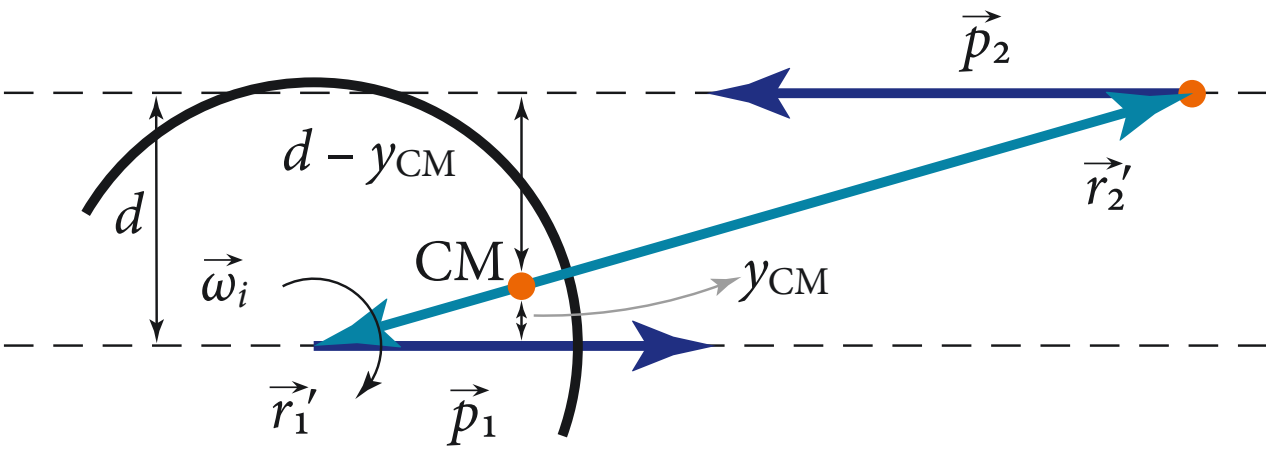
Mario Paolo Giordani
Gilberto Giugliarelli

Problemi di Fisica 1

Meccanica e Termodinamica

Seconda edizione



cea
casa editrice ambrosiana

Mario Paolo Giordani
Gilberto Giugliarelli

Problemi di Fisica 1

Meccanica e Termodinamica

seconda edizione

Se vuoi accedere alle risorse online riservate

1. Vai su **my.zanichelli.it**
2. Clicca su *Registrati*.
3. Scegli *Studente*.
4. Segui i passaggi richiesti per la registrazione.
5. Riceverai un'email: clicca sul link per completare la registrazione.
6. Cerca il tuo codice di attivazione stampato in verticale sul bollino argentato in questa pagina.
7. Inseriscilo nella tua area personale su **my.zanichelli.it**

Se sei già registrato, per accedere ai contenuti riservati ti serve solo il codice di attivazione.

cea
casa editrice ambrosiana

© 2023 CEA – Casa Editrice Ambrosiana, viale Romagna 5, 20089 Rozzano (MI) [32016]
CEA – Casa Editrice Ambrosiana è un marchio editoriale di Zanichelli editore S.p.A.

Diritti riservati
I diritti di pubblicazione, riproduzione, comunicazione, distribuzione, trascrizione, traduzione, noleggio, prestito, esecuzione, elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale e di adattamento totale o parziale su supporti di qualsiasi tipo e con qualsiasi mezzo (comprese le copie digitali e fotostatiche), sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Fotocopie e permessi di riproduzione
Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E. del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E.

Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume.

Le richieste vanno inoltrate a:
Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali (CLEARedi),
Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano
e-mail: **autorizzazioni@clearedi.org** e sito web: **www.clearedi.org**

L'autorizzazione non è concessa per un limitato numero di opere di carattere didattico riprodotte nell'elenco che si trova all'indirizzo **www.zanichelli.it/chi-siamo/fotocopie-e-permessi**

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La loro fotocopia per i soli esemplari esistenti nelle biblioteche è consentita, anche oltre il limite del 15%, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, né le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.
Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei e archivi, la facoltà di cui all'art. 71-ter legge diritto d'autore.
Per permessi di riproduzione, diversi dalle fotocopie, rivolgersi a **segreteria_cea@ceaedizioni.it**

Licenze per riassunto, citazione e riproduzione parziale a uso didattico con mezzi digitali
La citazione, la riproduzione e il riassunto, se fatti con mezzi digitali, sono consentiti (art. 70 bis legge sul diritto d'autore), limitatamente a brani o parti di opera, a) esclusivamente per finalità illustrative a uso didattico, nei limiti di quanto giustificato dallo scopo non commerciale perseguito. (La finalità illustrativa si consegue con esempi, chiarimenti, commenti, spiegazioni, domande, nel corso di una lezione); b) sotto la responsabilità di un istituto di istruzione, nei suoi locali o in altro luogo o in un ambiente elettronico sicuro, accessibili solo al personale docente di tale istituto e agli alunni o studenti iscritti al corso di studi in cui le parti di opere sono utilizzate; c) a condizione che, per i materiali educativi, non siano disponibili sul mercato licenze volontarie che autorizzano tali usi.
Zanichelli offre al mercato due tipi di licenze di durata limitata all'anno accademico in cui le licenze sono concesse:
A) licenze gratuite per la riproduzione, citazione o riassunto di una parte di opera non superiore al 5%. Non è consentito superare tale limite del 5% attraverso una pluralità di licenze gratuite,
B) licenze a pagamento per la riproduzione, citazione, riassunto parziale ma superiore al 5% e comunque inferiore al 40% dell'opera.
Per usufruire di tali licenze occorre seguire le istruzioni su **www.zanichelli.it/licenzeeducative**
L'autorizzazione è strettamente riservata all'istituto educativo licenziatario e non è trasferibile in alcun modo e a qualsiasi titolo.

Garanzie relative alle risorse digitali
Le risorse digitali di questo volume sono riservate a chi acquista un volume nuovo: vedi anche al sito **www.zanichelli.it/contatti/acquisti-e-recesso** le voci *Informazioni generali su risorse collegate a libri cartacei* e *Risorse digitali e libri non nuovi*.
Zanichelli garantisce direttamente all'acquirente la piena funzionalità di tali risorse.
In caso di malfunzionamento rivolgersi a **assistenza@zanichelli.it**
La garanzia di aggiornamento è limitata alla correzione degli errori e all'eliminazione di malfunzionamenti presenti al momento della creazione dell'opera. Zanichelli garantisce inoltre che le risorse digitali di questo volume sotto il suo controllo saranno accessibili, a partire dall'acquisto, per tutta la durata della normale utilizzazione didattica dell'opera. Passato questo periodo, alcune o tutte le risorse potrebbero non essere più accessibili o disponibili: per maggiori informazioni, leggi **my.zanichelli.it/fuoricatalogo**

Soluzioni degli esercizi e altri svolgimenti di compiti assegnati
Le soluzioni degli esercizi, compresi i passaggi che portano ai risultati e gli altri svolgimenti di compiti assegnati, sono tutelate dalla legge sul diritto d'autore in quanto elaborazioni di esercizi a loro volta considerati opere creative tutelate, e pertanto non possono essere diffuse, comunicate a terzi e/o utilizzate economicamente, se non a fini esclusivi di attività didattica.

Diritto di TDM
L'estrazione di dati da questa opera o da parti di essa e le attività connesse non sono consentite, salvi i casi di utilizzazioni libere ammessi dalla legge. L'editore può concedere una licenza. La richiesta va indirizzata a **tdm@zanichelli.it**

Redazione: Chiara Lambertini
Impaginazione: Compomat, Configni (RI)
Copertina:
Progetto grafico: Anchora, Milano
Realizzazione: Sara Travella/GALLINE A POIS, Milano

Prima edizione: ottobre 2022

Ristampa: **prima tiratura**

5 4 3 2 1 2022 2023 2024 2025 2026

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra loro. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a: CEA – Casa Editrice Ambrosiana
viale Romagna 5, 20089 Rozzano (MI)
fax 02 52202260 e-mail: **segreteria_cea@ceaedizioni.it**

Stampa:

per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Indice generale

Prefazione **v**

1 Cinematica **1**
1.1 Moti rettilinei e moto del proiettile 1
1.2 Moti relativi e altri moti 15
1.3 Sistemi di riferimento sulla superficie di una sfera 19

2 Dinamica del punto materiale **23**
2.1 Proiettili e piani inclinati 23
2.2 Moti vari 34
2.3 Molle, cunei e piattaforme 44
2.4 Guide di forma varia 59

3 Dinamica dei sistemi di punti materiali **81**
3.1 Urti, molle e scivoli 81
3.2 Molle e lastre 105
3.3 Piani inclinati e cunei 111
3.4 Sistemi a massa variabile 116

4 Moto in campi gravitazionali **121**
4.1 Proiettili e satelliti 121
4.2 Terra, Luna, Giove e Sole 142
4.3 Sistema solare, stelle e galassie 149

5 Dinamica dei corpi rigidi **153**
5.1 Corpi rigidi in rotazione 153
5.2 Pulegge e molle 168
5.3 Rototraslazione e rotolamento di corpi rigidi 178
5.4 Urti tra punti materiali e corpi rigidi 239
5.5 Ancora su barrette che cadono e ruotano 261

6 Equilibrio e oscillazioni meccaniche **271**
6.1 Sistemi meccanici in equilibrio 271
6.2 Equilibrio e oscillazioni armoniche di sistemi meccanici 278

7 Statica e dinamica dei fluidi **305**
7.1 Fluidi in quiete 305
7.2 Corpi galleggianti e oscillanti 312
7.3 Fluidi in moto 320

 © 978-88-08-32016-2

8 Termologia e termodinamica **333**
8.1 Termologia e cambiamenti di stato 333
8.2 Teoria cinetica dei gas 347
8.3 Trasformazioni termodinamiche 351
8.4 Cicli termodinamici e macchine termiche 382

A Gravitazione e il problema dei due corpi **416**
A.1 Il problema dei due corpi 416
A.2 Quantità conservate ed equazione del moto 417
A.3 Soluzione generale e orbite ellittiche 417

B Elementi di matematica e notazione fisica **419**
B.1 Elementi di matematica 419
B.2 Grandezze scalari e vettoriali 422

C Unità di misura e costanti fisiche **424**

Prefazione

In questo libro sono raccolti molti dei problemi che nel corso delle ultime due decadi sono stati oggetto delle prove d'esame dei corsi di Fisica generale I delle lauree triennali in Ingegneria gestionale e meccanica (e in parte anche in Ingegneria Elettronica) dell'Università degli Studi di Udine. Il testo è quindi *principalmente* rivolto agli studenti del primo anno di Ingegneria. Tuttavia, data la grande varietà dei problemi presenti nella raccolta e dei temi trattati, oltre che per i metodi risolutivi utilizzati, riteniamo che il libro possa essere di interesse e stimolo anche per gli studenti del primo anno delle lauree triennali in Fisica e Matematica.

Preparando questa seconda edizione si è proceduto sia a un'attenta rilettura dei testi e delle soluzioni dei problemi della prima edizione, sia a una integrazione e (in qualche caso) sostituzione con nuovi esercizi. Allo stesso tempo, si è cercato di rendere le soluzioni più chiare e complete, migliorando e ampliando le spiegazioni fornendo, quando ritenuto utile, vie e metodi alternativi di risoluzione. Come in precedenza gran parte dei problemi presentati sono originali, altri traggono ispirazione da contenuti proposti in altri testi o da rivisitazioni di problemi classici, in altri ancora si è cercato di proporre e sviluppare particolari argomenti.

Il libro è suddiviso in otto capitoli ognuno dei quali raccoglie problemi riguardanti contesti e temi relativamente omogenei fra loro. Le sezioni presenti in ogni capitolo raggruppano gli esercizi in base alla tipologia delle situazioni e alle caratteristiche dei sistemi e dei fenomeni considerati; l'ordine in cui i problemi sono presentati in ogni sezione segue solo parzialmente il grado di difficoltà degli stessi. Il libro è corredato anche da tre appendici: nella prima viene riportata una breve trattazione del *problema dei due corpi* necessario per lo sviluppo di alcuni esercizi sulla gravitazione; le altre due riguardano le notazioni utilizzate, un piccolo compendio di *formule matematiche* e di relazioni tra le grandezze fisiche, tabelle di *unità di misura* e valori di *costanti e quantità fisiche* utili per la risoluzione dei problemi.

Nel suo complesso l'opera vuole costituire uno strumento attraverso il quale chi studia possa sia cimentarsi nella risoluzione di problemi di meccanica e termodinamica sia trovare delle soluzioni ben articolate in cui viene esposto anche il ragionamento utilizzato. L'ampia gamma di situazioni trattate (considerevolmente aumentata rispetto alla I edizione) garantisce la possibilità di allargare la propria preparazione approfondendo anche diverse metodologie di approccio. Dando per scontato che il presente libro affianchi un buon testo di base, non sono incluse introduzioni teoriche ai vari argomenti. La terminologia utilizzata nelle soluzioni dei problemi in relazione a leggi e teoremi è in linea con quella adottata nella maggior parte dei testi di fisica.

Nota per chi studia – Quali sono le conoscenze e le abilità necessarie per poter affrontare nel modo giusto la risoluzione di problemi di fisica? La risposta potrebbe sembrare ovvia, ma l'esperienza di molti anni di insegnamento ci ha dimostrato che una frazione rilevante di studenti che affrontano il primo anno di università non ha spesso raggiunto la maturità necessaria a gestire al meglio tale sfida.

È ovvio che in tale impresa lo studio della fisica e delle sue leggi riveste un ruolo centrale. Vogliamo però rimarcare il fatto che non tutti gli studenti affrontano la materia nel modo più opportuno; nel suo studio viene spesso utilizzato un approccio superficiale e approssimativo in cui i concetti e le leggi fisiche non vengono assimilati e compresi appieno. Tale metodo oltre a essere poco produttivo (anche in vista dello studio di altri corsi di fisica o fisica applicata) è altamente inappropriato per affrontare la risoluzione dei problemi. Le altre conoscenze riguardano la matematica: sarà importante avere una buona padronanza della matematica elementare (algebra, geometria, trigonometria) e del calcolo differenziale e integrale.

 © 978-88-08-32016-2

Ma tali competenze possono non essere sufficienti se non vengono affiancate con una buona capacità di inquadrare e modellare le situazioni prospettate. Infatti, prima ancora di fare le appropriate considerazioni fisiche, scrivere le equazioni del moto o fare calcoli, la situazione oggetto del problema in esame deve essere inquadrata, compresa, tradotta in modello. È necessario cioè, sulla base dell'esperienza acquisita tramite l'osservazione del mondo reale (magari) filtrata dalle conoscenze fisiche, farsi un'idea, anche qualitativa, su come funzionano le cose. Solo dopo essersi costruiti tale modello si potrà procedere con la formalizzazione e la scrittura delle equazioni e delle relazioni che derivano dall'applicazione delle appropriate leggi fisiche.

Oltre a tutto questo un'altra cosa molto utile nella risoluzione del problemi è che si segua un certo ordine nell'impostazione e nell'elaborazione dei calcoli; ciò permette spesso di evitare errori o di individuarli più facilmente. A tale scopo può aiutare anche il controllo della consistenza dimensionale delle formule: anche se tale verifica non è di per sé sufficiente a garantire l'esattezza del procedimento, essa può facilitare notevolmente l'individuazione di sviste ed errori. Una volta impostato un problema, lo si svolga fino in fondo senza ricorrere ai dati numerici; questi verranno inseriti solo una volta completati i passaggi matematici tenendo ben presenti le unità di misura di ogni grandezza. Ricordare anche che i valori numerici finali delle grandezze ottenute vanno espresse con le giuste cifre significative (si veda a fine Appendice B) esplicitando anche le corrispondenti unità di misura.

Nella fase di preparazione all'esame è bene che lo studente cerchi di risolvere i problemi (o perlomeno una parte di essi) per proprio conto, evitando di ricorrere immediatamente alla soluzione proposta nel libro. Anche se il risultato finale è unico, il metodo di risoluzione può non esserlo: sforzandosi di arrivare alla soluzione in autonomia, avrà modo di acquisire più sicurezza in se stesso e di sviluppare anche un metodo di approccio personale. In ogni caso, l'analisi della soluzione proposta dal libro deve essere fatta in modo critico cercando di comprendere e metabolizzare il metodo e le spiegazioni indicate.

Ringraziamenti

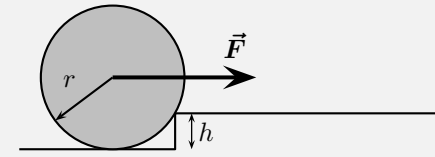
Un sentito ringraziamento va al prof. Carlo del Papa coautore nonché promotore della prima edizione di questa raccolta di problemi; questa seconda edizione contiene parte dei suoi esercizi. Ringraziamo anche i vari colleghi e gli studenti che nel corso degli anni ci hanno segnalato refusi ed errori numerici presenti nei testi e nelle soluzioni dei problemi della prima edizione; tra questi, si ringrazia in particolare L. Tollot.

6 Equilibrio e oscillazioni meccaniche

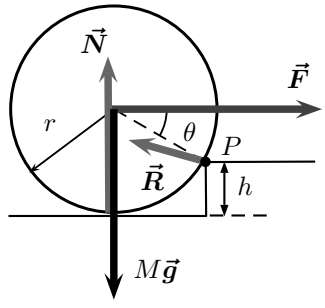
I problemi inclusi in questo capitolo riguardano l'equilibrio e le oscillazioni di vari sistemi meccanici; viene analizzato cioè il comportamento dei sistemi nelle vicinanze della configurazione di equilibrio stabile. A meno di indicazioni specifiche (dipendenti dalla situazione) le oscillazioni studiate sono di tipo armonico. Altri problemi sulle oscillazioni di corpi galleggianti e fluidi in moto possono essere trovati nel Capitolo 7

6.1 SISTEMI MECCANICI IN EQUILIBRIO

PROBLEMA 6.1 Un cilindro omogeneo di raggio $r = 20.0\,\text{cm}$ e massa $M = 10.0\,\text{kg}$ è tirato da una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ orizzontale applicata al suo centro di massa e poggia su un gradino (*vedi* figura) di altezza $h = 10.0\,\text{cm}$.
Considerando il cilindro nella posizione indicata in figura, determinare i valori del modulo di $\vec{\boldsymbol{F}}$ entro i quali il cilindro rimane in equilibro statico.



Prima di tutto si noti che il cilindro, dato che poggia su una superficie rigida orizzontale, in assenza della forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ sarebbe già in equilibrio indifferente. Agendo con una $\vec{\boldsymbol{F}}$ non nulla (nella direzione indicata), tale equilibrio potrebbe essere messo in forse solo se l'azione della forza fosse tale da fargli *scalare* il gradino. Quindi, per rispondere alla domanda, dobbiamo valutare fino a quale valore di F (modulo di $\vec{\boldsymbol{F}}$) tale scalata non sarà possibile.



A tal fine è utile analizzare il diagramma delle forze riportato nella figura qui a lato (dove è stato indicato con P il punto di contatto del cilindro con il gradino). Le forze agenti sul cilindro sono la forza di gravità $M\vec{\boldsymbol{g}}$ e la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$, entrambe applicate al suo centro di massa, la reazione normale $\vec{\boldsymbol{N}}$ del piano di appoggio, la reazione del gradino $\vec{\boldsymbol{R}}$ applicata in P. Pensando il cilindro in equilibrio statico, la risultante delle forze e quella dei momenti (li calcoliamo rispetto a P) dovranno essere nulle. Pertanto, decomponendo le forze sui classici assi x e y ed essendo tutti i momenti perpendicolari al piano della figura (prendiamo il momento di $\vec{\boldsymbol{F}}$ come positivo), possiamo scrivere le seguenti

$$\begin{cases} 0 = F - R_x \\ 0 = N - Mg + R_y \\ 0 = rN\cos\theta - rMg\cos\theta + rF\sin\theta \end{cases} . \tag{1}$$

Dalla prima vediamo che $R_x = F$, mentre dalla seconda abbiamo

$$N = mg - R_y.$$

Inserendo quest'ultima nella terza equazione del sistema (1) arriviamo alla seguente

$$-R_y\cos\theta + F\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_y = F\tan\theta,$$

e quindi alla

$$N = Mg - F\tan\theta.$$

Come vediamo, da questa relazione segue che il modulo della reazione normale N diminuisce all'aumentare del modulo di $\vec{\boldsymbol{F}}$ e per

$$F = F_{max} = \frac{Mg}{\tan\theta},$$

si annulla. Ovviamente l'azzerarsi di N sta a significare che il cilindro non grava più sul piano e che per $F > F_{max}$ il cilindro si solleverà. Pertanto la condizione di equilibrio corrisponderà alla seguente

$$0 \leqslant F \leqslant F_{max}.$$

Osservando che è

$$\sin\theta = \frac{r-h}{r}; \qquad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{r-h}{r}\right)^2} = \frac{1}{r}\sqrt{(2r-h)h},$$

e quindi

$$\tan\theta = \frac{r-h}{\sqrt{(2r-h)h}},$$

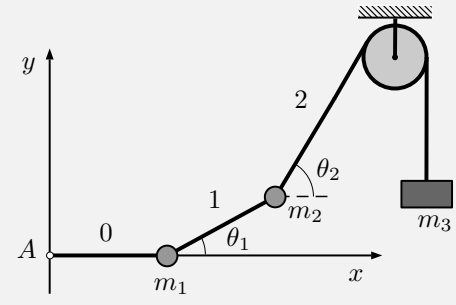
si ottiene

$$F_{max} = \frac{\sqrt{(2r-h)h}}{r-h}Mg = 170\,\mathrm{N}.$$

Si noti anche che, quando è $F = F_{max}$, le componenti della reazione del gradino sono

$$R_x = F_{max} = \frac{\sqrt{(2r-h)h}}{r-h}Mg = 170\,\mathrm{N}; \qquad R_y = Mg = 98.1\,\mathrm{N}.$$

PROBLEMA 6.2 L'estremo sinistro di una corda ideale (inestensibile e di massa trascurabile) è agganciato al punto fisso A (coincidente con l'origine degli assi). All'altro estremo, dopo che è stato fatto passare su una puleggia (libera di ruotare intorno a un asse per il suo centro), è agganciato un corpo di massa m_3 (*vedi* figura). Lungo la corda (a uguali distanze) sono fissati due corpi puntiformi di massa $m_1 = 1.50\,\mathrm{kg}$ e m_2. Il sistema è in equilibrio statico e in tali condizioni (come indicato in figura) il tratto 0 della corda è orizzontale, mentre i tratti 1 e 2 formano gli angoli $\theta_1 = 30.0°$ e $\theta_2 = 60.0°$ con l'orizzontale. Trattando i corpi 1 e 2 come oggetti puntiformi, determinare:



a) le tensioni T_0, T_1 e T_2 dei corrispondenti tratti di corda;
b) il valore di m_2;
c) modulo, direzione e verso della reazione del punto fisso A;
d) il valore di m_3.

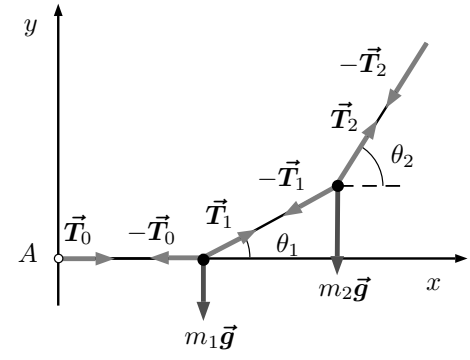
Analizziamo dapprima l'equilibrio della corda alla sinistra della puleggia. I tratti di corda 0, 1 e 2 sono tesi e quindi ognuno di essi determinerà agli estremi due forze uguali e opposte aventi modulo pari alla propria tensione: la situazione è schematizzata nella figura a pagina seguente, dove, per il tratto i-esimo di corda, abbiamo denominato le suddette forze $\vec{\boldsymbol{T}}_i$ (estremo sinistro) e $-\vec{\boldsymbol{T}}_i$ (estremo destro).

Quindi l'equilibrio dei corpi 1 e 2 comporta la validità delle seguenti relazioni

$$-\vec{\boldsymbol{T}}_0+\vec{\boldsymbol{T}}_1+m_1\vec{\boldsymbol{g}}=0; \qquad -\vec{\boldsymbol{T}}_1+\vec{\boldsymbol{T}}_2+m_2\vec{\boldsymbol{g}}=0,$$

che, decomposte lungo gli assi, portano alle seguenti

$$\begin{cases} -T_0+T_1\cos\theta_1=0 \\ T_1\sin\theta_1-m_1g=0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} -T_1\cos\theta_1+T_2\cos\theta_2=0 \\ -T_1\sin\theta_1+T_2\sin\theta_2-m_2g=0 \end{cases}. \tag{1}$$



Dalle prime due equazioni della (1) si ha

$$T_1=\frac{m_1g}{\sin\theta_1}=2m_1g=29.4\,\mathrm{N}; \qquad T_0=T_1\cos\theta_1=\frac{m_1g}{\tan\theta_1}=\sqrt{3}m_1g=25.5\,\mathrm{N}.$$

Conseguentemente, dalle altre equazioni della (1) si ricava

$$T_2=T_1\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=\frac{m_1g}{\tan\theta_1\cos\theta_2}=2\sqrt{3}m_1g=51.0\ \mathrm{N},$$

e

$$m_2=\frac{1}{g}\left(T_2\sin\theta_2-T_1\sin\theta_1\right)=\left(\frac{\sin\theta_1}{\tan\theta_1\cos\theta_2}-1\right)m_1$$
$$\Rightarrow \qquad m_2=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1\right)m_1=2m_1=3.00\,\mathrm{kg}.$$

Dato che su A agisce la forza $\vec{\boldsymbol{T}}_0$, si capisce che (essendo A in quiete) la reazione di tale punto deve essere uguale e opposta. Pertanto, la reazione $\vec{\boldsymbol{R}}_A$ avrà modulo

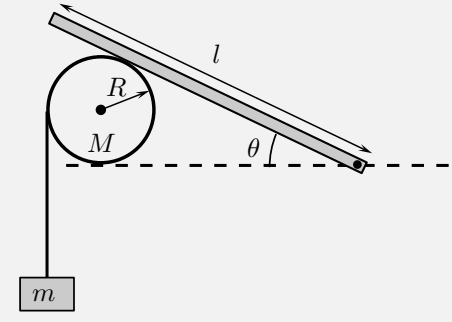
$$R_A=T_0=25.5\,\mathrm{N}$$

e sarà diretta in verso opposto all'asse x.

Infine, notando che la puleggia è in quiete e che la tensione del tratto 2 della corda è pari a T_2, allora anche la tensione del tratto di corda che sostiene il corpo 3 deve avere la stessa tensione. Infatti, solo in questo modo il momento risultante delle forze agenti sulla puleggia (determinate dai tratti di corda destro e sinistro) rispetto al suo asse sarà nullo! Dovremo avere quindi

$$m_3g=T_2 \qquad \Rightarrow \qquad m_3=\frac{T_2}{g}=5.20\,\mathrm{kg}.$$

PROBLEMA 6.3 Intorno a una puleggia cilindrica, un cilindro pieno di raggio $R=15.0\,\mathrm{cm}$ e massa $M=10.0\,\mathrm{kg}$, libera di ruotare intorno al suo asse, è avvolta una corda, inestensibile e di massa trascurabile, con appeso a un capo un corpo di massa $m=5.00\,\mathrm{kg}$. Una sbarra omogenea, di lunghezza $l=80.0\,\mathrm{cm}$ e formante un angolo $\theta=30°$ rispetto all'orizzontale, è appoggiata sulla puleggia (*vedi* figura).



Sapendo che l'altro estremo della sbarra è fisso e che nell'appoggio tra sbarra e puleggia si sviluppa un attrito statico con $\mu_s=0.500$, determinare:

a) il minimo valore della massa della sbarra affinché il sistema sia in equilibrio statico.

Se poi la sbarra viene sollevata e la puleggia lasciata libera di ruotare (la corda non slitta), determinare:

b) l'accelerazione con cui scende il corpo appeso.

Se indichiamo con f_s il modulo della forza di attrito che agisce sulla puleggia a causa dell'appoggio della sbarra, la puleggia sarà in equilibrio statico quando il momento risultante delle forze che agiscono su di essa è nullo. Cioè quando

$$RT - Rf_s = 0,$$

dove T è la forza determinata dalla corda (pari alla sua tensione). Se il sistema è in equilibrio statico, allora è $T = mg$ e dalla precedente abbiamo

$$f_s = mg.$$

D'altra parte, l'equilibrio statico della sbarra impone che anche la risultante dei momenti delle forze rispetto al suo estremo fisso sia nulla, e cioè

$$\frac{l}{2} M_s g \cos\theta - hN = 0,$$

dove M_s è la massa della sbarra, N la reazione normale determinata dall'appoggio sulla puleggia e h la distanza del punto di appoggio dal punto fisso. Notando che è $h = R/\tan(\theta/2)$, dalla precedente ricaviamo

$$N = \frac{M_s g l}{2R} \cos\theta \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Ma $f_s \leqslant \mu_s N$ e quindi, dovendo essere $f_s = mg$, otteniamo

$$mg \leqslant \mu_s N \quad \Rightarrow \quad mg \leqslant \mu_s \frac{M_s g l}{2R} \cos\theta \cdot \tan(\theta/2) \quad \Rightarrow \quad M_s \geqslant \frac{2mR}{\mu_s l \cos\theta \tan(\theta/2)}.$$

Sostituendo i valori delle varie grandezze e notando che è

$$\cos(\theta) = \sqrt{3}/2 \quad \text{e} \qquad \tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{7-4\sqrt{3}},$$

si ottiene

$$M_s \geqslant M_{s,min} = \frac{4mR}{\mu_s l \sqrt{3\left(7-4\sqrt{3}\right)}} = 16.2\,\text{kg}.$$

Quando la sbarra viene sollevata, la puleggia è tirata dalla corda a cui è appeso il corpo e prenderà a ruotare in senso antiorario. Applicando le leggi della dinamica (in forma lineare e angolare) al corpo in caduta e alla puleggia, potremo scrivere le seguenti

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ I\alpha = RT \end{cases},$$

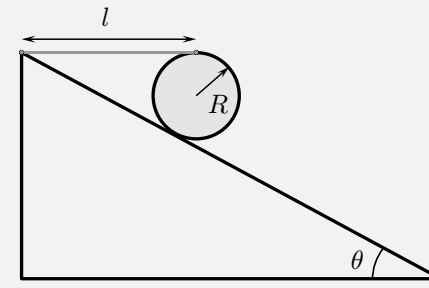
dove a e α sono le accelerazioni lineare e angolare del corpo e della puleggia, $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento d'inerzia della puleggia rispetto al suo asse e T è la tensione della corda (che ora non è più pari al peso del corpo). Quindi, notando che è $\alpha = a/R$ (dato che la corda non slitta) e ricavando T dalla seconda e sostituendo nella prima, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = RT \quad &\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}Ma \\ &\Rightarrow \quad ma = mg - \frac{1}{2}Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2m}{2m+M}g. \end{aligned}$$

Numericamente è

$$a = 0.50 \cdot g = 4.90\,\text{m/s}^2.$$

PROBLEMA 6.4 Un cilindro omogeneo di raggio R poggia su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30.0°$ rispetto all'orizzontale (*vedi* figura). Il cilindro è inizialmente mantenuto in quiete per mezzo di una corda, di lunghezza $l = 50.0\,\text{cm}$, disposta orizzontalmente, con gli estremi fissati alle sommità del piano inclinato e del cilindro stesso (*vedi* figura). Determinare:

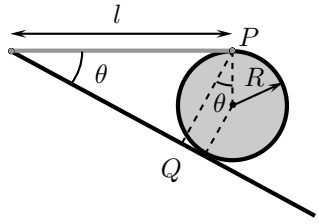


a) il raggio R del cilindro;

b) il minimo valore, $\mu_{s,min}$, che il coefficiente di attrito statico (tra cilindro e piano inclinato) deve avere affinché una tale disposizione sia possibile.

Successivamente, la corda viene tagliata di netto e il cilindro inizia a rotolare senza scivolare lungo il piano inclinato. Supponendo che il piano sia sufficientemente lungo, determinare:

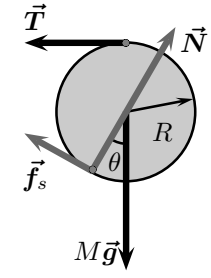
c) la velocità del centro di massa del cilindro esattamente dopo che il cilindro ha compiuto 5 giri completi.



Prima di tutto calcoliamo il raggio del cilindro. Considerando la figura qui a lato, si noti che il segmento PQ, perpendicolare al piano inclinato e che va dalla sommità del cilindro, P, al punto Q sul piano inclinato stesso, ha lunghezza pari a $R+R\cos\theta$. Allo stesso tempo deve essere $\overline{PQ} = l\sin\theta$. Conseguentemente

$$l\sin\theta = R(1+\cos\theta) \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{l\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{l}{2+\sqrt{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right) l = 13.4\,\text{cm}.$$

Se il cilindro è in equilibrio statico, allora le risultanti delle forze (*vedi* il diagramma qui a lato) e dei momenti agenti su di esso devono essere nulle. Calcolando i momenti delle forze rispetto al centro di massa del cilindro e al suo suo punto di contatto con il piano inclinato, otteniamo le seguenti



$$f_s R - TR = 0; \qquad MgR\sin\theta - TR(1+\cos\theta) = 0,$$

dove f_s e T sono la forza di attrito statico (che non fa scivolare il cilindro) e la tensione della corda, mentre M è la massa del cilindro. Da queste si ricava

$$f_s = T = \frac{Mg\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

Bilanciando poi le forze lungo la direzione normale al piano inclinato abbiamo

$$N - Mg\cos\theta - T\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = Mg\cos\theta + T\sin\theta = Mg,$$

dove N è la reazione normale del piano inclinato. Quindi, dato che $f_s \leqslant \mu_s N$, allora dovremo avere

$$\mu_s \geqslant \frac{f_s}{N} \qquad \mu_s \geqslant \mu_{s,min} = \frac{f_s}{N} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 2-\sqrt{3} = 0.268.$$

Quando la corda viene tagliata e il cilindro prende a rotolare (senza scivolare) il suo centro di massa si muove di moto uniformemente accelerato (*vedi* per esempio il Problema **5.30**) con

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+I/MR^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta = \frac{1}{3}g,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il momento d'inerzia del cilindro omogeneo è pari a $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Mentre il cilindro effettua 5 giri completi, il centro di massa percorre una distanza (lungo il piano inclinato) pari a $x = 5 \cdot 2\pi R$. Dovendo essere $x = \frac{1}{2}at^2$, i 5 giri sono effettuati nel tempo $t = \sqrt{2x/a}$. A giri completati la velocità del centro di massa del cilindro sarà pari a

$$v = at = \sqrt{2ax} = \sqrt{\frac{20\pi Rg}{3}} = \sqrt{\frac{20(2-\sqrt{3})\pi lg}{3}} = 5.25\,\mathrm{m/s}.$$

In alternativa, potevamo operare applicando la conservazione dell'energia meccanica. Infatti, notando che, mentre il cilindro compie 5 giri, il suo centro di massa si abbassa di una quota $h = 5 \cdot 2\pi R \sin\theta = 5\pi R$, possiamo scrivere

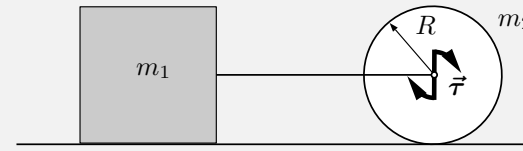
$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = Mgh,$$

dalla quale ricaviamo

$$\frac{3}{4}Mv^2 = Mg \cdot 5\pi R \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{20\pi Rg}{3},$$

analoga a quanto ottenuto sopra.

PROBLEMA 6.5 Su di un piano orizzontale sono posti il corpo 1, di massa $m_1 = 50.0\,\mathrm{kg}$, e un cilindro omogeneo di raggio $R = 20.0\,\mathrm{cm}$ e massa $m_2 = 30.0\,\mathrm{kg}$ (*vedi* figura). Il centro di massa del cilindro e il cubo sono agganciati tramite una corda inestensibile di massa trascurabile. Sull'asse del cilindro può essere applicata una coppia di momento $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ entrante nel piano dell'immagine (*vedi* figura). L'attrito statico e quello dinamico tra entrambi i corpi e il piano di appoggio sono dati dai coefficienti $\mu_s = 0.700$ e $\mu_k = 0.400$. Determinare:



a) il massimo valore del modulo di $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, $\tau_{eq,max}$, entro cui entrambi i corpi rimangono in equilibrio statico;

Supporre poi che venga applicato un $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ di modulo $2\tau_{eq,max}$ e che il risultato sia che i centri di massa dei due corpi rimangono fermi, mentre il cilindro prende a ruotare sul posto.

b) Dimostrare che la situazione prospettata è compatibile con le condizioni imposte dai dati problema.

c) Determinare l'accelerazione angolare del cilindro.

Se entrambi i corpi sono in equilibrio statico, applicando la seconda legge della dinamica nelle forme lineare (a entrambi) e angolare (all'asse del cilindro), potremo scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} 0 = T - f_{s1} \\ 0 = f_{s2} - T \\ 0 = \tau - Rf_{s2} \end{cases}, \tag{1}$$

dove f_{s1} e f_{s2} sono i moduli delle forze di attrito statico sul corpo 1 e sul cilindro, mentre T è il modulo della tensione della corda. Da queste si ottiene

$$\tau = Rf_{s2}; \qquad T = f_{s2}; \qquad f_{s1} = T = f_{s2}.$$

Quindi, tenendo presente che

$$f_{s1} \leqslant \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g = 343\,\mathrm{N}; \qquad f_{s2} \leqslant \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g = 206\,\mathrm{N},$$

si vede immediatamente che l'equilibrio statico sarà possibile fino a che

$$\tau \leqslant \tau_{eq,max} = \mu_s m_2 g R = 41.2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Consideriamo ora il caso in cui all'asse del cilindro è applicata una coppia di momento $\tau = 2\tau_{eq,max} = 2\mu_s m_2 g R = 82.4\,\text{N} \cdot \text{m}$. Se la situazione è quella descritta nel testo del problema, le equazioni del moto dovrebbero corrispondere alle seguenti

$$\begin{cases} 0 = T - f_{s1} \\ 0 = f_{k2} - T = \mu_k m_2 g - T \\ I_{cm}\alpha = \tau - R f_{2k} = 2\tau_{eq,max} - \mu_k m_2 g R \end{cases} . \tag{2}$$

Dalle prime due equazioni delle (2) si ottiene

$$T = \mu_k m_2 g \qquad \Rightarrow \qquad f_{s1} = T = \mu_k m_2 g = 118 \text{ N},$$

che è perfettamente compatibile con la quiete del corpo 1 (essendo $f_{s1} < \mu_s m_1 g = 343$ N)!

Infine, esplicitando l'espressione del momento d'inerzia del cilindro $I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$, dalla terza equazione delle (2) si ottiene

$$\alpha = \frac{4\tau_{eq,max}}{m_2 R^2} - \frac{2\mu_k g}{R} = \frac{4\mu_s m_1 g R}{m_2 R^2} - \frac{2\mu_k g}{R} = \left(\frac{2\mu_s m_1}{m_2} - \mu_k \right) \frac{2g}{R} = 98.1\,\text{rad/s}^2.$$

Si noti che nella situazione in cui si trova il sistema convivono equilibrio e moto: il sistema è in equilibrio traslazionale, ma una parte di esso, il cilindro, è in puro moto rotazionale accelerato.

Anche se ciò va al di là di quanto richiesto dal problema, mostriamo che, ipotizzando il moto dei centri di massa dei due corpi, si arriverebbe a un assurdo. Per esempio, si potrebbe ipotizzare che il cilindro si muova di moto di puro rotolamento trascinando il corpo 1. Le equazioni del moto sarebbero le seguenti

$$\begin{cases} m_1 a = T - f_{1k} \\ m_2 a = f_{2s} - T \\ I_{cm} \dfrac{a}{R} = 2\tau_{eq,max} - R f_{s2} \end{cases} , \tag{3}$$

dove a è l'accelerazione (comune) dei centri di massa dei due corpi e si è già utilizzata la condizione di puro rotolamento $\alpha = a/R$.

Risolvendo la terza equazione delle (3), otteniamo

$$f_{s2} = \frac{2\tau_{eq,max}}{R} - \frac{1}{2} m_2 R^2 \cdot \frac{a}{R^2} = 2\mu_s m_2 g - \frac{1}{2} m_2 a$$

dove si è esplicitato che $I_{cm} = \frac{1}{2} m_2 R^2$. In tali condizioni, se vogliamo che sia $f_{s2} \leqslant f_{s2,max} = \mu_s m_2 g$, dovrebbe essere

$$f_{s2} = 2\mu_s m_2 g - \frac{1}{2} m_2 a \leqslant \mu_s m_2 g \qquad \Rightarrow \qquad a \geqslant 2\mu_s g.$$

Ma, combinando le prime due equazioni di (3) con quest'ultima, si ricava

$$f_{s2} = f_{k1} + (m_1 + m_2) a = \mu_k m_1 g + (m_1 + m_2) a,$$

dalla quale, ponendo $a \geqslant 2\mu_s g$, si ottiene la condizione

$$f_{s2} \geqslant [\mu_k m_1 + 2\mu_s (m_1 + m_2)] g.$$

Ma questo è un assurdo, dato che f_{s2}, come si è già detto, non può mai superare il valore $\mu_s m_2 g$!

Come ultimo controllo si potrebbe supporre che il cilindro slitti trascinando il corpo 1. In tal caso le equazioni del moto sarebbero le seguenti

$$\begin{cases} m_1 a = T - f_{k1} \\ m_2 a = f_{k2} - T \\ I_{cm}\alpha = 2\tau_{eq,max} - R f_{k2} \end{cases} ,$$

dove ora a e α devono essere considerate come indipendenti.

Dalle prime due si otterrebbe

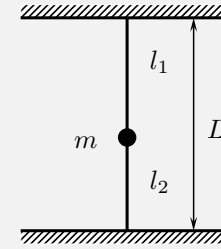
$$(m_1 + m_2)a = f_{k2} - f_{k1} = \mu_k(m_2 - m_1)g \qquad \Rightarrow \qquad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\mu_k g < 0$$

che è, di nuovo, un assurdo: ovviamente, i due corpi non possono accelerare verso sinistra!

6.2 EQUILIBRIO E OSCILLAZIONI ARMONICHE DI SISTEMI MECCANICI

PROBLEMA 6.6 Un corpo puntiforme di massa $m = 2.00\,\text{kg}$, è sospeso tra due pareti orizzontali che si trovano a distanza $L = 1.00\,\text{m}$ l'una dall'altra (*vedi* figura). Il corpo è sospeso per mezzo di due corde elastiche di massa trascurabile, aventi costanti elastiche e lunghezze di riposo pari a $k_1 = 200\,\text{N/m}$, $k_2 = 100\,\text{N/m}$ e $l_{1,0} = l_{2,0} = l_0 = 40.0\,\text{cm}$, rispettivamente. Determinare:

a) le lunghezze l_1 e l_2 (*vedi* figura) delle due corde quando il sistema è in equilibrio statico;
b) la frequenza delle oscillazioni longitudinali (verticali) del corpo di massa m.



All'equilibrio la somma delle forze che agiscono sul corpo di massa m dovrà essere nulla. Quindi, prendendo positive le forze dirette verso l'alto, possiamo scrivere

$$k_1(l_1 - l_0) - k_2(l_2 - l_0) - mg = 0.$$

Da questa, tenendo presente che $l_1 + l_2 = L$, si ricava

$$l_1 = \frac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 L + mg}{k_1 + k_2} = 0.532\,\text{m};$$
$$l_2 = L - l_1 = \frac{k_1 L - (k_1 - k_2)l_0 - mg}{k_1 + k_2} = 0.468\,\text{m}.$$

Se ora immaginiamo di spostare (verticalmente) il corpo dalla sua posizione di riposo di un Δl (positivo se lo spostamento è verso l'alto), la forza che agisce su di esso può essere scritta come segue

$$F = k_1(l_1 - \Delta y - l_0) - k_2(l_2 + \Delta y - l_0) - mg =$$
$$= -(k_1 + k_2)\Delta y + k_1(l_1 - l_0) - k_2(l_2 - l_0) - mg = -(k_1 + k_2)\Delta y.$$

Ma allora la forza netta è di tipo elastico e tutto funziona come se sul corpo agisse una molla di costante elastica $k_1 + k_2$. L'equazione del moto è quindi

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{\mathrm{d}^2(l_2 + \Delta y)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2\Delta y}{\mathrm{d}t^2} = -(k_1 + k_2)\Delta y,$$

e dalla forma di questa equazione si desume immediatamente che la sua soluzione sarà del tipo

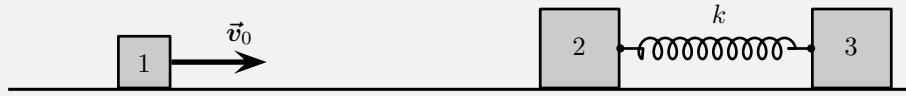
$$\Delta y(t) = \Delta y_{max}\cos(\omega t + \phi),$$

con

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 1.95\,\text{Hz}.$$

PROBLEMA 6.7 Si abbiano i tre corpi mostrati in figura aventi masse $m_1 = m$ e $m_2 = m_3 = 2m$, con $m = 1.0$ kg. I corpi sono appoggiati su un piano orizzontale e possono scivolare su di esso con attrito trascurabile. I corpi 2 e 3 sono agganciati agli estremi di una molla di massa trascurabile e di costante elastica $k = 200$ N/cm, e sono inizialmente in quiete; invece, il corpo 1 è lanciato verso il corpo 2 con una velocità $v_0 = 6.00$ m/s (*vedi* figura).
Supponendo che l'urto tra i corpi 1 e 2 sia perfettamente anelastico, stabilire quale tipo di moto segue il sistema dopo l'urto, calcolando:

a) l'energia persa nell'urto;
b) la velocità del centro di massa del sistema;
c) la massima compressione della molla negli istanti successivi all'urto;
d) la frequenza con cui il sistema oscilla intorno al suo centro di massa.



Data l'assenza di attriti, la molla è inizialmente a riposo e quindi i corpi 2 e 3 non risentono di forze orizzontali. Nell'urto del corpo 1 con il 2 si conserva la quantità di moto e conseguentemente possiamo scrivere

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_{12} \quad \Rightarrow \quad m v_0 = 3 m v_{12} \quad \Rightarrow \quad v_{12} = \frac{m}{3m} v_0 = \frac{v_0}{3},$$

dove v_{12} è la velocità del corpo unione tra 1 e 2 (determinata dalla perfetta anelasticità dell'urto). La conseguente perdita di energia è quindi pari alla differenza tra i valori iniziale e finale dell'energia cinetica dei corpi 1 e 2, corrispondente a

$$W = K_i - K_f = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12}^2 = \frac{1}{2}\left[m v_0^2 - 3m \frac{v_0^2}{9} \right] = \frac{1}{3} m v_0^2 = 12.0\,\text{J}.$$

Negli istanti successivi all'urto il sistema si muove verso destra e durante tale movimento la distanza tra i due corpi (1+2 a sinistra e 3 a destra) cambierà; al passare del tempo la molla si comprimerà e si riallungherà, e il sistema effettuerà delle oscillazioni intorno al suo centro di massa. Tuttavia, le forze che la molla esercita sui due corpi sono forze interne al sistema e quindi la sua quantità di moto deve rimanere costante e uguale a quella iniziale. Perciò

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_{12} = (m_1 + m_2 + m_3) v_{cm} \quad \Rightarrow \quad v_{cm} = \frac{m}{5m} v_0 = \frac{1}{5} v_0 = 1.20\,\text{m/s}.$$

Nel moto del sistema dopo l'urto, dato che la forza elastica è una forza conservativa, l'energia meccanica si conserva. Nell'istante immediatamente successivo all'urto l'energia meccanica del sistema è tutta cinetica e pari a $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12}^2 = \frac{1}{6} m v_0^2$. Invece, nell'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione, i due corpi (1+2 a sinistra e 3 a destra) devono avere una velocità identica a quella del centro di massa (nel sistema del centro di massa essi saranno fermi!) e quindi l'energia cinetica del sistema sarà $\frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3) v_{cm}^2 = \frac{1}{2} 5m \frac{v_0^2}{25} = \frac{1}{10} m v_0^2$. Pertanto, dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava

$$\frac{1}{6} m v_0^2 = \frac{1}{10} m v_0^2 + \frac{1}{2} k \Delta x_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad k \Delta x_{max}^2 = \frac{2}{15} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{max} = \sqrt{\frac{2 m v_0^2}{15 k}} = 1.55\ \text{cm}.$$

Occupiamoci ora dell'oscillazione e per farlo generalizziamo la situazione a un sistema costituito da due corpi, uno di massa M_1 (quello di sinistra) e l'altro di massa M_2 (quello di destra), connessi da una molla di costante elastica k, e poniamoci in un sistema con l'asse x avente l'origine coincidente con il centro di massa del sistema. Si noti che, come nel caso del problema, il centro di massa si

muove di moto uniforme e quindi il sistema scelto è inerziale. Se con x_1 e x_2 indichiamo le ascisse istantanee dei due corpi, in tale sistema dovrà essere

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{M_2}{M_1} x_2 \quad \text{e anche} \quad v_1 = -\frac{M_2}{M_1} v_2,$$

dove l'ultima si è ottenuta derivando rispetto al tempo. Da queste si vede che le coordinate e le velocità dei due corpi sono opposte e quelle del corpo più *massiccio* sono tanto più piccole quanto più grande è la sua massa. Quindi, nell'oscillazione il corpo più massiccio si muove in sincronia con l'altro, ma i suoi spostamenti sono più piccoli e più lenti.

Applicando la conservazione dell'energia meccanica, si ha

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - l_0)^2 = \text{cost.} \,,$$

dove l_0 è la lunghezza di riposo della molla. Sostituendo le precedenti e indicando con x_{10} e x_{20} le ascisse di riposo dei corpi (per le quali dovrà essere $x_{20} - x_{10} = l_0$ e $x_{10} = -(M_2/M_1) x_{20}$), si ottiene

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{M_1} + 1 \right) M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right)^2 (x_2 - x_{20})^2 = \text{cost.} \,,$$

dalla quale, semplificando e moltiplicando per M_1, si ricava la seguente

$$\frac{1}{2} M_1 M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k \left(M_1 + M_2 \right) (x_2 - x_{20})^2 = \text{cost.}$$

Infine, derivando rispetto al tempo e ricordando che $\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}$, si ha

$$M_1 M_2 v_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + k \left(M_1 + M_2 \right) (x_2 - x_{20}) \underbrace{\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}}_{=v_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k \left[\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \right] (x_2 - x_{20}).$$

Come si vede, x_2 (e sarebbe lo stesso per x_1) soddisfa un'equazione analoga a quella delle oscillazioni armoniche. I corpi oscillano quindi con la pulsazione e la frequenza seguenti

$$\omega^2 = k \left[\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \right] = \frac{k}{\mu} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

dove abbiamo introdotto la **massa ridotta** del sistema, pari a $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$.

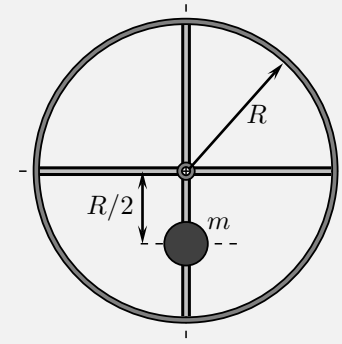
Come si vede, anche se i due corpi avessero masse uguali, la pulsazione e la frequenza di oscillazione sarebbero diverse da quelle ottenute nel caso del sistema massa-molla con uno degli estremi della molla ancorato a un punto fisso. In effetti, tale situazione corrisponde al caso appena studiato nel limite, per esempio, di $M_1 \gg M_2$, nel qual caso $\mu \to M_2$ e la pulsazione assume il valore conosciuto!

Tornando al caso del problema, in base a quanto ottenuto, si ha

$$\mu = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{6m^2}{5m} = \frac{6}{5} m \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5k}{6m}} = 20.5 \,\text{Hz}.$$

PROBLEMA 6.17 Un anello (sottile), di raggio $R = 30.0\,\text{cm}$ e massa $M = 1.50\,\text{kg}$, è dotato di quattro razze (di massa trascurabile) che gli permettono di ruotare liberamente (attriti trascurabili) intorno al suo asse disposto orizzontalmente (*vedi* figura). Su una delle razze, a una distanza $R/2$ dall'asse dell'anello, è posta una massa puntiforme $m = 1.00\,\text{kg}$.
Determinare:

a) la distanza (dall'asse dell'anello) del centro di massa del sistema;
b) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse dell'anello;
c) la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema intorno alla posizione di equilibrio indicata in figura.



Per simmetria il centro di massa dell'anello si trova sul suo asse. Quindi, il centro di massa del sistema si trova alla distanza

$$d_{cm} = \frac{M \cdot 0 + m(R/2)}{M + m} = \frac{mR}{2(M + m)} = 6.00\,\text{cm}$$

dall'asse dell'anello.

Il momento d'inerzia richiesto è pari alla somma dei momenti d'inerzia dell'anello e della massa m calcolati rispetto all'asse dell'anello. Ovviamente è

$$I = MR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(M + \frac{m}{4}\right)R^2 = 0.157\,\text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Se il sistema viene ruotato di un piccolo angolo θ_0 rispetto alla situazione di figura (corrispondente alla configurazione di equilibrio stabile), quando viene lasciato andare prenderà a oscillare. Indicando con θ l'angolo istantaneo rispetto alla verticale e applicando la seconda legge della dinamica in forma angolare, possiamo scrivere

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \tau(\theta) = -(M + m)d_{cm}\sin\theta = -\frac{mgR}{2}\sin\theta,$$

dove τ è il momento della forza gravitazionale che agisce sul sistema.

Nel caso di piccole oscillazioni la precedente equazione si riduce alla seguente

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{mgR}{2}\sin\theta$$
$$\Rightarrow \quad I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mgR}{2}\cdot\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mgR}{2I}\cdot\theta = -\frac{2mg}{(4M + m)R}\cdot\theta,$$

che è un'equazione analoga a quella delle oscillazioni armoniche. Quindi la sua soluzione sarà del tipo

$$\theta(t) = \theta_0\cos\omega t,$$

dove la pulsazione deve corrispondere a

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg}{(4M + m)R}}.$$

Pertanto, la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema sarà pari a

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2mg}{(4M + m)R}} = 0.486\,\text{Hz}.$$

PROBLEMA 6.18 Vengono considerate due sbarre rigide sottili fatte dello stesso materiale. Le sbarre hanno lunghezze L_1 e $L_2 = \frac{1}{2}L_1$ e sezioni quadrate di lato a_1 e $a_2 = \frac{1}{2}a_1$. Supponendo che le sbarre vengano appese per un estremo e detti T_1 e T_2 i rispettivi periodi delle piccole oscillazioni intorno alla loro configurazione di equilibrio:

a) determinare le espressioni di T_1 e T_2;
b) calcolare il rapporto T_1/T_2;
c) dire, giustificando la risposta, se il rapporto T_1/T_2 sarebbe diverso in caso di oscillazioni non piccole (oscillazioni non armoniche!).

Il moto oscillatorio delle due sbarre è determinato dall'equazione che segue dall'applicazione della 2ª legge della dinamica in forma angolare. Se m, L e I indicano massa, lunghezza e momento d'inerzia di una sbarra, l'equazione del moto è la seguente

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}mgL\sin\theta,$$

dove θ è l'angolo con la verticale e ω è la velocità angolare (istantanea) della sbarra. Tenendo poi conto del fatto che il momento d'inerzia I di una sbarra sottile calcolato rispetto a un asse passante per un suo estremo è pari a $I = \frac{1}{3}mL^2$, l'equazione diventa

$$\frac{1}{3}mL^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}mgL\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3g}{2L}\sin\theta,$$

che in caso di piccole oscillazioni si riduce alla seguente

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3g}{2L}\theta.$$

Tale equazione determina oscillazioni armoniche di equazione, pulsazione e periodo

$$\theta(t) = \theta_0\cos\omega_0 t; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Perciò, per i periodi di oscillazione delle nostre sbarre possiamo scrivere

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2L_1}{3g}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2L_2}{3g}}; \qquad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{2}.$$

Come si vede, il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni e quindi le oscillazioni si possono dire isocrone!

Nel caso di oscillazioni di ampiezza qualsiasi (non piccola), non possiamo fare l'approssimazione armonica e i periodi di oscillazione dipendono dall'ampiezza di oscillazione: le oscillazioni non sono più isocrone. Tuttavia, osservando le equazioni del moto, si può facilmente vedere che a parità di ampiezza (angolare), il rapporto T_1/T_2 rimane identico a quello ottenuto per le piccole oscillazioni.

Per rendercene conto, sfruttando la seguente

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\omega = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\omega^2),$$

possiamo vedere che l'equazione del moto può essere così trasformata

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{3g}{2L}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\omega^2) = -\frac{3g}{L}\sin\theta.$$

Conseguentemente, passando all'integrazione si ottiene la seguente

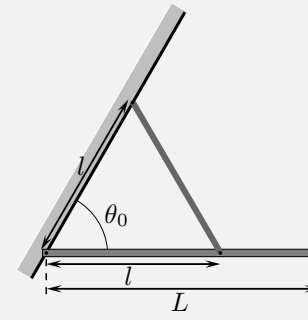
$$\mathrm{d}(\omega^2) = -\frac{3g}{L}\sin\theta\mathrm{d}\theta \quad \Rightarrow \quad \omega^2(\theta) = \frac{3g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$
$$\Rightarrow \quad \omega(\theta) = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Dall'ultima relazione si vede che, a parità di ampiezza di oscillazione (θ_0), la velocità angolare ω (a parte la dipendenza angolare) è inversamente proporzionale a $\sqrt{L}$. Corrispondentemente, anche se la sua espressione è difficile da calcolare,[4] il periodo dell'oscillazione sarà proporzionale a $\sqrt{L}$. Da questo si capisce immediatamente che (a parità di ampiezza di oscillazione) il rapporto tra i periodi rimarrà pari a $\sqrt{L_1/L_2} = \sqrt{2}$.

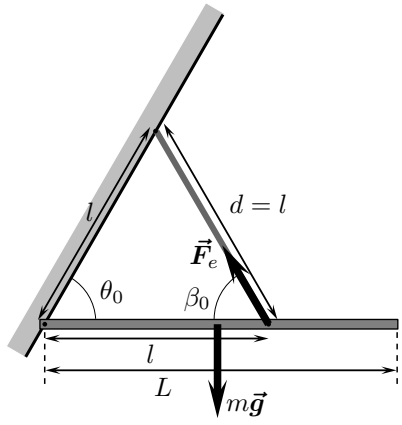
PROBLEMA 6.19 Una sbarra sottile, di lunghezza $L = 100\,\text{cm}$ e massa $m = 5.00\,\text{kg}$, è incernierata a una parete obliqua (*vedi* figura) e può ruotare liberamente intorno a tale cerniera mantenendosi in un piano verticale. A un punto della sbarra, a distanza $l = 70\,\text{cm}$ dalla cerniera, è agganciata una corda elastica ideale di costante elastica $k = 800\,\text{N/m}$. L'altro estremo della corda è ancorato alla parete obliqua sempre a una distanza l dalla cerniera. Come mostra la figura, la sbarra è in equilibrio statico quando è disposta orizzontalmente. Sapendo che in tale situazione è $\theta_0 = 60.0°$, determinare:

a) la lunghezza a riposo della corda elastica;

b) la frequenza delle piccole oscillazioni della sbarra intorno alla sua posizione di equilibrio.



Se la situazione riportata in figura delinea la situazione di equilibrio della sbarra, essendo $\theta_0 = 60°$ allora anche la lunghezza della corda elastica sarà pari a l e l'angolo β_0 tra corda e sbarra (*vedi* figura a lato) è pari a $\beta_0 = \frac{1}{2}(\pi - \theta_0) = \pi/3$. Essendo la sbarra in equilibrio, il momento risultante delle forze applicate calcolato rispetto alla cerniera deve essere nullo. Perciò possiamo scrivere (*vedi* figura a lato)



$$\tau = \frac{L}{2}mg - lF_e \sin\beta_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_e = \frac{mgL}{\sqrt{3}l};$$

$\vec{F}_e$ è la forza elastica determinata dalla corda, che potremo esprimere come $F_e = k\Delta x_0$ con $\Delta x_0 = d - d_0$ pari all'allungamento della corda. Quindi

$$\Delta x_0 = \frac{mgL}{\sqrt{3}kl} = 5.06\,\text{cm} \qquad \Rightarrow \qquad d_0 = d - \Delta x_0 = l - \Delta x_0 = 64.9\,\text{cm},$$

dove d_0 è la lunghezza a riposo della corda elastica.

Ora, se supponiamo di cambiare l'angolo tra sbarra e parete portandolo da θ_0 a $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ per un $\Delta\theta$ qualsiasi (anche in segno), l'angolo tra corda e sbarra e la lunghezza della corda diventano

$$\beta = \frac{\pi - \theta}{2} = \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}; \qquad d = 2l\cos\beta = 2l\cos\left(\theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

e quindi il momento complessivo delle forze gravitazionale ed elastica sarà dato dalla seguente

$$\tau(\Delta\theta) = \frac{L}{2}mg\cos(\Delta\theta) - lk(d - d_0)\sin(\theta_0 - \Delta\theta/2).$$

[4] In effetti, notando che $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, separando le variabili possiamo scrivere $\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{d}\theta$ e il periodo di oscillazione sarebbe pari al seguente integrale

$$T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\omega(\theta)} = 4\sqrt{\frac{L}{3g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

che non può essere espresso in termini di funzioni elementari.

Nel limite di piccole oscillazioni tale espressione dovrà essere valutata per piccoli valori di $\Delta\theta$. Osservando che in tali condizioni valgono le seguenti

$$\cos(\Delta\theta) \approx 1$$
$$\cos(\theta_0 - \Delta\theta/2) = \cos\theta_0 \cos(\Delta\theta/2) + \sin\theta_0 \sin(\Delta\theta/2) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\Delta\theta}{2}$$
$$\sin(\theta_0 - \Delta\theta/2) = \sin\theta_0 \cos(\Delta\theta/2) - \cos\theta_0 \sin(\Delta\theta/2) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\Delta\theta}{2}$$

l'espressione di τ diventa

$$\tau(\Delta\theta) \approx \tfrac{L}{2}mg - lk\left[2l\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\Delta\theta\right) - l + \Delta x_0\right]\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{4}\Delta\theta\right],$$

dove Δx_0 è l'allungamento della corda all'equilibrio calcolato in precedenza.

Effettuando i prodotti e le semplificazioni, ed eliminando i termini in $\Delta\theta^2$ (infinitesimo di ordine superiore), l'espressione di τ si riduce alla seguente

$$\tau(\Delta\theta) \approx \underbrace{\frac{L}{2}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}lk\Delta x_0}_{=0} - \frac{1}{4}lk(3l - \Delta x_0)\Delta\theta = -\frac{1}{4}lk(3l - \Delta x_0)\Delta\theta,$$

dove la somma dei primi due termini è nulla essendo pari al momento all'equilibrio. Tale espressione di τ poteva essere ricavata anche tramite uno sviluppo in serie di Taylor al prim'ordine in funzione di $\Delta\theta$.

Utilizzando la 2ª legge della dinamica in forma angolare, possiamo scrivere l'equazione del moto della sbarra. Ricordando che il suo momento d'inerzia (rispetto alla cerniera) è pari a $I = \frac{1}{3}mL^2$, possiamo scrivere

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \tau \quad \Rightarrow \quad I\frac{\mathrm{d}^2\Delta\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{4}lk(3l - \Delta x_0)\Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\Delta\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3kl(3l - \Delta x_0)}{4mL^2}\Delta\theta.$$

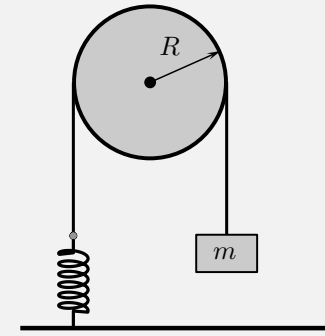
L'ultima equazione ha forma analoga a quella delle oscillazioni armoniche e pertanto il termine a secondo membro moltiplicato per $\Delta\theta$ è pari al quadrato della pulsazione di tali oscillazioni.

Pertanto, la frequenza delle oscillazioni della sbarra è data dalla seguente

$$\omega^2 = \frac{3kl(3l - \Delta x_0)}{4mL^2} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3kl(3l - \Delta x_0)}{4mL^2}} = 2.09\,\mathrm{Hz}.$$

PROBLEMA 6.20 Un cilindro omogeneo di massa $M = 6.00\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 15.0\,\mathrm{cm}$, vincolato a ruotare attorno a un asse orizzontale (con attrito trascurabile), funge da puleggia per una fune ideale che non scivola su di esso. Un'estremità della fune è vincolata a una molla ideale di costante elastica $k = 600\,\mathrm{N/m}$, mentre l'altra sostiene un corpo puntiforme di massa $m = 3.00\,\mathrm{kg}$, come mostrato in figura. Determinare:

a) l'allungamento della molla quando il sistema è in equilibrio statico;
b) il periodo delle oscillazioni che si innescano allontanando il sistema dal suo equilibrio;
c) la velocità massima del corpo oscillante nel caso in cui la massima elongazione del moto sia di $5.00\,\mathrm{cm}$.



In condizione di equilibrio statico il momento risultante sulla puleggia (rispetto al suo asse) deve essere nullo. Quindi, osservando che la tensione T_1 della fune di sinistra (agganciata alla molla) sarà

pari a $k\Delta y_0$ (Δy_0 è il suo allungamento), mentre la tensione T_2 della corda di destra sarà pari al peso del corpo appeso mg, avremo

$$\tau_0 = RT_2 - RT_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad mg = k\Delta y_0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y_0 = \frac{mg}{k} = 4.90\,\text{cm}.$$

In condizioni di non equilibrio, applicando la 2ª legge della dinamica nelle forme angolare e lineare, rispettivamente alla puleggia e al corpo di massa m, possiamo scrivere

$$\begin{cases} I\alpha = \tau = RT_2 - RT_1 \\ ma = mg - T_2 \end{cases},$$

dove $I = \frac{1}{2}MR^2$ e $\alpha = a/R$ sono il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare della puleggia, mentre a è l'accelerazione del corpo.

Osservando che anche in condizioni di non equilibrio è $T_1 = k\Delta y'$ (la molla ha massa trascurabile), allora sostituendo e combinando le equazioni si ottiene la seguente

$$I\alpha = Rmg - Rma - Rk\Delta y' \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}M + m\right) a = mg - k\Delta y'.$$

Ma il $\Delta y'$ a secondo membro può essere scritto come $\Delta y' = \Delta y_0 + \Delta y$ (Δy_0 è l'allungamento all'equilibrio calcolato sopra, mentre Δy è lo spostamento dalla posizione di equilibrio). In questo modo la precedente assume la seguente forma

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right) a = \underbrace{mg - k\Delta y_0}_{=0} - k\Delta y \quad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}M + m\right) a = -k\Delta y,$$

dalla quale possiamo ricavare che l'equazione del moto del corpo appeso è

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\left[\frac{2k}{M + 2m}\right] \Delta y = -\left[\frac{2k}{M + 2m}\right] (y - y_0),$$

dove y_0 è la sua quota di equilibrio. Osservando che tale equazione ha forma analoga a quella del sistema massa-molla, possiamo dire che anche il corpo seguirà delle oscillazioni armoniche. La pulsazione e il periodo di tali oscillazioni saranno pari a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M + 2m}}, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2m}{2k}} = 0.628\,\text{s}.$$

Perciò, l'equazione oraria del moto del corpo di massa m sarà del tipo

$$y(t) = y_0 + \Delta y_{max} \cos \omega_0 t,$$

e, se l'elongazione $\Delta y_{max} = 5.00\,\text{cm}$, allora per la velocità massima del corpo ricaviamo la seguente:

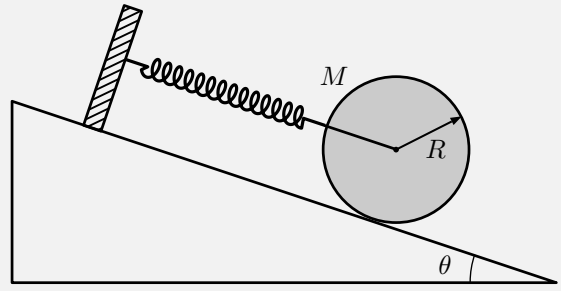
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 \Delta y_{max} \sin \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \omega_0 \Delta y_{max} = \Delta y_{max}\sqrt{\frac{2k}{M + 2m}} = 0.500\,\text{m/s}.$$

 © 978-88-08-32016-2

PROBLEMA 6.21 Una sfera omogenea di massa $M = 30.0\,\text{kg}$ e raggio R è appoggiata su un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ con l'orizzontale. Il centro di massa della sfera è agganciata a uno degli estremi di una molla ideale (di massa trascurabile); l'altro estremo della molla è fissato a un sostegno rigido solidale con il piano inclinato: la molla ha costante elastica $k = 30.0\,\text{N/cm}$.
Supponendo che il piano inclinato presenti un attrito tale da non permettere lo scivolamento della sfera (cioè la sfera rotola senza slittare), calcolare:

a) l'allungamento della molla quando la sfera è in equilibrio statico e il modulo della forza di attrito statico (tra sfera e piano inclinato) presente in tali condizioni;
b) il periodo con cui oscilla la sfera se lasciata andare dalla posizione in cui la molla è a riposo;
c) il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s affinché l'oscillazione della sfera senza scivolamento (di cui al punto b)) possa realizzarsi.

[*Il momento d'inerzia di una sfera omogea rispetto a un asse per il suo centro è* $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$.]



Prendiamo un asse x parallelo al piano inclinato diretto verso il basso con origine coincidente con la posizione del centro di massa della sfera quando la molla è a riposo.

Quando la sfera è in equilibrio statico, il momento delle forze che agiscono su di essa rispetto al suo punto di contatto con il piano inclinato deve essere nullo. Da tale condizione si ottiene

$$MgR\sin\theta - RF_e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_e = Mg\sin\theta = \frac{1}{2}Mg,$$

dove $F_e = k\Delta x$ è il modulo della forza elastica esercitata dalla molla. Quindi l'allungamento della molla, che per la scelta dell'asse x corrisponde all'ascissa del cdm della sfera, è

$$\Delta x_0 = x_{eq} = \frac{Mg}{2k} = 4.90\,\text{cm}.$$

L'equilibrio comporta anche la seguente

$$Mg\sin\theta - F_e - f_s = 0$$

dove f_s è il modulo dell'eventuale forza di attrito statico $\vec{\boldsymbol{f}}_s$ agente sulla sfera da parte del piano inclinato (che si è supposta diretta verso la sommità del piano inclinato). Dal risultato precedente segue che

$$f_s = F_e - Mg\sin\theta = 0,$$

e questo ci dice che non è necessaria nessuna forza di attrito per l'equilibrio della sfera!

Se la sfera viene lasciata andare dalla posizione in cui la molla è a riposo, essa prenderà a effettuare un moto oscillatorio armonico di ampiezza Δx_0 intorno alla posizione di equilibrio. Durante tale movimento, non essendoci dissipazioni, possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica e scrivere la seguente

$$0 = \frac{1}{2}kx^2 - Mgx\sin\theta + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2,$$

dove x individua la posizione istantanea del centro di massa della sfera.

Tenendo presente che la sfera, mentre oscilla, segue un moto di puro rotolamento, si ha $\omega = v_{cm}/R$ e quindi, sostituendo l'espressione di I_{cm}, la precedente diventa

$$\frac{1}{2}kx^2 - Mgx\sin\theta + \frac{7}{10}Mv_{cm}^2 = 0.$$

Derivando rispetto al tempo, ricaviamo l'equazione del moto seguente

$$kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - Mg\sin\theta\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{7}{5}Mv_{cm}\cdot\frac{\mathrm{d}v_{cm}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Essendo $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{cm}$ e $\frac{\mathrm{d}v_{cm}}{\mathrm{d}t} = a_{cm}$, l'equazione precedente diventa

$$\frac{7}{5}Ma_{cm} = -kx + Mg\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{5}Ma_{cm} = -k(x - x_{eq}),$$

dove, nell'ultima espressione, abbiamo fatto la sostituzione $kx_{eq} = Mg\sin\theta$.

Dividendo tutto per $\frac{7}{5}M$, otteniamo la seguente

$$a_{cm} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{5k}{7M}(x - x_{eq}),$$

che ha la forma tipica di quella dei sistemi oscillanti armonicamente. Da tale espressione ricaviamo che la pulsazione e il periodo del moto oscillatorio della sfera sono

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5k}{7M}} \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{7M}{5k}} = 0.743\,\mathrm{s}.$$

La soluzione dell'equazione del moto è

$$x(t) = x_{eq}[1 - \cos(\omega_0 t)] \qquad \Rightarrow \qquad v_{cm}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega_0 x_{eq}\sin(\omega_0 t)$$

da cui si ha

$$a_{cm}(t) = \frac{\mathrm{d}v_{cm}}{\mathrm{d}t} = \omega_0^2 x_{eq}\cos(\omega_0 t),$$

che ci permette di ricavare che il massimo modulo dell'accelerazione del centro di massa durante l'oscillazione della sfera è

$$|a_{cm}|_{max} = \omega_0^2 x_{eq} = \frac{5k}{7M}\frac{Mg}{2k} = \frac{5}{14}g \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{max} = \frac{|a_{cm}|_{max}}{R} = \frac{5}{14}\frac{g}{R}.$$

Applicando la seconda legge della dinamica in forma angolare all'asse passante il centro di massa della sfera, possiamo scrivere che

$$I_{cm}\alpha = Rf_s \qquad \Rightarrow \qquad f_s = \frac{I_{cm}\alpha}{R},$$

e da questa ricaviamo che il massimo modulo della forza di attrito statico durante l'oscillazione è

$$|f_s|_{max} = \frac{I_{cm}\alpha_{max}}{R} = \frac{2}{5}MR^2\frac{5}{14}\frac{g}{R^2} = \frac{1}{7}Mg.$$

Infine, dato che per la forza di attrito statico è $|f_s| \leqslant \mu_s N$, nel nostro caso dovremo avere

$$\mu_s \geqslant \frac{|f_s|_{max}}{N} = \frac{|f_s|_{max}}{Mg\cos\theta} = \frac{1}{7}Mg\cdot\frac{2}{\sqrt{3}Mg} = \frac{2}{7\sqrt{3}} = 0.165.$$

 © 978-88-08-32016-2

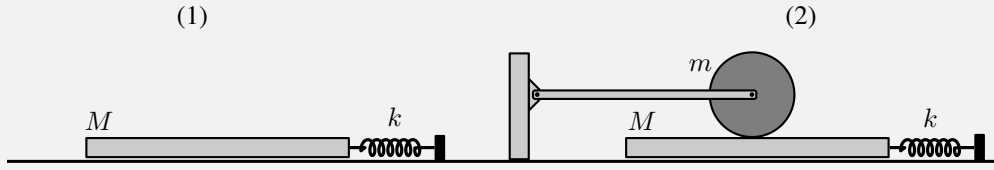
PROBLEMA 6.22 Una lastra, di massa $M = 10.0\,\text{kg}$, che poggia su un piano orizzontale e può scivolare liberamente su di esso con attrito trascurabile, è agganciata a una molla, di costante elastica $k = 395.0\,\text{N/m}$, con l'altro estremo fisso (*vedi* la parte (1) della figura). Ovviamente, se la lastra viene spostata dalla sua posizione di equilibrio di un $\Delta x_0 = 10.0\,\text{cm}$ e lasciata libera da ferma, essa prende a oscillare di moto armonico.

a) Determinare il periodo T_0 di tale oscillazione.

Successivamente sulla lastra viene poggiato un cilindro pieno, di massa $m = 10.0\,\text{kg}$, il cui asse è mantenuto fisso da un braccio (di massa trascurabile) incernierato a una parete verticale fissa (*vedi* la parte (2) della figura). Anche in questo caso, se la lastra viene spostata inizialmente dalla posizione di equilibrio dello stesso Δx_0 e lasciata libera da ferma, essa prenderà a oscillare di moto armonico. Nell'ipotesi che durante tale oscillazione il cilindro rotoli sulla lastra senza mai scivolare, determinare:

b) il nuovo periodo di oscillazione T_1 della lastra;

c) il minimo valore del coefficiente di attrito statico tra lastra e cilindro, $\mu_{s,min}$, affinché il suddetto puro rotolamento sia possibile.



Nella situazione illustrata dalla figura (1) il sistema è assolutamente analogo al sistema massa-molla visto tante volte e, data l'assenza di attrito, le oscillazioni armoniche avranno la pulsazione e il periodo seguenti

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 1.00\ \text{s}.$$

Nella situazione (2), il movimento avanti e indietro della lastra determina anche la rotazione del cilindro e conseguentemente l'oscillazione sarà più lenta. Per determinarne il periodo possiamo procedere, data l'assenza di dissipazioni, utilizzando la conservazione dell'energia meccanica. Confrontando l'istante in cui la lastra viene lasciata libera da ferma (in cui l'energia meccanica coincide con quella potenziale della molla) con un istante generico t, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}k(x_i - x_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

dove x_i e x_0 sono le posizioni iniziale e di equilibrio della lastra, mentre x, v e ω sono la posizione, la velocità lineare della lastra e la velocità angolare del cilindro, tutte all'istante t; I è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse intorno a cui ruota. Tenendo presente che, non essendoci slittamenti, dovrà essere $\omega = v/R$ (dove R è l'ipotetico raggio del cilindro), sostituendo e derivando ambo i membri rispetto al tempo otteniamo:

$$k(x - x_0)\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v} + \left(M + \frac{I}{R^2}\right)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}(x - x_0).$$

L'equazione alla quale siamo giunti ha la stessa forma di quella delle oscillazioni armoniche. Da essa ricaviamo che ora la pulsazione di tale oscillazione è

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}} = \sqrt{\frac{k}{\left(M + \frac{m}{2}\right)}},$$

dove abbiamo sostituito il valore del momento d'inerzia del cilindro $I = \frac{1}{2}mR^2$. Conseguentemente, il nuovo periodo di oscillazione è

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(M + \frac{m}{2}\right)}{k}} = 1.22\ \text{s}.$$

Infine, notiamo che nell'istante in cui la lastra viene lasciata andare, se la molla era allungata del Δx_0 indicato nel testo, essa inizia a muoversi verso destra con un'accelerazione

$$a_i = a_{max} = \left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = \frac{k}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}\Delta x_0,$$

che costituisce il valore massimo del modulo dell'accelerazione della lastra in tutta l'oscillazione (per esempio, negli istanti in cui la lastra raggiunge la sua posizione estrema a sinistra, essa avrà accelerazione $-a_{max}$). Nello stesso istante, il cilindro subisce un'accelerazione angolare $\alpha_{max} = a_{max}/R$ e anche questo valore costituisce il massimo modulo della sua accelerazione angolare.

Ma l'accelerazione rotazionale del cilindro è determinata dalla forza di attrito statico f_s prodotta dal suo contatto con la lastra. Dalla seconda legge della dinamica in forma angolare, possiamo infatti scrivere

$$I\alpha = Rf_s,$$

Tale forza sarà massima, in modulo, quando l'accelerazione angolare e, corrispondentemente, l'accelerazione della lastra sono massime in modulo. Quindi

$$I\alpha_{max} = Rf_s \quad \Rightarrow \quad f_s = I\frac{\alpha_{max}}{R} = \frac{I}{R^2}a_{max} = \frac{I}{R^2}\frac{k\Delta x_0}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}.$$

Da questa, tenendo presente che è

$$f_s \leqslant \mu_s N = \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{R^2}\frac{k\Delta x_0}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)} \leqslant \mu_s mg,$$

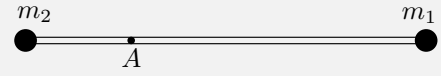
si ricava

$$\mu_s \geqslant \mu_{s,min} \quad \text{con} \quad \mu_{s,min} = \frac{I}{R^2}\frac{k\Delta x_0}{mg\left(M + \frac{I}{R^2}\right)} = \frac{k\Delta x_0}{2g\left(M + \frac{m}{2}\right)} = 0.134.$$

PROBLEMA 6.23 Un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza $\ell = 1.50\,\mathrm{m}$ è libera di ruotare in un piano verticale intorno a un asse orizzontale passante per un suo punto A, distante $d = 20.0\,\mathrm{cm}$ dal centro dell'asta. Agli estremi dell'asta sono fissate due masse $m_1 = 300\,\mathrm{g}$ e $m_2 = 600\,\mathrm{g}$.

a) Se il sistema è inizialmente posto in posizione orizzontale e lasciato libero con velocità iniziale nulla, qual è la velocità angolare dell'asta quando è in posizione verticale?

b) Qual è il periodo delle oscillazioni attorno alla posizione verticale, assumendo piccole oscillazioni attorno all'equilibrio e trattando le masse come puntiformi?



Il momento d'inerzia del sistema delle due masse rispetto all'asse per A è

$$I = m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2,$$

dove $\ell_1 = \ell/2 + d = 0.95$ m, $\ell_2 = \ell/2 - d = 0.55$ m. Quindi è

$$I = (m_1 + m_2)\left(\frac{\ell^2}{4} + d^2\right) - (m_2 - m_1)\ell d = 0.452\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2.$$

Calcoliamo anche la posizione del centro di massa del sistema. Considerando un asse x orizzontale verso destra con origine in A, possiamo scrivere

$$x_{cm} = \frac{-m_2\ell_2 + m_1\ell_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)d - (m_2 - m_1)\frac{\ell}{2}}{m_1 + m_2} = -5.00\,\mathrm{cm},$$

 © 978-88-08-32016-2

il che significa che il centro di massa (guardando la figura) è a sinistra di A a una distanza $\ell_{cm} = 5.00\,\text{cm}$. Conseguentemente, il momento (rispetto ad A) delle forze che agiscono sul sistema è perpendicolare e uscente dal piano dell'immagine, e ha modulo

$$\tau = (m_1 + m_2)g\ell_{cm} = 0.441\,\text{N}\cdot\text{m}.$$

Capiamo quindi che il sistema prenderà a ruotare in verso antiorario.

Nella rotazione, non essendo presenti attriti, si conserva l'energia meccanica. Confrontando lo stato iniziale (asta orizzontale) con quello finale (asta verticale con massa m_2 in basso) e prendendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota di A, possiamo scrivere

$$E_{mecc,i} = K_i + U_i = 0; \quad E_{mecc,f} = K_f + U_f = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + m_1 g\ell_1 - m_2 g\ell_2,$$

dato che la massa m_1 sale e la massa m_2 scende. Perciò

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + m_1 g\ell_1 - m_2 g\ell_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g(m_2\ell_2 - m_1\ell_1)}{I}} = 1.40\,\text{rad/s}.$$

Per la seconda domanda, applicando la 2ª legge della dinamica in forma angolare possiamo scrivere l'equazione del moto del sistema

$$I\alpha = -(m_1 + m_2)g\ell_{cm}\sin\theta \simeq -(m_1 + m_2)g\ell_{cm}\theta,$$

dove α è l'accelerazione angolare, θ è l'angolo fra la sbarra e la verticale e l'approssimazione vale per piccoli angoli.

Tale equazione può essere riscritta come

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\Omega^2\theta,$$

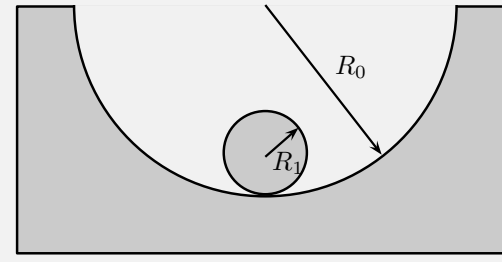
dove Ω corrisponde alla pulsazione delle oscillazioni armoniche ed è pari a

$$\Omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g\ell_{cm}}{I}} = 0.988\,\text{rad/s}.$$

A una tale pulsazione corrisponde un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m_1 + m_2)g\ell_{cm}}} = 6.36\,\text{s}.$$

PROBLEMA 6.24 Un cilindro omogeneo, di raggio $R_1 = 10.0\,\text{cm}$ e massa $m = 5.00\,\text{kg}$, è poggiato nella parte interna di una cavità cilindrica di raggio $R_0 = 50.0\,\text{cm}$. La cavità è praticata nella parte superiore di un corpo rigido che viene mantenuto in quiete. In caso di moto del cilindro, si supponga che esso, finché rimane in contatto con la superficie della cavità, rotoli senza mai scivolare.



In un primo caso, a partire dalla posizione indicata in figura, il cilindro viene lanciato verso destra con una velocità del centro di massa v_0.

a) Determinarne il minimo valore di v_0 affinché il centro di massa del cilindro possa riuscire a sollevarsi di una quota non minore di $2R_0$.

Invece, se il cilindro viene spostato anche di poco dalla sua posizione di equilibrio (indicata in figura), una volta lasciato andare esso prende a oscillare avanti e indietro.

b) Determinare il periodo di tali oscillazioni (supposte piccole).

Supponiamo che v_0 sia quella giusta affinché il centro di massa del cilindro possa sollevarsi esattamente di una quota $2R_0$. Nella prima fase il cilindro sale rotolando lungo la parete della cavità e, quando il suo centro di massa si sarà sollevato di una quota pari a $R_0 - R_1$, il cilindro si stacca dalla cavità. In questa seconda fase il cilindro procede in verticale continuando a ruotare con la stessa velocità angolare che aveva al momento del distacco dalla superficie della cavità e, alla fine, raggiunge la quota $2R_0 + R_1$ (in modo che complessivamente si sia innalzato di $2R_0$). In entrambe le fasi si conserva l'energia meccanica.

Nella prima fase (tenendo conto sia dell'energia cinetica traslazionale sia di quella rotazionale) possiamo scrivere

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mg(R_0 - R_1) = 0,$$

dove ω_0 è la velocità angolare iniziale del cilindro, v_1 e ω_1 sono i valori della velocità del centro di massa e di rotazione del cilindro al momento del distacco e $I = \frac{1}{2}mR_1^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse per il suo *cdm*.

Ma, dato che il cilindro segue un moto di puro rotolamento, possiamo scrivere

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R_1}; \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{R_1},$$

e quindi dalla precedente otteniamo

$$\frac{3}{4}mv_1^2 = \frac{3}{4}mv_0^2 - mg(R_0 - R_1) \quad \Rightarrow \quad mv_0^2 = mv_1^2 + \frac{4}{3}mg(R_0 - R_1).$$

Nella seconda fase la conservazione dell'energia meccanica del cilindro coinvolge solo la sua energia cinetica traslazionale. Dovrà essere

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg(R_0 + R_1) \quad \Rightarrow \quad mv_1^2 = 2mg(R_0 + R_1).$$

Combinando quest'ultima con la precedente, abbiamo

$$mv_0^2 = 2mg(R_0 + R_1) + \frac{4}{3}mg(R_0 - R_1) = \frac{1}{3}mg(10R_0 + 3R_1)$$
$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{1}{3}g(10R_0 + 3R_1)} = 4.16\,\mathrm{m/s}.$$

Anche durante il moto oscillatorio si conserva l'energia meccanica. Se indichiamo con v e ω le velocità del centro di massa e angolare del cilindro, e con h la quota del suo centro rispetto a quella che ha nella posizione di equilibrio, potremo scrivere

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}mv^2 + mg(R_0 - R_1)(1 - \cos\beta) = \text{cost.},$$

dove β ora è l'angolo tra la verticale e il raggio che va dal centro della cavità al centro (istantaneo) del cilindro. Se deriviamo rispetto al tempo, otteniamo la seguente

$$\frac{3}{2}v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + g(R_0 - R_1)\sin\beta \cdot \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Essendo

$$v = (R_0 - R_1)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R_0 - R_1} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (R_0 - R_1)\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2},$$

sostituendo nella precedente ed eliminando v, otteniamo l'equazione

$$\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + g\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}(R_0 - R_1)\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} + g\sin\beta = 0,$$

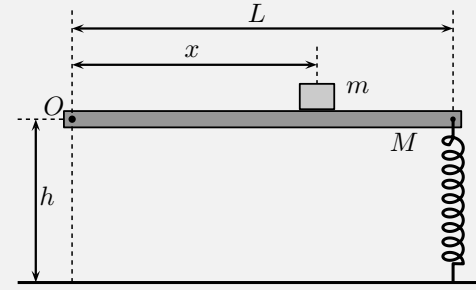
che nel caso di piccoli angoli (piccole oscillazioni) può essere scritta nella forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} = -\left[\frac{2g}{3(R_0 - R_1)}\right]\beta.$$

Tale equazione è analoga a quella delle oscillazioni armoniche di pulsazione e periodo

$$\omega' = \sqrt{\frac{2g}{3(R_0 - R_1)}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\frac{3(R_0 - R_1)}{2g}} = 1.55\,\text{s}.$$

PROBLEMA 6.25 Come mostrato in figura una sbarra rigida sottile, di lunghezza $L = 120\,\text{cm}$ e massa $M = 100\,\text{kg}$, può ruotare liberamente intorno al perno fisso O mantenendosi in un piano verticale. Il perno è a una quota $h = 50.0\,\text{cm}$ dal suolo. Tra l'altro estremo della sbarra e il suolo è agganciata una molla ideale (di massa trascurabile) di costante elastica $k = 68.7\,\text{N/cm}$.



Quando sulla sbarra è appoggiato un corpo puntiforme di massa $m = 30.0\,\text{kg}$ a distanza $x = 80.0\,\text{cm}$ dal perno, il sistema è in equilibrio e la sbarra risulta (come mostrato in figura) disposta orizzontalmente. In tali condizioni la molla è perfettamente verticale.

a) Determinare la lunghezza a riposo della molla.

Se, a partire dalla situazione di figura, la sbarra viene spinta momentaneamente verso il basso, essa prenderà a oscillare intorno alla posizione di equilibrio. Supponendo che il corpo di massa m rimanga fisso rispetto alla sbarra e in caso di oscillazioni di piccola ampiezza, determinare:

b) la frequenza di tali oscillazioni.

Nella situazione riportata in figura, l'equilibrio della sbarra presuppone che la molla determini, sull'estremità destra della sbarra, una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ diretta verso l'alto: la molla sarà quindi compressa. Applicando la seconda legge della dinamica in forma angolare rispetto al perno, O, e considerando il sistema sbarra + corpo come un tutt'uno, possiamo scrivere

$$0 = LF_e - x_{cm}(M + m)g,$$

dove i termini a secondo membro corrispondono ai momenti della forza elastica (che abbiamo preso positivo) e della forza di gravità totale applicata al centro di massa del sistema. Quindi, tenendo presente che è

$$x_{cm} = \frac{mx + M\frac{L}{2}}{m + M} = \frac{2mx + ML}{2(m + M)} = 64.6\,\text{cm},$$

e tenendo conto che per la forza elastica si ha $F_e = -k(h - l_0)$ (l_0 corrisponde alla lunghezza a riposo della molla), si ricava

$$F_e = \frac{x_{cm}}{L}(M + m) = \frac{(LM + 2xm)g}{2L} = -k(h - l_0)$$
$$\Rightarrow \quad l_0 = h + \frac{F_e}{k} = h + \frac{(LM + 2xm)g}{2kL} = 60.0\ \text{cm}.$$

Se invece supponiamo che il sistema sbarra + corpo ruoti di un angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio, il momento delle forze di gravità diventa

$$-x_{cm}(M + m)g\cos\theta,$$

che, nel limite di piccoli θ (in tal caso è $\cos\theta \approx 1$), è essenzialmente identico a quello all'equilibrio.

D'altra parte, la lunghezza della molla in funzione del piccolo angolo θ di cui è ruotato il sistema può essere scritta come segue

$$l \approx h + L\sin\theta \approx h + L\theta,$$

dove, essendo θ molto piccolo abbiamo potuto fare l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$.

Perciò, riconsiderando la seconda legge della dinamica in forma angolare, ora in condizioni di non equilibrio, abbiamo

$$I\alpha = \tau(\theta) = -kL(l - l_0) - \frac{L}{2}Mg - xmg = -kL^2\theta - kL(h - l_0) - \frac{L}{2}Mg - xmg,$$

dove il momento d'inerzia del sistema sbarra+corpo rispetto al perno O è dato dalla seguente

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + mx^2.$$

Notando che, dopo aver sostituito il valore di l_0 calcolato sopra, vale la seguente

$$-kL(h - l_0) - \frac{L}{2}Mg - xmg = 0;$$

l'equazione del moto diventa

$$I\alpha = -kL^2\theta \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kL^2}{I} \cdot \theta,$$

in cui riconosciamo la tipica forma delle equazioni delle oscillazioni armoniche con $\omega^2 = kL^2/I$. Pertanto, la frequenza delle oscillazioni del sistema è

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kL^2}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3kL^2}{ML^2 + 3mx^2}} = 1.93 \text{ Hz}.$$

Problemi di Fisica 1
Meccanica e Termodinamica
Seconda edizione

Risorse online
A questo indirizzo si può accedere al sito di complemento al libro
online.universita.zanichelli.it/giordanifisica1

Ebook
Chi acquista il libro nuovo può accedere gratuitamente all'ebook, seguendo le istruzioni presenti nel sito.

Per l'accesso registrarsi su
my.zanichelli.it
e abilitare le risorse.
Maggiori informazioni nelle pagine iniziali del libro.

L'accesso all'ebook e alle risorse digitali protette è personale, non condivisibile e non cedibile, né autonomamente né con la cessione del libro cartaceo.

La seconda edizione di *Problemi di Fisica 1* contiene una raccolta di circa 350 problemi di Meccanica e Termodinamica con soluzione, utili alla preparazione delle prove d'esame nelle lauree triennali in cui la Fisica è insegnata in più annualità.

L'opera nasce dalla lunga esperienza didattica degli autori, che insegnano nei corsi di laurea di Ingegneria meccanica e Ingegneria gestionale. È quindi prima di tutto rivolta a chi frequenta il primo anno di Ingegneria, ma include esercizi che possono essere stimolanti e utili anche per chi ha scelto le lauree triennali in Fisica e in Matematica, sia per la gamma di temi trattati, sia per le diverse metodologie di approccio.

Il libro è suddiviso in otto capitoli, ognuno dei quali raccoglie problemi, relativamente omogenei per contesti e temi, provvisti tutti di soluzioni ampie e dettagliate, nelle quali è ben articolato il ragionamento impiegato per raggiungerle. I singoli capitoli sono suddivisi in sezioni, che raggruppano a loro volta gli esercizi per tipologie di *situazione* e caratteristiche dei *sistemi* e dei *fenomeni* considerati, seguendo in parte un ordine in base al grado di difficoltà.

Il testo, caratterizzato da un formalismo matematico medio-alto, è completato da tre *appendici*: la prima contiene una breve trattazione del problema dei due corpi, necessaria per lo sviluppo di alcuni esercizi sulla gravitazione; le altre due riportano le notazioni utilizzate, un piccolo compendio di formule matematiche e di relazioni tra le grandezze fisiche, tabelle di unità di misura e valori di costanti e quantità fisiche utili per la risoluzione dei problemi.

Gli autori
Mario Paolo Giordani è professore associato di Fisica sperimentale presso l'Università degli Studi di Udine, dove insegna Fisica generale nel corso di laurea in Ingegneria meccanica.
Gilberto Giugliarelli è ricercatore di Fisica sperimentale presso l'Università degli Studi di Udine, dove insegna Fisica generale nel corso di laurea in Ingegneria gestionale.

GIORDANI*PROBL FISICA 1 2ED (CEAKQ
ISBN 978-88-08-32016-2
9 788808 320162
3 4 5 6 7 8 9 0 1 (64D)