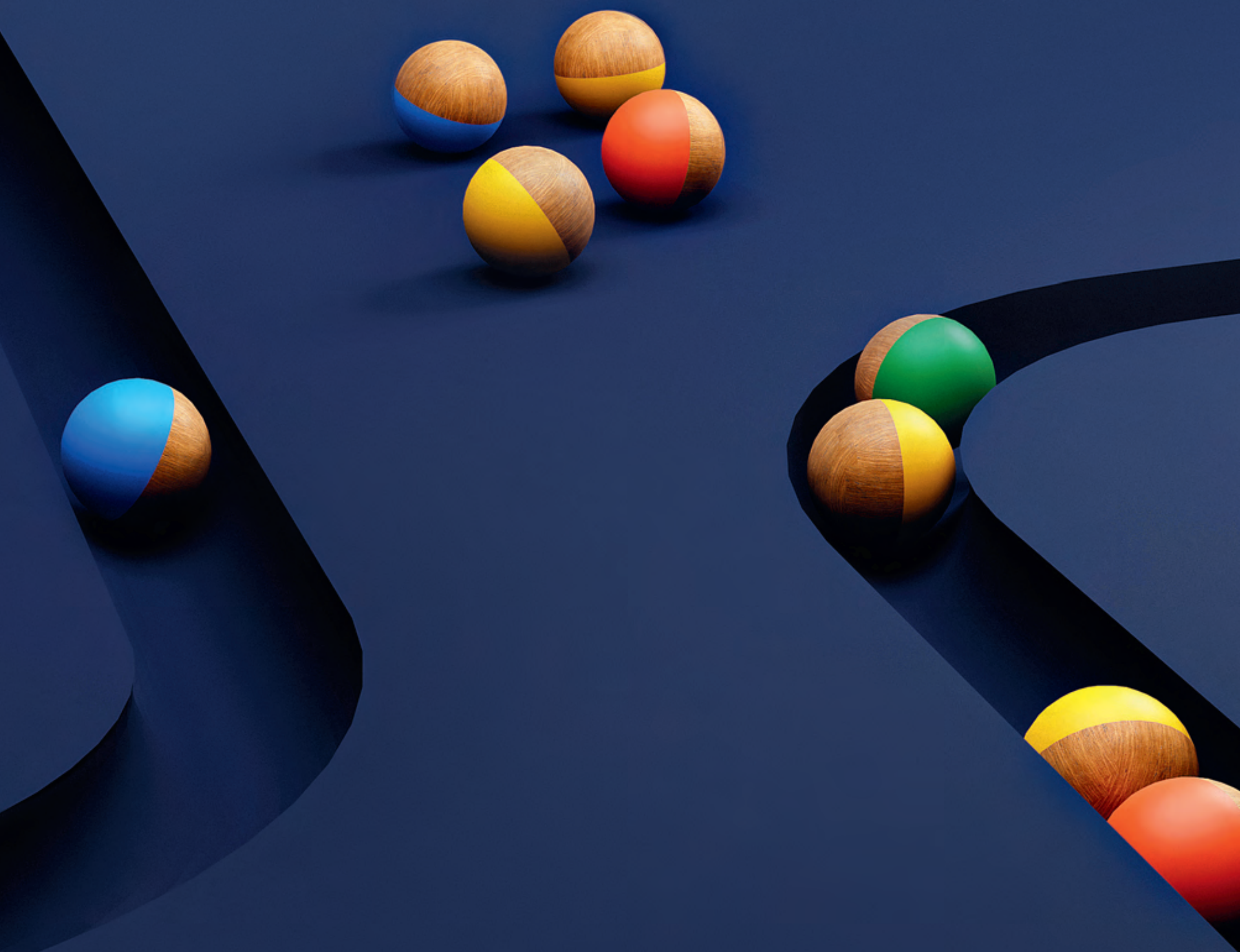
Sandro Salsa Annamaria Squellati

Esercizi di Analisi matematica 1 e Algebra lineare



MATEMATICA ZANICHELLI

Sandro Salsa Annamaria Squellati

Esercizi di Analisi matematica 1 e Algebra lineare

Se vuoi accedere alle risorse online riservate

1. Vai su **my.zanichelli.it**
2. Clicca su *Registrati*.
3. Scegli *Studente*.
4. Segui i passaggi richiesti per la registrazione.
5. Riceverai un'email: clicca sul link per completare la registrazione.
6. Cerca il tuo codice di attivazione stampato in verticale sul bollino argentato in questa pagina.
7. Inseriscilo nella tua area personale su **my.zanichelli.it**

Se sei già registrato, per accedere ai contenuti riservati ti serve solo il codice di attivazione.

MATEMATICA ZANICHELLI

Redazione: Natalia Nanni
Impaginazione: CompoMat, Configni (RI)

Copertina:
– *Progetto grafico*: Falcinelli & Co., Roma
– *Immagine di copertina*: © D3signAllTheThings/iStockphoto

Prima edizione: novembre 2023

Ristampa: **prima tiratura**
5 4 3 2 1 2024 2025 2026 2027 2028

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.
L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: **linea_universitaria@zanichelli.it**
sito web: **www.zanichelli.it**

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza, identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo online per l'Università.

Per comunicazioni di tipo commerciale: **universita@zanichelli.it**

Stampa:

per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Indice generale

Prefazione

Questa raccolta di esercizi è rivolta agli studenti di un corso di laurea in una disciplina scientifica (e.g. Ingegneria, Fisica, Matematica, Economia, Informatica, Biologia, Scienze Naturali) e intende proporsi come un utile punto di riferimento per la preparazione a esami che combinano contenuti di Analisi matematica 1 e Algebra Lineare. Grazie alla presenza di richiami teorici, può essere usata da sola o affiancare qualunque manuale.

Nella stesura degli esercizi ci siamo basati sulla convinzione che per ottenere una buona preparazione non sia necessario sottoporre chi studia a una meccanica risoluzione di esercizi ripetitivi, bensì sia utile l'invito ad affrontare questioni di varia natura che agevolino nell'acquisizione di abilità sia teoriche sia tecniche.

Gli argomenti dei primi sei capitoli riguardano essenzialmente le **funzioni di una variabile reale**, per arrivare ai principali concetti del **calcolo differenziale e integrale unidimensionale** e alle loro applicazioni. Il settimo è dedicato alle nozioni fondamentali dell'**algebra lineare**. Prerequisiti sono la conoscenza dei primi elementi di geometria analitica e la trigonometria elementare.

Il **primo capitolo** riguarda i concetti elementari di *logica* e *teoria degli insiemi*, con particolare risalto agli *insiemi numerici* $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e al *principio di induzione*.

Il **secondo capitolo** tratta le *funzioni* reali di una variabile reale, la loro tipologia e le loro caratteristiche grafiche.

Alla definizione di limite è dedicato il **terzo capitolo**, diviso in tre sezioni. Le tecniche di calcolo dei limiti sono sviluppate prima per le *successioni*, per poi passare alle *funzioni* e analizzare la nozione di *continuità*.

Il *calcolo differenziale* con le sue applicazioni è l'argomento del **quarto capitolo**. Centrali sono il concetto di *derivata*, la ricerca di massimi e minimi, il tracciamento del grafico di una funzione.

L'analisi del comportamento delle *serie numeriche* è l'obiettivo degli esercizi del **quinto capitolo**.

Nel **sesto capitolo** lo studente è chiamato ad affrontare problemi riguardanti il *calcolo integrale* e le sue applicazioni; in particolare, ad affinare le tecniche di ricerca delle *primitive* di una funzione, ad acquisire padronanza con i *teoremi fondamentali*, a studiare funzioni definite attraverso integrali.

Gli esercizi del **settimo capitolo** sono ambientati negli *spazi vettoriali euclidei* $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ e intendono familiarizzare lo studente con il *calcolo matriciale*, con l'analisi dei *sistemi lineari*, per arrivare alle *trasformazioni lineari*, alla loro rappresentazione e alla determinazione dei loro *autovalori/autovettori*.

Ogni capitolo è suddiviso in sezioni, ciascuna delle quali si apre con richiami teorici e propone esercizi di diversa difficoltà, divisi per tipologia. La struttura di ogni sezione prevede:

Richiami di teoria Per agevolare lo studente, riassumiamo le nozioni teoriche necessarie per svolgere le attività proposte. Ciò non deve comunque indurre a trascurare lo studio della teoria, prima di passare alla risoluzione degli esercizi.

Esempi Sono esercizi di media difficoltà, interamente svolti, che hanno lo scopo di fornire una guida per la soluzione degli esercizi presentati successivamente.

Test a risposta multipla Sono i quesiti più immediati. Consistono in una domanda che prevede una risposta da scegliere tra quattro possibili. Tranne che in casi particolarmente semplici, la risposta viene sempre motivata.

Esercizi Gli esercizi proposti richiedono un livello medio di preparazione. Molti sono del tipo assegnato nelle prove scritte per i diversi corsi di laurea.

Vero o falso? Lo studente è chiamato a decidere se una affermazione sia corretta o meno; la risposta richiede una buona padronanza dei concetti teorici.

Trovare l'errore Di carattere più applicativo rispetto ai precedenti, sono quesiti che hanno lo scopo di evidenziare gli errori commessi più di frequente.

Per ognuno degli esercizi delle tipologie illustrate sopra, **le soluzioni si trovano alla fine della relativa sezione e sono sempre ampiamente motivate**.

Per gli studenti che desiderano approfondire i vari argomenti, sono alla fine proposti

Ulteriori esercizi Sono mediamente più impegnativi e spesso richiedono argomentazioni di carattere teorico. Le soluzioni di questi esercizi sono disponibili all'indirizzo **online.universita.zanichelli.it/salsasquellati1_alg**.

Gli Autori

7 Algebra lineare

7.1 SPAZI VETTORIALI n-DIMENSIONALI

RICHIAMI DI TEORIA

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. L'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali (*vettori*) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dotato delle operazioni somma e prodotto per uno scalare, definite da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

prende il nome di **spazio vettoriale** (**reale**) n-dimensionale e viene indicato col simbolo $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R}\}$$

I numeri x_i sono le *componenti* (scalari) del vettore $\mathbf{x}$.

$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ indica il vettore *nullo*, $-\mathbf{x} = (-x_2, -x_2, \ldots, -x_n)$ è il vettore *opposto* a $\mathbf{x}$.

La *differenza* $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è definita da $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

Le operazioni di somma di due vettori e di prodotto per uno scalare godono delle seguenti proprietà. Per la somma:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} & \text{commutativa} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) & \text{associativa} \end{array}$$

Per il prodotto scalare-vettore, dati due numeri t, $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y} & \text{distributiva} \\ (s + t)\mathbf{x} = s\mathbf{x} + t\mathbf{x} & \text{distributiva} \\ s(t\mathbf{x}) = (st)\,\mathbf{x} & \text{associativa} \\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} & \end{array}$$

Due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (diversi dal vettore nullo) si dicono *paralleli* (hanno cioè la stessa *direzione*) se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$.

Modulo. Definiamo *modulo* o *norma* di un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ il numero

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

con le proprietà

$$\begin{array}{ll} |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{x}| & \text{omogeneità} \\ |\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| & \text{disuguaglianza triangolare} \end{array}$$

Un vettore di modulo unitario si chiama *versore*.

Prodotto scalare. Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ il loro *prodotto scalare* o *prodotto interno,* denotato con $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ o con $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, è definito da

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

Due vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ si dicono *ortogonali* se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} & \text{commutativa} \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} & \text{distributiva} \\ (t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \qquad (t \in \mathbb{R}) & \text{omogeneità} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} & \text{positività e annullamento} \end{array}$$

Inoltre

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \text{ disuguaglianza di Cauchy-Schwarz}$$

dove il segno di uguaglianza vale se e solo se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono paralleli.

Proiezione di un vettore lungo un versore. Se $\mathbf{n}$ è un versore, la *proiezione* di un vettore $\mathbf{x}$ lungo la direzione di $\mathbf{n}$ è data da $\mathbf{x}_{pr} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$.

Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Si dice *combinazione lineare* di k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ ogni vettore del tipo

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

con $\alpha_{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.

I k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono *linearmente dipendenti* se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dà il vettore nullo; viceversa, sono *linearmente indipendenti* se l'uguaglianza

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

implica $\alpha_i = 0$ per tutti gli $i = 1, 2, \ldots, k$.

In $\mathbb{R}^n$ si possono trovare *al massimo* n vettori linearmente indipendenti.

Esempi

1 Consideriamo le due matrici dello stesso tipo[3]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

La loro somma si ottiene addizionando gli elementi corrispondenti

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3+0 & 4+(-2) & -3+4 \\ -1+5 & 0+(-3) & 6+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Consideriamo la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Il prodotto di un numero per una matrice si ottiene moltiplicando ogni elemento della matrice per il numero stesso; il prodotto $-3\mathbf{A}$ è

$$-3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3\cdot 3 & -3\cdot 2 & -3\cdot(-1) \\ -3\cdot(-5) & -3\cdot 6 & -3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 15 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Consideriamo le due matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Poiché il numero di colonne di $\mathbf{A}$ (tre) è diverso dal numero di righe di $\mathbf{B}$ (due) non è definito il prodotto $\mathbf{AB}$, mentre è definito il prodotto $\mathbf{BA}$. La matrice $\mathbf{BA}$ ha due righe e tre colonne e i suoi elementi si ottengono come prodotto scalare delle righe di $\mathbf{B}$ per le colonne di $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 3+(-2)\cdot(-1) & 0\cdot 4+(-2)\cdot 0 & 0\cdot(-3)+(-2)\cdot 6 \\ 5\cdot 3+(-3)\cdot(-1) & 5\cdot 4+(-3)\cdot 0 & 5\cdot(-3)+(-3)\cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 18 & 20 & -33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 *Calcoliamo i determinanti delle matrici*

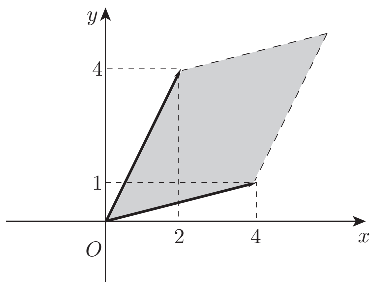
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

[3] Si possono sommare tra loro solo matrici aventi lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne!

Si ha

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 14$$

Ricordiamo che il determinante di una matrice di ordine due ha il significato geometrico di area con segno del parallelogramma individuato dai vettori riga (o colonna) che formano la matrice.



Per il calcolo di $\det \mathbf{B}$ si può utilizzare, per esempio, la regola di Sarrus.

Si riportano a destra di $\mathbf{B}$ le sue prime due colonne

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \end{array}$$

e si eseguono i prodotti degli elementi in diagonale, sommando il prodotto degli elementi della diagonale principale $(1 \times 2 \times 4)$ con quelli delle "diagonali parallele" $(2 \times 1 \times (-1)$ e $3 \times 3 \times (-1))$ e sottraendo quello sull'altra diagonale $(3 \times 2 \times (-1))$ e sulle diagonali parallele $(1 \times 1 \times (-1)$ e $2 \times 3 \times 4))$. Si ha, quindi

$$\det \mathbf{B} = 8 - 2 - 9 - (-6 - 1 + 24) = -20.$$

Ricordiamo che il determinante di una matrice di ordine tre ha il significato geometrico di volume con segno del parallelepipedo individuato dai vettori che accostati formano la matrice.

5 *Calcoliamo il determinante della matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Test a risposta multipla

1. Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra $(3, 2, 7)$, $(1, 5, 1)$, $(0, 0, 3)$ e $(0, 3, 1)$ è

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2. Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ una matrice, e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vettori tali che $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$; allora $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ appartengono rispettivamente a

a) $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ b) $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$
c) entrambi a $\mathbb{R}^2$ d) entrambi a $\mathbb{R}^3$

3. La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile

a) solo per $\alpha = 1$ b) per ogni α
c) per nessun valore di α d) per ogni α tranne $\alpha = 1$

4. Quale tra i seguenti vettori *non* può essere scritto come combinazione lineare di $\mathbf{a} = (7, -4, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (-5, 1, 0, 2)$?

a) $(2, -3, 1, 2)$ b) $(1, 0, 4, 8)$ c) $(-7, 4, -1, 0)$ d) $(0, 0, 0, 0)$

5. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0

6. Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n, *non singolare*, e $\mathbf{A}^*$ la matrice dei suoi *complementi algebrici*. Quali tra le seguenti affermazioni è vera? $\det \mathbf{A}^* =$

a) $\det \mathbf{A}$ b) $1/\det \mathbf{A}$ c) $(\det \mathbf{A})^{n-1}$ d) $(\det \mathbf{A})^n$

Esercizi

1. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcolare i prodotti $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$.

2. Verificare che la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

non è *invertibile* (ossia non possiede inversa), applicando la definizione.

10 Sia data la seguente matrice

$$\mathbf{A}(m) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2m \\ m & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro m.

(a) Verificare che per $m \neq 0, -3$, il sistema

$$\mathbf{A}(m)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ha un'unica soluzione, qualunque sia $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

(b) Per $m = 0$, dire a quale condizione deve soddisfare il vettore $\mathbf{b}$, affinché il sistema

$$\mathbf{A}(0)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

sia risolubile.

11 Mediante il metodo di eliminazione di Gauss, verificare se esiste l'inversa della seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e calcolarla.

12 Esaminare la risolubilità del seguente sistema e, quando possibile, risolverlo

$$\begin{cases} x - y + at = a \\ ax - z + t = a \\ -x + y + az = -a \\ ay + z - t = a \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Vero o falso?

1 [V] [F] Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo 6×5, avente rango massimo. Allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è sempre impossibile.

2 [V] [F] Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo 6×7, avente rango massimo. Allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ non è mai impossibile.

3 [V] [F] Nel sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi una delle equazioni del sistema, per esempio la terza, è superflua. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 2y - 4z = 6 \end{cases}$$

4 V F Se $\mathbf{A}$ è quadrata e $\det \mathbf{A} = 0$, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ha infinite soluzioni.

5 V F Se il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A}$ matrice quadrata di ordine 3, ha l'unica soluzione

$$x_1 = 2b_1 + b_3,\ x_2 = -b_1 + 3b_2 - 7b_3,\ x_3 = -3b_2 + b_3$$

allora $\mathbf{A}$ è invertibile e

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

Trovare l'errore

1 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ 2x - y - 2z - w = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Si può scrivere

$$\begin{cases} x + 2y - z = -w \\ 2x - y - 2z = w \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

pensando w come parametro e riconducendosi così a un sistema di tre equazioni in tre incognite. Dato che il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, infatti

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

mentre, per esempio, il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

dal sistema si può eliminare la terza equazione.

Si ha così

$$\begin{cases} x + 2y - z = -w \\ 2x - y - 2z = w \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y = z - w \\ 2x - y = 2z + w \end{cases}$$

Ora, z e w possono essere presi come parametri e il sistema ha ∞^2 soluzioni.

Ulteriori esercizi

▶ Soluzioni online

1 Determinare i parametri a, b, c, d in modo tale che il piano di equazione

$$ax + by + cz = d$$

passi per i punti $(0, 2, 2)$, $(-1, 1, 1)$ e $(1, 4, -1)$.

2 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo $m \times n$. Dimostrare che l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

3 Sia $\mathbf{x}_0$ una soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dimostrare che tutte le altre soluzioni possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z} \tag{7.24}$$

dove $\mathbf{z}$ è soluzione del sistema omogeneo associato $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

4 (a) Esaminare la dipendenza/indipendenza lineare dei seguenti vettori al variare del parametro m

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m - 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ m + 2 \end{pmatrix}$$

(b) Esprimere, quando possibile, il vettore $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$.

7.3 Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

s1 $\boxed{\text{c}}$

I ranghi devono essere uguali tra loro e uguali al numero delle incognite, cioè 2.

s2 $\boxed{\text{c}}$

Il sistema $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ è ovviamente equivalente a $x_1+x_2 = 0$. Le soluzioni sono perciò i vettori della forma $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

s3 $\boxed{\text{d}}$

Per il teorema di Cramer, il sistema ha un'unica soluzione se $\det \mathbf{A} \neq 0$ e ciò accade se e solo se $a \neq \pm 3$. Per $a = 3$ è impossibile e per $a = -3$ ha infinite soluzioni.

s4 $\boxed{\text{c}}$

Se il sistema è impossibile, il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ è uguale al rango di $\mathbf{A} + 1$: aggiungendo una colonna il rango può al massimo aumentare di un'unità.

s5 $\boxed{\text{b}}$

Per il teorema di Cramer, il sistema non può avere un'unica soluzione. Se il rango di $\mathbf{A}$ è uguale al rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ il sistema ha infinite soluzioni, altrimenti è impossibile.

s6 $\boxed{\text{a}}$

Il rango della matrice dei coefficienti è 2, mentre quello della matrice completa è 3.

Esercizi

s1 Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 52$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da 0, quindi, per il teorema di Cramer, il sistema ammette un'unica soluzione, ricavabile con le formule:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{52} = \frac{3}{13}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{52} = \frac{7}{26}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{52} = \frac{5}{26}$$

s2 (a) Ogni multiplo di $\mathbf{z}_1$ è soluzione del sistema $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$; per esempio,

$$\mathbf{z}_2 = 2\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vero o falso?

s1 Falso. Il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ può essere 5 o 6 e il sistema potrebbe anche avere soluzioni.

s2 Vero. Il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ è per forza 6 (uguale al rango di $\mathbf{A}$).

s3 Falso. È vero che la matrice dei coefficienti ha rango 2 e un'equazione è superflua, ma non si può "buttar via" un'equazione a caso. Si possono eliminare la prima o la seconda che sono equivalenti, ma non la terza.

s4 Vero. Essendo omogeneo, il sistema ha almeno la soluzione nulla. Per il teorema di Cramer, non può avere un'unica soluzione, quindi ne ha infinite.

s5 Falso. La (7.23) è la trasposta di $\mathbf{A}^{-1}$, mentre si ha

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare l'errore

s1 Quando le incognite sono in numero maggiore delle equazioni ($n > m$), si può giungere alla soluzione del sistema scegliendo alcune incognite come parametri. Però non possono essere scelte "a caso".

Nell'esempio, si può scegliere z come parametro, ma non w.

La matrice dei coefficienti ha rango 3 perché, per esempio, il minore formato dalla prima, seconda e dalla quarta colonna è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Il sistema si può risolvere pensando a z come parametro (l'incognita i cui coefficienti non compaiono nel minore)

$$\begin{cases} x + 2y + w = z \\ 2x - y - w = 2z \\ -x + y = -z \end{cases}$$

Si ha, applicando le (7.18),

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 2 & 1 \\ 2z & -1 & -1 \\ -z & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & 1 \\ 2 & 2z & -1 \\ -1 & -z & 0 \end{vmatrix}}{4} = 0, \quad w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & z \\ 2 & -1 & 2z \\ -1 & 1 & -z \end{vmatrix}}{4} = 0$$

Il sistema ammette ∞^1 soluzioni, che possono anche essere scritte nella forma

$$(x, y, z, w) = (1, 0, 1, 0)\, k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Ulteriori esercizi ▶ Soluzioni online

1 Sia $\mathbf{A}$ la matrice quadrata di ordine 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dimostrare che, detti λ_1 e λ_2 i suoi autovalori, si ha

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad \text{e} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = ad - bc = \det(\mathbf{A})$$

Il risultato può essere generalizzato.

Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *è una matrice quadrata di ordine* n *con autovalori* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *e* $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *(traccia di* $\mathbf{A}$*), si ha*

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad e \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

2 Calcolare autovalori e autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata con autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

(a) Mostrare che le matrici

$$k\mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_n - k\mathbf{A} \qquad (k \neq 0)$$

hanno gli stessi autovettori di $\mathbf{A}$, mentre gli autovalori sono dati, rispettivamente, da

$$\mu_j = k\lambda_j \quad \text{e} \quad \mu_j = 1 - k\lambda_j$$

(b) Calcolare autovalori, autovettori e determinante della matrice di *Householder* $\mathbf{H} = \mathbf{I}_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top$, dove $\mathbf{u}$ è un *versore* (vedi Ulteriore esercizio 7, sez. 7.2)

4 Siano $\mathbf{A}$, e $\mathbf{B}$ quadrate di ordine n. Mostrare che

(a) rango di $\mathbf{AB} \leq$ rango di $\mathbf{A}$

(b) rango di $\mathbf{AB} \leq$ rango di $\mathbf{B}$.

5 Siano $\mathbf{A}$ di tipo $m \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Mostrare che:

Sandro Salsa, Annamaria Squellati

Esercizi di Analisi matematica 1 e Algebra lineare

Inquadra e scopri i contenuti

Questa raccolta di esercizi prepara all'esame di Analisi matematica 1 quando prevede nozioni di Algebra lineare e, grazie ai richiami di teoria, può essere usata da sola o affiancare qualunque manuale.
Gli argomenti del volume, divisi in sette capitoli, sono:

1. Insiemi e numeri
2. Funzioni
3. Limiti e continuità
4. Calcolo differenziale
5. Serie numeriche
6. Calcolo integrale
7. Algebra lineare.

Ogni capitolo è suddiviso in sezioni, ciascuna delle quali si apre con *Richiami di teoria* e prevede lo svolgimento preliminare di *Esempi*, che servono da guida alle principali tecniche risolutive.

Ogni sezione propone esercizi divisi per tipologia, con soluzione alla fine del capitolo: *Test a risposta multipla*, *Esercizi* più tradizionali, domande di tipo *Vero o falso* e quesiti che richiedono di *Trovare l'errore*; concludono il capitolo *Ulteriori esercizi*, in genere più impegnativi e spesso di carattere teorico, le cui soluzioni sono disponibili sul sito del libro.

Sandro Salsa è professore emerito di Analisi matematica presso il Politecnico di Milano.
Annamaria Squellati è stata docente di Matematica presso l'Università Bocconi e il Politecnico di Milano.

Le risorse digitali

online.universita.zanichelli.it/salsasquellati1_alg
A questo indirizzo sono disponibili le risorse digitali di complemento al libro.
Per accedere alle risorse protette è necessario registrarsi su **my.zanichelli.it** inserendo il codice di attivazione personale contenuto nel libro.

Libro con Ebook

Chi acquista il libro nuovo può accedere gratuitamente all'Ebook, seguendo le istruzioni presenti nel sito.

L'accesso all'Ebook e alle risorse digitali protette è personale, non condivisibile e non cedibile, né autonomamente né con la cessione del libro cartaceo.

SALSA"SQUELLATI*ES AN MAT1+ALG LUM
ISBN 978-88-08-40375-9
9 788808 403759
5 6 7 8 9 0 1 2 3 (60B)