SEZIONE F
SISTEMI E RETTE

CAPITOLO 15

SISTEMI LINEARI

1 Sistemi di equazioni

Che cos'è un sistema di equazioni?

sistema $\begin{cases} x^2-1=xy \\ 2x-y=2 \end{cases}$ incognite; $(1; 0)$ soluzione: $\begin{cases} 1^2-1=1\cdot 0 \\ 2\cdot 1-0=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x^3+xy=1 \\ x^2+y+y^2=16 \end{cases}$ sistema di grado $3\cdot 2=6$

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni per le quali cerchiamo le **soluzioni comuni**. Questi valori, sostituiti alle **incognite**, rendono vere *tutte* le equazioni del sistema. Il **grado** di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni che compongono il sistema.

PROVA SUBITO Quale delle coppie scritte in rosso è soluzione del sistema?
$\begin{cases} x^2=9 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ $(-3; 1)$, $(3; 8)$. Qual è il grado del sistema?

Sistemi determinati, indeterminati, impossibili

Sistema determinato	Sistema indeterminato	Sistema impossibile
$\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$ equivalenti	$\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$
soluzione: $(2; 1)$	soluzioni: … $(-1; 3)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, …	nessuna soluzione

Un sistema è **determinato** se ha un *numero finito* di soluzioni; **indeterminato** se ha *infinite* soluzioni; **impossibile** se *non ha* soluzioni.
Due sistemi sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

PROVA SUBITO Quale dei seguenti sistemi è indeterminato e quale impossibile? Spiega perché.

$\begin{cases} 5x=2y \\ 5x=2y-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ 3(x+y)=3 \end{cases}$

Esercizi

1 Tutti questi sistemi sono impossibili. **Spiega perché**.

a. $\begin{cases} 0x+0y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 2y+2x=4 \\ 2(x+y)=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x^2+y^2+9=0 \\ x+2y=2 \end{cases}$

Se eleviamo alla seconda un numero, otteniamo un numero positivo oppure 0.

2 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che $(3; -1)$ è soluzione di $\begin{cases} 2x+3y=y+4 \\ x^2+y=2x+2 \end{cases}$.

Come si risolve

Sostituiamo nella prima equazione del sistema il valore **3** a x e il valore **−1** a y:

$2x+3y=y+4 \quad \rightarrow \quad 2\cdot\mathbf{3}+3\cdot(\mathbf{-1})=\mathbf{-1}+4 \quad \rightarrow \quad 6-3=3 \quad \rightarrow \quad 3=3.$

I valori del primo e del secondo membro sono uguali, quindi l'uguaglianza è vera.

Sostituiamo **3** a x e **−1** a y anche nella seconda equazione:

$x^2+y=2x+2 \rightarrow \mathbf{3}^2+(\mathbf{-1})=2\cdot\mathbf{3}+2 \rightarrow 9-1=6+2 \rightarrow 8=8.$

Anche questa uguaglianza è vera.

I valori del primo e del secondo membro sono uguali sia nella prima equazione sia nella seconda, quindi (**3**; **−1**) è soluzione del sistema.

Per ciascuno dei seguenti sistemi, verifica se la coppia indicata è soluzione.

3 $\begin{cases} y+2x+3=\frac{1}{2}+24y-x \\ x-2y=2 \end{cases}$ $\left(3; \frac{1}{2}\right)$

4 $\begin{cases} 2x-3y=-8 \\ x^2-4y-1=x-6y+3 \end{cases}$ $(-1; 2)$

5 $\begin{cases} 3y+2x=4-3y-x \\ 3y+x=-1 \end{cases}$ $(5; -2)$

6 $\begin{cases} x-y^2=-3 \\ 3y-2x=8-y \end{cases}$ $(-2; 1)$

7 **Qual è il grado** di ognuno dei seguenti sistemi?

a. $\begin{cases} x^2+2y^3=2 \\ 3x^5+y^2=5 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 1+y=x^3 \\ 3+y=3 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x^2y+x+y=3 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases}$

Scrivi in forma normale ciascuno dei sistemi.

Il sistema $\begin{cases} 7x-9y=5 \\ 3x-6y=12 \end{cases}$ è scritto in forma normale.

8 $\begin{cases} (x+2y)(1-x)+x^2=x(2-2y)+5 \\ y+2x-2=-3x \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3(x+y)-5=5y-2x \\ 2x-6y=7+x-y \end{cases}$

10 $\begin{cases} \frac{x+3}{2}=3-y \\ 5(x+1)+y=5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x+3y=2x-y+1 \\ x+7y=9-2x \end{cases}$

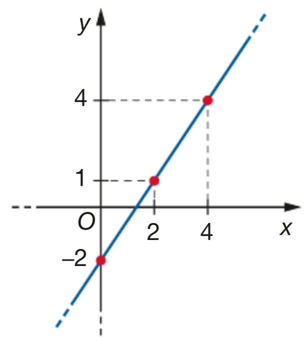
2 Interpretazione grafica di sistemi lineari di due equazioni in due incognite

Equazioni lineari in due incognite

$$\overbrace{3x-2y=4}^{\text{equazione lineare}} \rightarrow y=\overbrace{\boxed{\frac{3}{2}}}^{\text{coefficiente angolare}}x\overbrace{-\,2}^{\text{ordinata all'origine}}$$

x	0	2	4	…
y	-2	1	4	…

soluzioni: $(0;-2)$, $(2;1)$, $(4;4)$, …



Un'equazione di primo grado rispetto a x e a y è un'**equazione lineare** in due incognite. Le sue soluzioni sono le infinite coppie ordinate di numeri che verificano l'equazione e sono rappresentate graficamente dai punti di una retta.

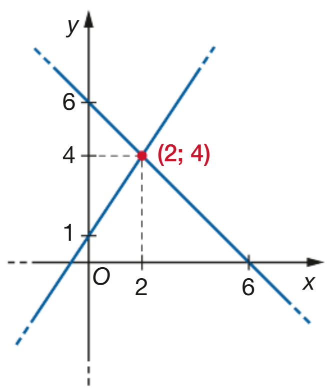
PROVA SUBITO Traccia il grafico che rappresenta le soluzioni di $6x+2y=2$.

Interpretazione grafica di un sistema lineare

Sistema determinato

$$\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ x+y=6 \end{cases}$$

soluzione: $(2;4)$

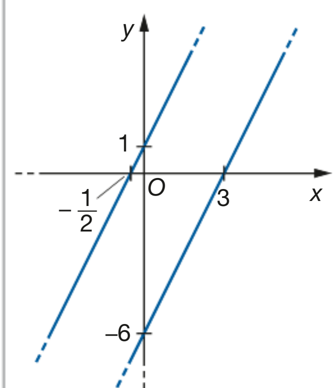


Rette incidenti

Sistema impossibile

$$\begin{cases} 4x-2y=-2 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

nessuna soluzione

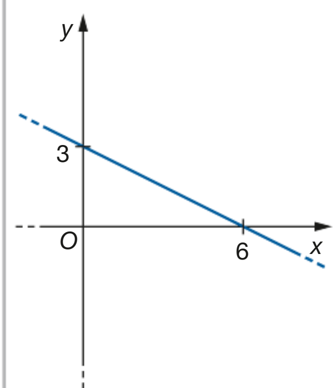


Rette parallele

Sistema indeterminato

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+6y=18 \end{cases}$$

infinite soluzioni



Rette coincidenti

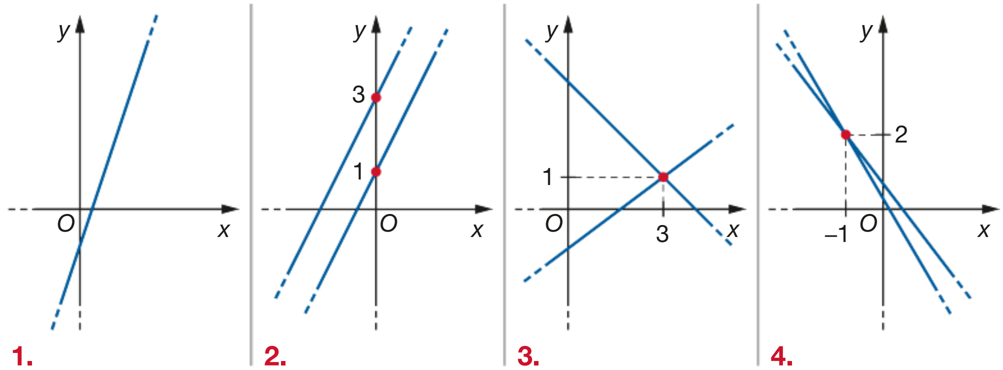
Le soluzioni di un sistema lineare in due incognite, se esistono, sono le coordinate dei punti di intersezione fra le due rette che rappresentano le equazioni.

PROVA SUBITO Interpreta graficamente $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$.

Esercizi

12 **Associa** ciascun sistema alla sua interpretazione grafica.

a. $\begin{cases} y-2x=3 \\ y-2x=1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x-4y=5-2x \\ 2x+y=8-y \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 3x+3y=1-2x \\ 2y+3x=2-2y-3x \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} 3y=9x-3 \\ 9y-27x=-9 \end{cases}$



13 **ESERCIZIO GUIDA**

Interpretiamo graficamente il sistema: $\begin{cases} 3y-6x-3=0 \\ y+2x-6=-x \end{cases}$.

Come si risolve

Riscriviamo la prima e la seconda equazione nella forma $y=mx+q$.

Prima equazione:

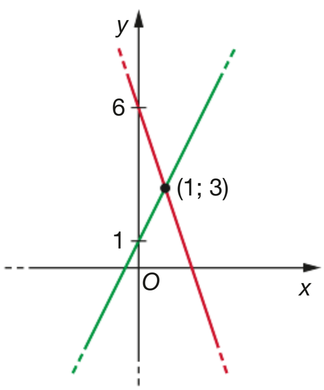
$3y-6x-3=0 \rightarrow 3y=6x+3 \xrightarrow{:3} y=2x+1$.

Seconda equazione:

$y+2x-6=-x \rightarrow y=-3x+6$.

Disegniamo nel piano cartesiano le rette $\boldsymbol{y=2x+1}$ (il coefficiente angolare della retta è 2 e l'ordinata all'origine è 1) e $\boldsymbol{y=-3x+6}$ (il **coefficiente angolare** della retta è -3 e l'**ordinata** all'origine è 6).

Le rette disegnate sono incidenti, quindi il sistema è determinato.



Interpreta graficamente **i seguenti sistemi.**

14 $\begin{cases} 6x+2y=2 \\ x-y=4-x \end{cases}$ [det.]

15 $\begin{cases} y=3x+1 \\ 3y=9x+3 \end{cases}$ [indet.]

16 $\begin{cases} 4x-y=3 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$ [det.]

17 $\begin{cases} 2x+2y=-1 \\ 8x+4y=+2+4x \end{cases}$ [imp.]

18 $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 4y+6x=2 \end{cases}$ [det.]

19 $\begin{cases} 2x+2y=+y+9 \\ 5x-5y=15 \end{cases}$ [det.]

3 Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 6x+2y=-4 \\ 8x+4y=8 \end{cases}$$

ricaviamo *y* nella prima equazione

1. $\begin{cases} y=-2-3x \\ 8x+4y=8 \end{cases}$

sostituiamo l'espressione di *y* nella seconda equazione

2. $\begin{cases} y=-2-3x \\ 8x+4(-2-3x)=8 \end{cases}$

risolviamo la seconda equazione

3. $\begin{cases} y=-2-3x \\ x=-4 \end{cases}$

sostituiamo il valore di *x* nella prima equazione

4. $\begin{cases} y=-2-3(-4) \rightarrow y=10 \\ x=-4 \end{cases}$

scriviamo la soluzione del sistema

5. $(-4;\ 10)$

Per risolvere un sistema scritto in forma normale con il **metodo di sostituzione** procediamo così.

1. Ricaviamo in una equazione una delle incognite, per esempio la y.
2. Sostituiamo l'espressione di y nell'altra equazione ottenendo un sistema equivalente a quello di partenza.
3. Risolviamo l'equazione che presenta solo l'incognita x. Se l'equazione è impossibile, anche il sistema è impossibile, altrimenti troviamo la soluzione $x=a$.
4. Sostituiamo il valore trovato, $x=a$, all'incognita x nell'altra equazione e svolgiamo i calcoli. Troviamo $y=b$.
5. La soluzione del sistema è la coppia $(a;\ b)$.

PROVA SUBITO Risolvi il sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ con il metodo di sostituzione.

Esercizi

20 **Completa** la risoluzione del sistema $\begin{cases} 3x+y-1=x-3 \\ -x+2y=y-3x \end{cases}$.

$$\begin{cases} 3x+y-1=x-3 \\ -x+2y=y-3x \end{cases}$$

scriviamo il sistema in forma normale

$$\begin{cases} 2\square+y=\square \\ \square x+\square y=0 \end{cases}$$

ricaviamo *y* nella prima equazione

$$\begin{cases} y=\square-2\square \\ \square x+\square y=0 \end{cases}$$

sostituiamo l'espressione di *y* nella seconda equazione

$$\begin{cases} y=-2-2x \\ 2x+\square(\square-\square)=0 \end{cases}$$

risolviamo la seconda equazione

$$\begin{cases} y=-2-2x \\ -2=0 \end{cases}$$

Il sistema è ______.

Risolvi con il metodo di sostituzione i seguenti sistemi lineari in due equazioni e due incognite.

21 $\begin{cases} x+3y=-3 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$ [(3; – 2)]

22 $\begin{cases} 3(x+y)=3-3x \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ [imp.]

23 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{y-x}{2}=1 \\ 5x+2y=3 \end{cases}$ [(1; – 1)]

24 $\begin{cases} 2(x+y)+2x=8 \\ x-(3y+2)=0 \end{cases}$ [(2; 0)]

25 $\begin{cases} \dfrac{x+8}{2}-\dfrac{y+3}{3}=2 \\ 6x+4=-8+4y \end{cases}$ [indet.]

26 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}y=\dfrac{3}{2} \\ 3(y-x)-7=5 \end{cases}$ [(– 1; 3)]

---

27 **Test.** «Un numero supera di 5 un altro numero e se sommiamo al triplo del secondo il doppio del primo otteniamo 10. Quali sono i due numeri?»
Quale tra i seguenti sistemi risolve il problema?

A $\begin{cases} x+5=y \\ 2x+3y=10 \end{cases}$ B $\begin{cases} x=y+5 \\ 2y+3x=10 \end{cases}$ C $\begin{cases} x=y-5 \\ 3y+2x=10 \end{cases}$ D $\begin{cases} x=y+5 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

28 **ESERCIZIO GUIDA**

La somma delle età di Paolo e Roberto è 16 anni. Paolo è più vecchio di Roberto e il quintuplo della differenza delle loro età è uguale al doppio dell'età di Paolo. **Quanti anni hanno** i due amici?

Come si risolve

Chiamiamo x l'età di Paolo e y l'età di Roberto.
La somma delle età di Paolo e Roberto è 16, quindi la *prima equazione* del sistema è:
$\boldsymbol{x+y=16}$.
Il quintuplo della differenza delle loro età è pari al doppio dell'età di Paolo, quindi la *seconda equazione* del sistema è:
$\boldsymbol{5(x-y)=2x}$.

Risolviamo il sistema delle due equazioni con il metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} x+y=16 \\ 5(x-y)=2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 3x-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\mathbf{16-x} \\ 3x-5(\mathbf{16-x})=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y=16-\mathbf{10} \\ x=\mathbf{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=10 \end{cases}$$

Quindi Paolo ha 10 anni e Roberto ne ha 6.

29 Se Luca compra 4 kilogrammi di mele e 2 di pere, spende € 14. Se compra 5 kilogrammi di pere e 2 di mele spende € 19. **Quanto costano** le mele e le pere al kilogrammo? [2 €/kg; 3 €/kg]

30 Il perimetro di un rettangolo è 26 cm e la base supera di 1 cm il triplo dell'altezza. **Quanto misurano** la base e l'altezza del rettangolo? [10 cm; 3 cm]

Il perimetro di un rettangolo di base b e altezza h è $2(b+h)$.

4 Metodo del confronto

$$\begin{cases} 6x+5\boldsymbol{y}=7 \\ 5x-2\boldsymbol{y}=12 \end{cases}$$

ricaviamo *y* in entrambe le equazioni

1. $\begin{cases} \boldsymbol{y}=\dfrac{7-6x}{5} \\ \boldsymbol{y}=-\dfrac{12-5x}{2} \end{cases}$

uguagliamo le espressioni di *y* mettendole a sistema

2. $\begin{cases} y=\dfrac{7-6x}{5} \\ \dfrac{7-6x}{5}=-\dfrac{12-5x}{2} \end{cases}$

risolviamo la seconda equazione

3. $\begin{cases} y=\dfrac{7-6x}{5} \\ x=\mathbf{2} \end{cases}$

sostituiamo il valore di *x* nella prima equazione

4. $\begin{cases} y=\dfrac{7-6(\mathbf{2})}{5}=-1 \rightarrow y=-1 \\ x=2 \end{cases}$

soluzione del sistema

5. $(2;\,-1)$

Per risolvere un sistema scritto in forma normale con il **metodo del confronto** procediamo così.

1. Ricaviamo ogni equazione del sistema rispetto alla stessa incognita, per esempio rispetto a *y*.
2. Uguagliamo le due espressioni di *y* e mettiamo a sistema l'equazione ottenuta con una delle due precedenti. Così troviamo un sistema equivalente a quello di partenza.
3. Risolviamo la seconda equazione che presenta solo l'incognita *x*. Se l'equazione è impossibile, anche il sistema è impossibile, altrimenti troviamo la soluzione $x=a$.
4. Sostituiamo il valore *a* all'incognita *x* nella prima equazione e svolgiamo i calcoli. Troviamo $y=b$.
5. La soluzione del sistema è la coppia $(a;\,b)$.

PROVA SUBITO Risolvi il sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ con il metodo del confronto.

Esercizi

In ciascun sistema determina l'incognita *y* in funzione di *x* in entrambe le equazioni.

31 $\begin{cases} 9x+2y=5 \\ 4x-3y=6 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 9x-2y=5 \\ 4x-3y=6 \end{cases}$

33 $\begin{cases} -9x+2y=5 \\ -4x+3y=6 \end{cases}$

34 $\begin{cases} 9x+2y=5 \\ -4x+3y=6 \end{cases}$

35 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 7x - 6y = 12 \\ 7x - 6y = 18 \end{cases}$.

Come si risolve

Risolviamo ciascuna equazione rispetto alla stessa incognita, per esempio la x.

Prima equazione: $7x - 6y = 12 \rightarrow x = \frac{12+6y}{7}$.

Seconda equazione: $7x - 6y = 18 \rightarrow x = \frac{18+6y}{7}$.

Uguagliamo le espressioni di x: $\frac{12+6y}{7} = \frac{18+6y}{7}$.

Mettiamo a sistema l'equazione ottenuta con una delle due precedenti:

$$\begin{cases} x = \frac{12+6y}{7} \\ \frac{12+6y}{7} = \frac{18+6y}{7} \end{cases}.$$

Risolviamo la seconda equazione che ha solo l'incognita y.

Seconda equazione: $\frac{12+6y}{7} = \frac{18+6y}{7} \rightarrow 12 + 6y = 18 + 6y \rightarrow 0 = 6$.

L'equazione è impossibile quindi anche il sistema è impossibile.

Risolvi con il metodo del confronto i seguenti sistemi.

Prima di applicare il metodo del confronto, scrivi il sistema in forma normale.

36 $\begin{cases} 10x + 5y = -10 \\ x - 5y = -23 \end{cases}$ [(−3; 4)]

37 $\begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ [(−1; 3)]

38 $\begin{cases} 7x + 2y = 10 \\ -2x + 3y = -10 \end{cases}$ [(2; −2)]

39 $\begin{cases} 5x - 7y = 4 \\ 15x - 21y = -12 \end{cases}$ [imp.]

40 $\begin{cases} 2(x+y) = 2(x-y) + 3x + 1 \\ 4y - 6x = 2(1 - 2y) \end{cases}$ [indet.]

41 $\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{1-2y}{2} = 2 - \frac{x}{6} \\ 3(5x+4) + 2 = 12y - 15x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3}; 2\right)\right]$

42 $\begin{cases} 5(x+y) = -5x + \frac{9}{2} \\ 20y - 5(x+5) = -25 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{10}\right)\right]$

---

43 La differenza tra le misure dei cateti di un triangolo rettangolo è 5 cm. Se aumentiamo entrambi i cateti di 1 cm, otteniamo un altro triangolo rettangolo la cui area supera di 8 cm^2 l'area del primo triangolo. **Quanto sono lunghi** i due cateti? [10 cm; 5 cm]

44 **Calcola** le ampiezze degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, la cui differenza è 20°. [55°; 35°]

45 Un numero è i $\frac{3}{4}$ di un altro e la loro somma è 28. **Trova** i due numeri. [12; 16]

46 Asia e i suoi genitori decidono di andare a vedere un film in un cinema che offre biglietti a prezzo ridotto per i ragazzi. Asia ha diritto a uno sconto di € 2 rispetto al prezzo intero e il totale pagato è € 31. **Calcola** il prezzo del biglietto intero e di quello scontato. [€ 11; € 9]

5 Metodo di riduzione

$$\begin{cases} 8x - 2y = -10 \\ 6x + 2y = +3 \end{cases}$$ + sommiamo le equazioni membro a membro

$$14x \quad = -7$$

1. $\begin{cases} 14x = -7 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$

ricaviamo x nella prima equazione

2. $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$

sostituiamo il valore di x nella seconda equazione

3. $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ 6\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2y = 3 \to y = 3 \end{cases}$

soluzione del sistema

4. $\left(-\dfrac{1}{2}; 3\right)$

Principio di riduzione: se sommiamo o sottraiamo membro a membro due equazioni di un sistema e sostituiamo l'equazione ottenuta a una delle due equazioni di partenza, otteniamo un sistema equivalente.

Consideriamo un sistema scritto in forma normale in cui i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Per esempio i coefficienti di y. Per risolverlo con il **metodo di riduzione**, procediamo così.

1. Applichiamo il **principio di riduzione**: sommiamo membro a membro le due equazioni del sistema e otteniamo un'equazione nella sola incognita x. Mettiamo a sistema questa equazione con una delle due precedenti.
2. Risolviamo l'equazione che presenta solo l'incognita x. Se l'equazione è impossibile, anche il sistema è impossibile, altrimenti troviamo la soluzione $x = a$.
3. Sostituiamo il valore a all'incognita x nella seconda equazione e troviamo $y = b$.
4. La soluzione del sistema è la coppia $(a; b)$.

PROVA SUBITO Risolvi il sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ con il metodo di riduzione.

Esercizi

47 **Completa** in modo che il principio di riduzione sia applicato correttamente.

$\begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ 3x + 6y = 4 \end{cases}$; $\quad \boxed{5}\,x = \boxed{9}$

$\begin{cases} 4x + 8y = -7 \\ -4x - 10y = 2 \end{cases}$; $\quad -2\,\boxed{} = \boxed{}$

$\begin{cases} \boxed{}\,x + y = -2 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$; $\quad 3x = \boxed{}$

$\begin{cases} -9x + \boxed{}\,y = \boxed{} \\ \boxed{}\,x - \boxed{}\,5y = 0 \end{cases}$. $\quad 11y = 3$

Risolvi con il metodo di riduzione i seguenti sistemi lineari in due equazioni e due incognite.

48 $\begin{cases} 5x-4y=3 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$ [(−1; −2)]

49 $\begin{cases} 6x+3y=12 \\ -6x-y=-8 \end{cases}$ [(1; 2)]

50 $\begin{cases} 2(x+y)=3y-1 \\ -2x+y=3 \end{cases}$ [impossibile]

51 $\begin{cases} 2x-2y=-3 \\ 4x+2y=12 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{3}{2}; 3\right)\right]$

52 Per quali numeri bisogna moltiplicare le equazioni del sistema in modo che i coefficienti di una delle due incognite siano opposti?

a. $\begin{cases} x+17y=3 \\ -2x+19y=5 \end{cases}$ $\boxed{2}$ $\begin{cases} 2x+34y=6 \\ -2x+19y=5 \end{cases}$;

b. $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 7x+3y=-1 \end{cases}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\begin{cases} 15x+6y=9 \\ -14x-6y=2 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} 5x+3y=6 \\ 3x+3y=1 \end{cases}$ $\boxed{}$ $\begin{cases} 5x+3y=6 \\ -3x-3y=-1 \end{cases}$;

d. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+7y=-2 \\ -x+5y=1 \end{cases}$ $\boxed{}$ $\begin{cases} x+14y=-4 \\ -x+5y=1 \end{cases}$.

Quando in un sistema le due equazioni non hanno termini opposti, moltiplichiamo le equazioni per un numero in modo che i coefficienti di y nel nuovo sistema siano opposti.

Risolvi con il metodo di riduzione i seguenti sistemi lineari in due equazioni e due incognite.

53 $\begin{cases} 2x+7y=2 \\ -4x-14y=3 \end{cases}$ [impossibile]

54 $\begin{cases} x+3y=1 \\ 4x-9y=-10 \end{cases}$ $\left[\left(-1; \frac{2}{3}\right)\right]$

55 $\begin{cases} 2x+7y=2 \\ -4x-14y=-4 \end{cases}$ [indeterminato]

56 $\begin{cases} \dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{10}{3}}{5}=\dfrac{-\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}y+1}{3} \\ 5x+3y=24 \end{cases}$ [(3; 3)]

57 A una gara di atletica partecipano in totale 143 ragazzi. Le atlete femmine sono il 20% in più dei maschi. **Quante sono** le femmine? [78]

58 **Calcola** quante cassette di arance e quante di mele mette in vendita un fruttivendolo, se quelle di arance sono i $\frac{2}{5}$ di quelle di mele e in tutto le cassette sono 35. [10; 25]

59 Un trapezio ha altezza 5 cm e area 25 cm^2. La differenza tra le lunghezze delle basi è 2 cm. **Quanto sono lunghe** le basi? [6 cm; 4 cm]

L'area del trapezio è $A=\frac{(B+b)\cdot h}{2}$.

60 Karim vuole dipingere le pareti della camera di azzurro. Per farlo deve preparare la vernice della giusta tonalità mescolando quella blu e quella bianca. Trova quanti litri di vernice blu e quanti di bianca servono a Karim per preparare 8 L di vernice azzurra, se la quantità di vernice blu deve essere i $\frac{3}{5}$ di quella bianca. [3 L; 5 L]

6 Metodo di Cramer

$\begin{cases} 2x+1y=3 \\ 10x+6y=14 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-10\cdot 1=2\neq 0$

$D_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 14 & 6 \end{vmatrix}=3\cdot 6-14\cdot 1=4$

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}=2\cdot 14-3\cdot 10=-2$

determinato

soluzione:

$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{4}{2}=2$

$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-2}{2}=-1$

$\begin{cases} 3x-1y=1 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)-6\cdot(-1)=0$

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)-2\cdot(-1)=0$

$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-6\cdot 1=0$

indeterminato

$\begin{cases} 5x-2y=3 \\ -10x+4y=6 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}=5\cdot 4-(-10)\cdot(-2)=0$

$D_x=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-6\cdot(-2)=24$

$D_y=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix}=5\cdot 6-(-10)\cdot 3=60$

impossibile

Consideriamo il sistema di due equazioni e due incognite $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Chiamiamo **determinante del sistema** il numero $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$.
Consideriamo poi i determinanti:

$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b,\qquad D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c.$

La regola di Cramer afferma che:

- se $D\neq 0$, il sistema è **determinato** e la soluzione è: $x=\dfrac{D_x}{D},\quad y=\dfrac{D_y}{D}$.
- se $D=0$ e $D_x=0$ e $D_y=0$, il sistema è **indeterminato**.
- se $D=0$ e $D_x\neq 0$ oppure $D_y\neq 0$, il sistema è **impossibile**.

PROVA SUBITO Calcola il determinante del sistema $\begin{cases} -3x+9y=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$.

Esercizi

61 **Completa** con le parole: determinato, indeterminato, impossibile.

Se in un sistema:	...allora il sistema è:
$D=0,\ D_x=1,\ D_y=2$	impossibile
$D=2,\ D_x=1,\ D_y=2$	
$D=0,\ D_x=0,\ D_y=2$	
$D=0,\ D_x=1,\ D_y=0$	
$D=0,\ D_x=0,\ D_y=0$	
$D=2,\ D_x=0,\ D_y=2$	

62 **Associa** ciascun sistema al suo determinante.

a. $\begin{cases} 4x=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x+6y=10 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+3y=-2 \\ -3x+6y=7 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} 6x+4y=-3 \\ 5x+2y=2 \end{cases}$

1. 8 **2.** -8 **3.** 6 **4.** -6

Per ciascuno dei seguenti sistemi scrivi i determinanti *D*, D_x, D_y e calcola il loro valore.

63 $\begin{cases} -\frac{1}{3}x+2y=-3 \\ 5x+3y=12 \end{cases}$ [-11; -33; 11]

64 $\begin{cases} \frac{1}{5}x-y=1 \\ -x+5y=-2 \end{cases}$ $\left[0;\ 3;\ \frac{3}{5}\right]$

65 $\begin{cases} 7x-3y=5 \\ -14x+6y=-10 \end{cases}$ [0; 0; 0]

66 $\begin{cases} 16x+3y=-3 \\ -8x+2y=-2 \end{cases}$ [56; 0; -56]

67 $\begin{cases} \frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{3}+1 \\ x(4x+y+2)=(2x-1)^2+xy+5y+1 \end{cases}$ [25; -20; -34]

Risolvi con il metodo di Cramer i seguenti sistemi.

68 $\begin{cases} -6x+3y=-24 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ [indeterminato]

69 $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 8x-6y=2 \end{cases}$ [impossibile]

70 $\begin{cases} 7x+2y=0 \\ 2x+2y=-10 \end{cases}$ [(2; -7)]

71 $\begin{cases} 12x-2y=-3 \\ 3x+3y=1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{6};\ \frac{1}{2}\right)\right]$

72 $\begin{cases} 4(y-1)=3-4x \\ \frac{x-6}{4}+3y=1 \end{cases}$ $\left[\left(1;\ \frac{3}{4}\right)\right]$

73 Francesco e Paolo lavorano nella stessa azienda. Lo stipendio di Paolo è $\frac{4}{3}$ di quello di Francesco più € 100. I $\frac{2}{5}$ dello stipendio di Francesco più $\frac{1}{4}$ di quello di Paolo è € 1125. **Calcola** quanto guadagna ciascuno dei due amici. [€1500; € 2100]

74 La somma di due numeri è 247, mentre la loro differenza è 1. **Quali sono i due numeri?** [123; 124]

75 Il triplo della differenza di due numeri naturali è 39 e la divisione del primo per il secondo dà come quoziente 2 e resto 1. **Quali sono i due numeri?** [25; 12]

7 Sistemi di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} 5x+y+z=15-y \\ 2x-y-z=5 \\ 2x+y+2z=12-x \end{cases}$$

soluzione: $(3; -1; 2)$ perché

$5 \cdot 3 - 1 + 2 = 15 - (-1)$

$2 \cdot 3 - (-1) - 2 = 5$

$2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 2 = 12 - 3$

La **soluzione** di un sistema di tre equazioni in tre incognite, se esiste, può essere scritta come terna ordinata dei numeri che sono soluzioni di tutte le equazioni.
Per risolvere un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite puoi utilizzare i metodi di **sostituzione**, **confronto** o **riduzione**.

PROVA SUBITO Solo una delle seguenti terne è soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3x+4y+6z=5 \\ 2x-y+3z=-3 \\ -x+y+2z=-1 \end{cases}.$$

Quale?

A $(-1; 2; -1)$ B $(1; 2; -1)$ C $(1; -1; 2)$ D $(1; -1; -2)$

Esercizi

Risolvi i seguenti sistemi di tre equazioni in tre incognite.

76 $\begin{cases} 4x+2y-z=-2 \\ 6x-2y+4z=13 \\ 2x+y-2z=-4 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)\right]$

77 $\begin{cases} x-y+2z=-5 \\ 7x+3y-z=5 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ $[(0; 1; -2)]$

78 Anna, Bea e Carlo fanno spese per un totale di € 180. Bea e Carlo spendono insieme il doppio di quello che spende Anna. Bea spende tanto quanto Anna e Carlo insieme. **Determina** quanto spende ognuno dei tre. [€ 60; € 90; € 30]

79 La somma delle età di tre fratelli è 32.
Due anni fa l'età del maggiore era il doppio di quella del minore.
La differenza fra le età dei due fratelli maggiori è 4.
Quali sono le età dei tre fratelli? [8; 10; 14]

80 In un triangolo, la somma tra il triplo del primo angolo interno e il secondo è uguale alla differenza tra il secondo e il terzo più 160°; la semisomma tra il primo e il terzo angolo interno è pari a 60°. **Calcola** le ampiezze dei tre angoli interni. [20°; 60°; 100°]

81 **Trova** tre numeri sapendo che il triplo della differenza fra il terzo e il secondo è uguale al doppio del primo, il doppio del secondo è uguale al triplo del primo e la somma dei primi due supera di 4 il terzo numero. [12; 18; 26]

ESERCIZI DI RIEPILOGO SISTEMI LINEARI

1 Per quali dei seguenti sistemi $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ è soluzione?

a. $\begin{cases} 2(x+y)=4-2x \\ 8x+y=-1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x+6y=16 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 7x-y=-\frac{13}{2} \\ -14x+2y=-13 \end{cases}$

2 **Completa** con il grado di ciascuno dei seguenti sistemi.

a. $\begin{cases} x^2+y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ ___ **b.** $\begin{cases} x^2y+3x^2+y=5 \\ 2x+3y^2=7 \end{cases}$ ___ **c.** $\begin{cases} y^3+2x+1=0 \\ x^2+3xy=-2 \end{cases}$ ___

3 **Vero o falso?**

a. Un sistema lineare in due equazioni e due incognite ha al massimo una soluzione. V F

b. Se un sistema in due incognite è indeterminato, allora ogni coppia ordinata è soluzione del sistema. V F

c. Se la coppia $(1; 2)$ è soluzione del sistema, allora anche la coppia $(2; 1)$ è soluzione dello stesso sistema. V F

Interpreta graficamente i seguenti sistemi.

4 $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x-1 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} y=-2x+5 \\ 2y=-4x+10 \end{cases}$ **6** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -6x+2y=5 \end{cases}$

7 Per ciascuno dei seguenti sistemi scrivi qual è il metodo più opportuno per risolverlo e spiega perché.

a. $\begin{cases} x=2y+3 \\ x=4y-1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x-2y=-8 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} y=3x+2 \\ 2y+x=11 \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo più opportuno.

8 $\begin{cases} 3x+9y=-1 \\ 5x+y=3 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right]$

9 $\begin{cases} 10x+2y=3 \\ x+3y=\frac{17}{10} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)\right]$

10 $\begin{cases} y-3x=4x+1 \\ -7(x+y)=-8y-1 \end{cases}$ [imp.]

11 $\begin{cases} 2(x-10)+5y=-5y \\ 2(x-y-6)=-(x-y) \end{cases}$ [(5; 1)]

12 $\begin{cases} \frac{4x+y}{5}+\frac{3x+1}{2}-\frac{y+2x}{10}=\frac{5}{2} \\ \frac{6x+5y-5}{2}-\frac{7y-2x+5}{3}=\frac{x-5}{6} \end{cases}$ [indet.]

Risolvi i seguenti problemi.

13 Trova due numeri sapendo che metà della loro somma è uguale a $\frac{7}{4}$ e che la differenza tra il quadruplo del primo e un terzo del secondo è uguale a 1. $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$

14 In un triangolo di perimetro 12 cm la somma tra il primo e il secondo lato è 8 cm e il triplo del secondo più il terzo è 19 cm. Quanto sono lunghi i lati? [3 cm; 5 cm; 4 cm]