Gli angoli

A1

1 DEFINIZIONI DI ANGOLO

1.1 Angolo

La geometria definisce **angolo** ciascuna delle parti del piano in cui esso è diviso da due semirette uscenti da uno stesso punto O; il punto O si dice **vertice** dell'angolo e le due semirette (OA e OB) si dicono *lati*.

Un angolo si indica abitualmente con la notazione letterale $A\widehat{O}B$, oppure con una lettera minuscola dell'alfabeto greco: α, β, γ, δ ecc., ma anche con le lettere minuscole x, y quando è incognito.

1.2 Angolo orientato

Per eliminare l'intrinseca ambiguità della precedente definizione è necessario, nel nostro ambito, *estendere* il concetto di angolo, assumendo una delle due semirette che lo generano (per esempio OA) come **origine** e definendo il **senso di rotazione orario** come senso positivo per le stesse rotazioni.

Un angolo di vertice O e *semiretta origine* $OA = a$ si dice **orientato positivamente** (**figura 1a**) quando questa deve ruotare in senso **orario** intorno a O per sovrapporsi al lato $OB = b$ (*lato estremo*). Si dice **orientato negativamente** se la stessa rotazione avviene in senso antiorario (**figura 1c**).

Nel nostro contesto si fa riferimento, in genere, ad *angoli positivi*, dunque legati alla rotazione *oraria* della semiretta origine.

L'angolo orientato positivo di lati OA e OB in **figura 1a** viene indicato con la notazione $A\widehat{O}B$ (le *prime due lettere* indicano sempre il *lato origine*); mentre quello di **figura 1b** (sempre positivo) viene indicato con la notazione $B\widehat{O}A$ (dunque le notazioni $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}A$ indicano angoli orientati diversi).

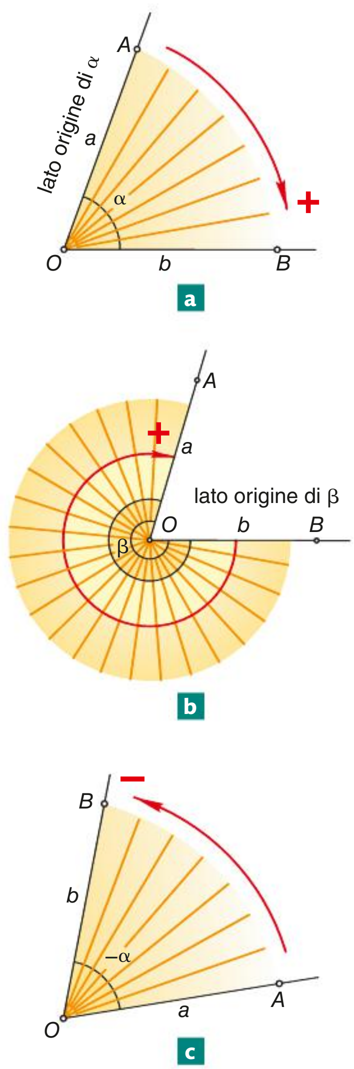


Figura 1
(**a**) Rotazione in senso orario della semiretta OA intorno al punto O per definire l'angolo positivo $\alpha = A\widehat{O}B$. (**b**) Rotazione in senso orario del lato OB per definire l'angolo positivo $\beta = B\widehat{O}A$. (**c**) Rotazione antioraria della semiretta OA per definire l'angolo negativo $-\alpha$.

Scarica la app
GUARDA!
e inquadrami

Video

Angolo orientato α

2 MISURA DEGLI ANGOLI

2.1 Il radiante

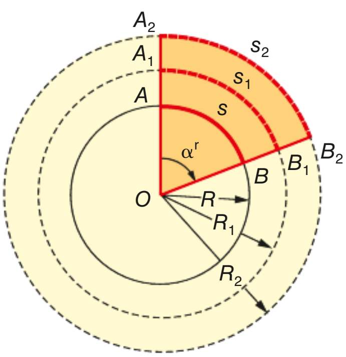
Gli angoli sono grandezze misurabili; ciò impone l'adozione di una *unità di misura*. Nel **SI** (*Sistema Internazionale*), come nelle valutazioni teoriche, tale unità di misura è il *radiante*.

Il **radiante** è definito come l'*angolo al centro* in un cerchio di raggio arbitrario R che sottende un arco il cui sviluppo s è uguale allo stesso raggio R (per il valore in radianti = 1 è $s = R$).

Dunque, per ottenere l'ampiezza in radianti di un **generico** angolo $\alpha = A\widehat{O}B$ (**figura 2**) occorre far riferimento a un cerchio con centro in O e raggio arbitrario $R = \overline{OA} = \overline{OB}$, all'arco s intercettato sul cerchio dalle due semirette OA e OB, ed eseguire il seguente rapporto (**figura 3**):

$$\alpha^r = \frac{s}{R} \tag{1}$$

Naturalmente per $s = R$ si ha $\alpha^r = 1$. I sottomultipli del *radiante* sono *decimi*, *centesimi*, *millesimi* ecc. di radiante. Da semplici valutazioni sulla precedente definizione si ottengono i valori in radianti degli angoli che definiscono i quattro quadranti contenuti nella **tabella 1**.



$$\frac{s}{R} = \frac{s_1}{R_1} = \frac{s_2}{R_2}$$

Figura 2
Costanza del rapporto tra gli archi dei cerchi concentrici (compresi tra due semirette con origine O, formanti l'angolo α) e i corrispondenti raggi.

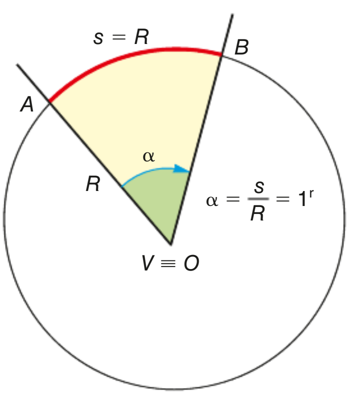
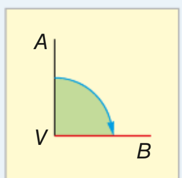
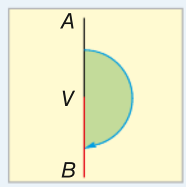
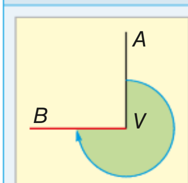
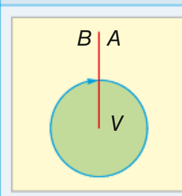


Figura 3
Il valore della misura, in radianti, di un angolo con vertice sul centro di un cerchio di raggio R arbitrario, è data dal rapporto tra lo sviluppo s dell'arco definito dai due lati dell'angolo e lo stesso raggio. Nel caso sia $s = R$ si ha che $\alpha = s/R = 1$ rad, cioè l'unità di misura.

Tabella 1 **Valori in radianti di angoli corrispondenti al passaggio dei quattro quadranti**

Angolo retto	Angolo piatto
 $\frac{\pi R}{2R} = \frac{\pi}{2} = 1^r,57079...$	 $\frac{\pi R}{R} = \pi = 3^r,14159...$
Angolo al 3° quadrante	**Angolo giro**
 $\frac{3}{2}\pi = 4^r,71238...$	 $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6^r,28318...$

2.2 Unità di misura degli angoli non comprese nel SI

Come detto il *radiante* è l'unità di misura degli angoli prevista dal SI; essa è adatta a essere utilizzata nelle valutazioni di ordine **teorico-matematico**, ma non si presta altrettanto bene nel nostro contesto tecnico-operativo. In effetti, nel nostro ambito, è assai più efficace l'utilizzo delle altre due unità di misura angolare, estranee al SI, ma **accettate** per il loro storico impiego: il **grado sessagesimale** e il **grado centesimale** o *gradiente* o *gon*, che danno luogo a tre sistemi di misura angolari, detti *operativi*, in quanto legati alla reale misura degli angoli, la cui definizione è proposta nella **tabella 2**.

Le ragioni della pluralità di questi *sistemi di misura angolare* sono di carattere storico e sono implicite nelle rispettive seguenti tipicità (**figura 4**).

Tabella 2 **Unità di misura angolari non SI ma accettate in ambito operativo**

Sistema	Unità di misura	Nome	Simbolo	Sottomultipli	Formato
Sessagesimale	$\frac{1}{90}$ di angolo retto	grado sessag.	[°]	primo [′]: $\frac{1}{60}$ di [°] secondo [″]: $\frac{1}{60}$ di [′] = $\frac{1}{3600}$ di [°]	86°12′54″
Decimale o sessadecimale	$\frac{1}{90}$ di angolo retto	grado sessag.	[°]	decima, centesima, millesima parte del [°]	86°,2150
Centesimale	$\frac{1}{100}$ di angolo retto	grado cent.	[^{c}], [^{g}], gon	decima, centesima, millesima parte del [^{c}]	95^c,7944 o 95^g,7944 o 95,7944 gon

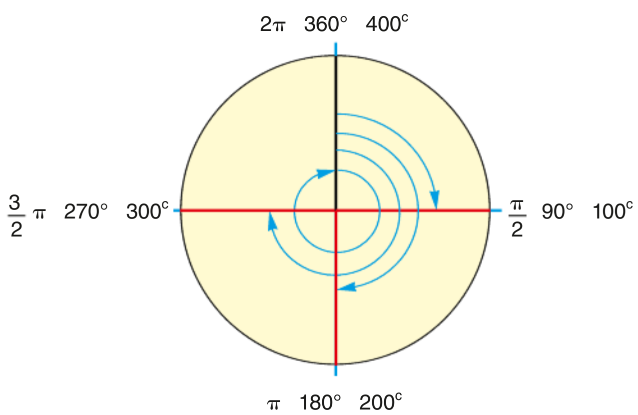


Figura 4
Valori angolari in corrispondenza dei quadranti espressi con le unità di misura definite.

- **Sistema sessagesimale**: è il più antico sistema di misura angolare (ha preceduto di circa mille anni l'uso del *radiante*) e ancora oggi viene utilizzato in ambiti globali come il *posizionamento* dei punti sul pianeta e la *cartografia*. Venne adottato in epoca in cui i calcoli venivano eseguiti **manualmente** o a **mente**, e in effetti la scelta dei suoi **sottomultipli** (che non seguono l'aritmetica decimale), è pensata proprio per facilitare un calcolo mnemonico, in quanto esso avviene considerando separatamente ogni categoria di sottomultiplo. L'unità di misura sessagesimale nelle calcolatrici tascabili viene impostata selezionando la notazione **DEG** (o **D**).
- **Sistema decimale** (o *sessadecimale*): è stato concepito per consentire il *trattamento aritmetico decimale* all'unità di misura *sessagesimale*, dunque per consentire il **calcolo meccanico** (calcolatrici, computer). Pertanto, pur mantenendo la stessa *unità di misura* del sistema sessagesimale, i **sottomultipli** di questo sistema sono *decimi*, *centesimi*, *millesimi* di grado sessagesimale. Se si introducono nella calcolatrice tascabile angoli nel sistema sessagesimale (utilizzando il tasto con etichetta ° ′ ″ o DMS a seconda della marca della calcolatrice), questi, prima del calcolo, vengono automaticamente trasformati nel sistema decimale. Condividendo con il sistema sessagesimale l'unità di misura, anche il *sistema decimale*, nelle calcolatrici tascabili, viene impostato selezionando la notazione **DEG** (o **D**).
- **Sistema centesimale**: è, per noi, il sistema di misura angolare **più efficiente** in quanto, oltre a seguire le regole dell'*aritmetica decimale*, adotta una unità di misura (*grado centesimale* = 1/100 di angolo retto) decisamente più semplice rispetto al grado sessagesimale. Per la sua grande praticità il sistema di misura angolare *centesimale* è, senza dubbio, quello **più utilizzato** in ambito tecnico-operativo. L'unità di misura del *sistema centesimale* nelle calcolatrici tascabili viene impostata selezionando la notazione **GRAD** (o **G**).

FAQ

Che cos'è il radiante?
È l'unità per la misura delle ampiezze degli angoli usata nel contesto teorico-matematico. È definito dal rapporto tra lo sviluppo dell'arco di cerchio compreso tra le due semirette e il raggio arbitrario dello stesso cerchio il cui centro coincide con l'intersezione delle stesse semirette.

FAQ

Il sistema decimale e quello sessagesimale condividono la stessa unità di misura?
Sì, i due sistemi differiscono solo nei sottomultipli, decimali nel primo caso, primi e secondi nel secondo caso.

3 CONVERSIONE DEGLI ANGOLI PIANI TRA LE DIVERSE UNITÀ DI MISURA

3.1 Conversione analitica tra le unità di misura angolari

Capita spesso, nella pratica, di dover **convertire** il valore dell'ampiezza di un angolo espresso con una delle *unità di misura angolare* precedentemente descritte, in una delle altre rimanenti unità.

Indicando allora con α^r, α°, α^c le misure dello stesso angolo α espresse rispettivamente in *radianti*, *gradi sessagesimali* e *gradi centesimali*, possiamo scrivere le seguenti proporzioni:

$$\frac{\alpha^r}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha^c}{200^c} \tag{2}$$

Da queste tre relazioni derivano le proporzioni riportate nella **tabella 3**, che consentono di esprimere l'ampiezza di uno stesso angolo α nelle tre unità di misura angolare precedentemente definite.

Tabella 3 **Proporzioni per la conversione tra le diverse unità di misura angolari**

Radianti ↔ Gradi decimali	Radianti ↔ Gradi centesimali	Gradi centesimali ↔ Gradi decimali
$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\alpha^r \quad (3')$	$\alpha^c = \frac{200^c}{\pi}\alpha^r \quad (4')$	$\alpha^\circ = \frac{9}{10}\alpha^c \quad (5')$
$\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ \quad (3'')$	$\alpha^r = \frac{\pi}{200^c}\alpha^c \quad (4'')$	$\alpha^c = \frac{10}{9}\alpha^\circ \quad (5'')$

Osservando la **tabella 3** possiamo evidenziare anche quanto segue:

- il coefficiente $\frac{200}{180} = \frac{10}{9} = 1,1111...$ trasforma *gradi decimali* in *gradi centesimali* (e, all'inverso, $\frac{180}{200} = \frac{9}{10} = 0,9$ trasforma *gradi centesimali* in *gradi decimali*);
- il coefficiente $\frac{180}{\pi}$ trasforma *radianti* in *gradi decimali* (e, all'inverso, $\frac{\pi}{180}$ trasforma *gradi decimali* in *radianti*);
- il coefficiente $\frac{200}{\pi}$ trasforma *radianti* in *gradi centesimali* (e, all'inverso, $\frac{\pi}{200}$ trasforma *gradi centesimali* in *radianti*).

Per eseguire con le regole dell'*aritmetica decimale* i calcoli che, nelle relazioni della **tabella 3**, coinvolgono i *gradi sessagesimali*, occorre prima trasformare i **sottomultipli** sessagesimali (primi e secondi) in parti decimali del grado, cioè nel **sistema decimale**. È poi anche possibile che si debba effettuare il passaggio inverso, cioè riconvertire *sottomultipli* decimali in *primi* e *secondi* sessagesimali. Questi calcoli, come detto in precedenza, vengono eseguiti direttamente dalla **calcolatrice** tascabile, tuttavia è opportuno per noi avere la consapevolezza di questa operazione anche per poterla eseguire manualmente. In effetti, ricordando che il *sistema decimale* adotta la stessa **unità di misura** del sistema sessagesimale (il grado sessagesimale), possiamo scrivere:

- gradi sessagesimali → gradi decimali:

$$\text{gradi} + \frac{\text{primi}}{60} + \frac{\text{secondi}}{3600}$$

FAQ

A cosa serve il coefficiente 0,9?

A trasformare il valore dell'ampiezza di un angolo da gradi centesimali a gradi decimali.

FAQ

A cosa serve il coefficiente 180/π?

A trasformare il valore dell'ampiezza di un angolo da radianti a gradi decimali.

- gradi decimali → gradi sessagesimali:

  gradi + (decimali dei gradi) · 60 + (decimali dei primi) · 60

Problema 1

Converti i seguenti angoli nelle rimanenti unità di misura angolari:

$1^r{,}0000$ $106^c{,}5321$ $72°55'45''$ $35°{,}6874$

La soluzione

Il calcolo delle conversioni tra le diverse unità di misura angolare richiede l'utilizzo delle formule riportate nella **tabella 3**. Sintetizziamo il calcolo organizzandolo nello schema riportato nella **tabella 4**.

3.2 Conversione tra le unità di misura angolari con la calcolatrice scientifica

Le operazioni di conversione delle unità di misura angolari possono essere eseguite con il supporto di una normale **calcolatrice** tascabile; tuttavia, utilizzando una **calcolatrice scientifica**, è possibile ottenere la conversione angolare in modo **automatico** senza l'applicazione diretta delle proporzioni di cui alla **tabella 3**. La procedura richiesta per la conversione automatica varia in relazione alla **marca** e al **modello** di calcolatrice utilizzata; noi, come esempio, esamineremo quella prevista nelle calcolatrici **Casio** (**figura 5**, pagina seguente).

Intanto osserviamo che le calcolatrici scientifiche possiedono un tasto (° ′ ″ per le calcolatrici Casio, DMS per altre marche) che consente sia l'inserimento degli angoli sessagesimali con i relativi sottomultipli (*gradi, primi, secondi*), ma anche la trasformazione nel sistema decimale, e viceversa, facendo precedere alla selezione del tasto in oggetto quella del tasto SHIFT (seconda funzione del tasto), corrispondente al tasto 2ndF in calcolatrici di altri produttori; in sintesi:

- tasto ° ′ ″: per l'**inserimento** di *gradi, primi, secondi* sessagesimali (**figura 5**),
- sequenza SHIFT + ° ′ ″: per la **conversione** dei *sottomultipli* da sessagesimali a decimali e **viceversa**.

Tabella 4 **Calcoli numerici di conversione tra le diverse unità di misura angolare**

Angoli da convertire	Decimali	Sessagesimali	Centesimali	Radianti
$1^r{,}0000$	$\alpha° = \frac{180}{\pi}\ 1^r = 57°{,}2957$	$57° + 0°{,}2957 \cdot 60 = 57°17'{,}7467 =$ $57°17' + 0'{,}7467 \cdot 60 = 57°17'44''$	$\alpha^c = \frac{200^c}{\pi}\ 1^r = 63^c{,}6619$	-
$106^c{,}5321$	$\alpha° = \frac{9}{10}\ 106^c{,}5321 = 95°{,}8789$	$95° + 0°{,}8789 \cdot 60 = 95°52'{,}7334 =$ $95°52' + 0'{,}7334 \cdot 60 = 95°52'44''$	-	$\alpha^r = \frac{\pi}{200}\ 106^c{,}5321 = 1^r{,}67340$
$72°55'45''$	$72° + \frac{55}{60} + \frac{45}{3600} = 72°{,}9292$	-	$\alpha^c = \frac{10}{9}\ 72°{,}9292 = 81^c{,}0324$	$\alpha^r = \frac{\pi}{180}\ 72°{,}9292 = 1^r{,}27285$
$35°{,}6874$	-	$35° + 0°{,}6874 \cdot 60 = 35°41'{,}2440 =$ $35°41' + 0'{,}2440 \cdot 60 = 35°41'14''$	$\alpha^c = \frac{10}{9}\ 35°{,}6874 = 39^c{,}6527$	$\alpha^r = \frac{\pi}{180}\ 35°{,}6874 = 0^r{,}62286$

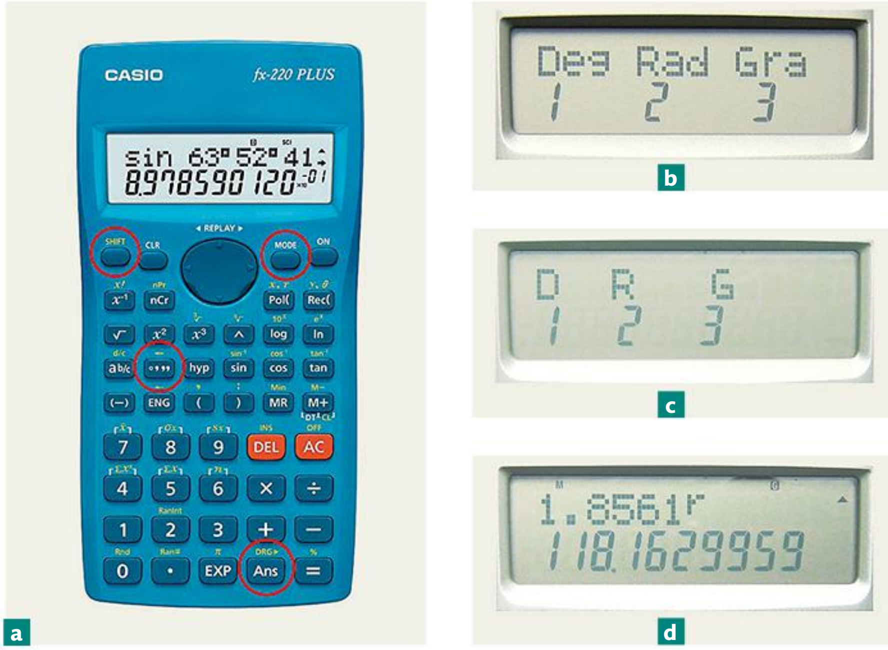


Figura 5
Calcolatrice tascabile scientifica di produzione Casio. I cerchietti rossi evidenziano i tasti dedicati all'inserimento e alla conversione degli angoli (**a**). Stato del display durante le fasi di impostazione dell'unità di misura (**b**) e durante le fasi di conversione angolare (**c**, **d**).

Per esempio, se desideriamo trasformare in *decimali* l'angolo *sessagesimale* 34°15′46″, dovremo procedere selezionando i seguenti tasti della calcolatrice:

[3] + [4] + [° ′ ″] + [1] + [5] + [° ′ ″] + [4] + [6] + [° ′ ″] + [=] o [EXE] sul display: 34°15′46″
[SHIFT] + [° ′ ″] sul display: 34°,26277778

In effetti l'utilizzo della sequenza [SHIFT] + [° ′ ″] consente la trasformazione dei **soli sottomultipli** sessagesimali nel sistema **decimale**, condividendo i due sistemi la medesima *unità di misura* (il grado sessagesimale).

In generale, tuttavia, per trasformare angoli tra **diverse** unità di misura, le calcolatrici mettono a disposizione il tasto [DRG], o la sequenza [SHIFT] + [DRG] (**figura 5**). Più precisamente la procedura di trasformazione richiede i seguenti passaggi.

- Come prima operazione occorre **impostare** la calcolatrice con l'**unità di misura** angolare dell'*angolo trasformato* (risultato della trasformazione). Questo si ottiene premendo il tasto [MODE] una o più volte (in relazione al modello di calcolatrice) fino a raggiungere sul display la schermata di **figura 5b**, quindi selezionando con il tasto [1] o [2] o [3].
- A questo punto possiamo **inserire** il valore dell'angolo di cui vogliamo la trasformazione nell'*unità di misura* impostata al punto precedente, quindi si attiva la sequenza [SHIFT] + [DRG]. Come conseguenza sul display appare la schermata di **figura 5c**, con la quale, selezionando il tasto [1] o [2] o [3] seguito da [=], si definisce l'*unità di misura* dell'angolo appena inserito **da convertire**.
- Dopo le due operazioni precedenti sul *display* della calcolatrice appare l'angolo convertito nell'unità di misura impostata nella prima fase (**figura 5d**).

Per esempio, se vogliamo trasformare in *gradi centesimali* l'angolo espresso in *radianti* 1^r,8561, dovremo procedere nel modo seguente:

- [MODE] … + [3]: per **impostare** la calcolatrice a operare in *gradi centesimali*;
- [1] + [.] + [8] + [5] + [6] + [1] + [SHIFT] + [DRG] + [2] + [=]: sul display appare il risultato 118,162996 gon.

4 MISURA DEGLI ANGOLI CON IL RAPPORTATORE

GUARDA!

Video

Misura dell'angolo α con il rapportatore

Se teniamo a mente la definizione dell'unità di misura **radiante** prima enunciata, è chiaro come il concetto stesso di *misura* di un angolo sia inscindibile da quello di **arco** di cerchio (**figura 3**). Infatti, **misurare** l'ampiezza di un angolo equivale a compararlo con un cerchio di centro O coincidente con il vertice V dell'angolo, per osservare l'entità della **porzione di arco** di cerchio che è contenuta tra i due lati dell'angolo.

In effetti tutti gli strumenti in grado di misurare angoli, denominati **goniometri**, anche se con diverse precisioni, diverse modalità e diversi contesti, si basano su tale semplice principio; pertanto sono provvisti di un **cerchio** sul cui bordo (detto *lembo*) è disposta una **graduazione** che consente di valutare la *porzione di arco* di cerchio intercettata dai lati dell'angolo, dunque la sua *misura*.

Un *goniometro* particolarmente semplice e di basso costo (anche se fornisce la misura dell'angolo con scarsa precisione) è il **rapportatore**, il cui impiego, peraltro, è limitato alla misura di angoli con lati tracciati (dunque materializzati) sulla **carta**. Naturalmente il *rapportatore* può anche essere impiegato, all'inverso, per **riportare** (cioè tracciare), sullo stesso supporto, un angolo di ampiezza assegnata.

In effetti il *rapportatore* è costituito da una **corona circolare** realizzata in materiale plastico trasparente (ma in alcuni casi anche metallico), sulla cui circonferenza è riportata per incisione una **graduazione** (talvolta **due**, una graduata in *gradi sessagesimali*, l'altra in *gradi centesimali*, come illustrato in **figura 6**), e il cui **centro** è materializzato con una *crocetta* o con un *forellino*.

La misura dell'ampiezza degli angoli con il rapportatore è semplice, rapida e costituita dai seguenti tre passaggi (**figura 6a**):

- imporre con cura la **coincidenza** tra il centro O del cerchio (cioè della graduazione) e il vertice V dell'angolo ($O \equiv V$);
- imporre la **coincidenza** dell'origine della graduazione (lo zero) con il primo lato dell'angolo da misurare, mantenendo la condizione descritta al punto precedente;
- eseguire la **lettura** sulla *graduazione* del rapportatore, in corrispondenza del secondo lato dell'angolo α (L_B), lettura che, per come è stato configurato il rapportatore, rappresenta la misura dell'angolo ($\alpha = L_B$).

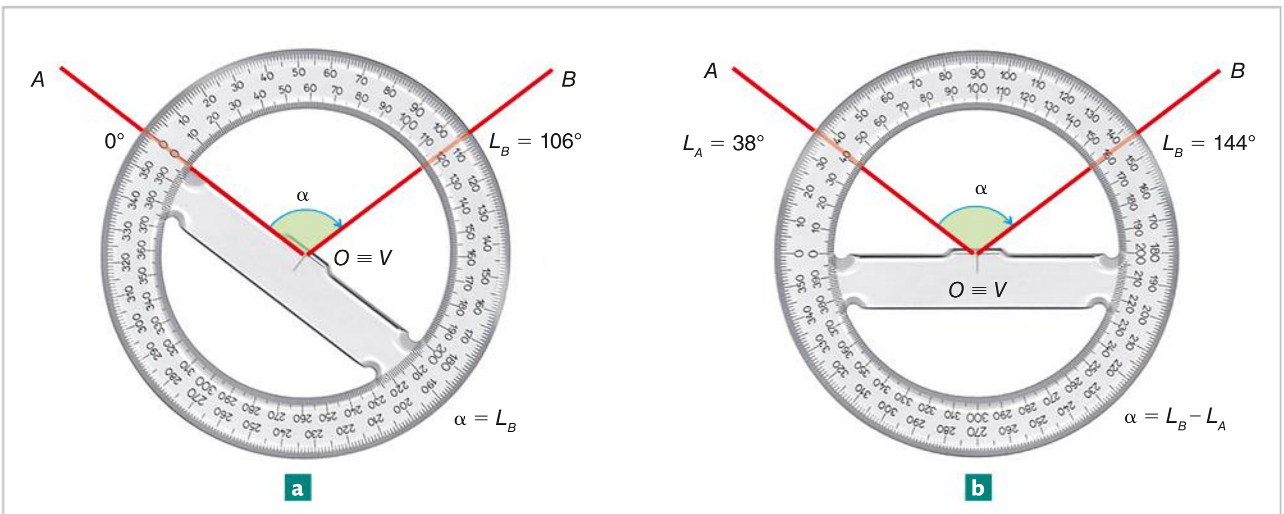


Figura 6
Tecnica di misura degli angoli sulla carta impiegando il rapportatore: con azzeramento della graduazione (**a**) e senza azzeramento della graduazione (**b**). Si noti la doppia graduazione sessagesimale/centesimale.

Questa tecnica ci è familiare in quanto esaminata fin dai primi anni di scuola, tuttavia ora vedremo una ulteriore tecnica di impiego del *rapportatore*, più congeniale alle misure angolari eseguite con altre tipologie di *goniometri* e nel nostro contesto tecnico-operativo. In realtà non si tratta altro che della procedura precedente, nella quale si salta la seconda fase; più precisamente la procedura è la seguente (**figura 6b**):

- imporre con cura la **coincidenza** tra il centro O del cerchio e il vertice V dell'angolo ($O \equiv V$);
- eseguire le **letture** sulla *graduazione* del rapportatore (L_A e L_B) in corrispondenza di entrambi i lati dell'angolo α, la cui ampiezza è fornita dalla **differenza** tra le due letture:

$$\alpha = L_B - L_A$$

La differenza precedente si riferisce al caso di **figura 6b**, in cui l'**origine** della graduazione (0°) è *esterna* all'angolo α; nel caso fosse *interna*, sarebbe necessario aggiungere alla differenza un intero angolo giro:

$$\alpha = L_B - L_A + 360^\circ$$

Come detto l'uso del rapportatore implica le seguenti due limitazioni:

- scarsa **precisione**,
- necessità di **materializzare** (in genere su carta) i lati dell'angolo da *misurare* o da *riportare*.

Quando non è possibile *materializzare* i lati dell'angolo, in quanto essi sono definiti da punti (V, A, B) sul terreno, spesso posizionati a **grandi distanze** e **diverse altezze**, è necessario ricorrere a tipologie di *goniometri* più complessi, come i **teodoliti** (privi di componenti elettronici) o le **stazioni totali** (con componenti elettronici), in grado di misurare gli angoli in tale contesto anche con grandi precisioni. Il loro esame verrà affrontato in seguito (unità D2).

Autovalutazione

Sintesi di fine unità

A Verifica delle conoscenze

Tipo di conoscenze verificate

- Sapere riconoscere le unità di misura del SI delle grandezze utilizzate nell'ambito tecnico.
- Sapere riconoscere le unità dei sistemi di misura angolare nel contesto operativo.

QUESITI VERO/FALSO

Valuta senza l'uso della calcolatrice.

		V	F
1	La definizione geometrica classica di angolo prevede valori negativi	☐	☐
2	La definizione di angolo orientato prevede la definizione di un lato origine	☐	☐
3	Il radiante è una parte geometrica dei cerchi	☐	☐
4	L'angolo $\alpha = 3\pi/2$ e quello $\beta = 300^c$ hanno la stessa ampiezza	☐	☐
5	La misura in radianti dell'angolo di ampiezza 220° è di $5\pi/6$	☐	☐
6	La trasformazione di un angolo nei vari sistemi di misura non è sempre possibile	☐	☐
7	Gli angoli $\alpha = 41^\circ{,}5000$ e $\beta = 41^\circ 30' 00''$ hanno la stessa ampiezza	☐	☐
8	Il rapporto $\pi/200$ serve a trasformare radianti in gradi centesimali	☐	☐
9	L'angolo $\alpha = 0^\circ 4' 12''$ e l'angolo $\beta = 252''$ si equivalgono	☐	☐
10	Il sistema centesimale è quello più utilizzato in topografia	☐	☐

11 La somma tra due angoli è sempre ammissibile ☐ ☐

12 Il prodotto tra due angoli è sempre ammissibile ☐ ☐

13 La divisione di un angolo con uno scalare è sempre ammissibile ☐ ☐

14 Le notazioni convenzionali *ASB* e *BSA* indicano lo stesso angolo orientato ☐ ☐

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Una sola risposta è corretta

15 Le ampiezze dei tre angoli interni di un triangolo equilatero valgono

a $\pi/2$ b $\pi/4$
c $\pi/3$ d $\pi/6$

16 Se in un triangolo isoscele l'angolo compreso tra i lati uguali è di $\pi/4$, le ampiezze di ciascuno degli angoli uguali valgono

a $3\pi/2$ b $3\pi/4$
c $3\pi/5$ d nessuna delle precedenti

17 L'angolo $\alpha = 1^r{,}2436$ espresso in gradi centesimali vale

a $59^c{,}2245$ b $69^c{,}0055$
c $79^c{,}1700$ d $97^c{,}1177$

18 L'angolo $\alpha = 1^r{,}2436$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $87°12'15''$ b $71°14'71''$
c $68°41'25''$ d nessuna delle precedenti

19 L'angolo $\alpha = 215^c{,}2938$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $199°02'24''$ b $235°18'21''$
c $193°45'52''$ d nessuna delle precedenti

20 L'angolo $\alpha = 124°42'16''$ espresso in gradi centesimali vale

a $159^c{,}2436$ b $142^c{,}2287$
c $135^c{,}3800$ d $138^c{,}5605$

21 L'angolo $\alpha = 85°47'26''$ espresso in radianti vale

a $1^r{,}4973$ b $1^r{,}2247$
c $1^r{,}0351$ d $0^r{,}9892$

22 L'angolo $\alpha = 136^c{,}4167$ espresso in radianti vale

a $1^r{,}9866$ b $2^r{,}1428$
c $2^r{,}5234$ d $2^r{,}0865$

23 L'angolo $\alpha = 21^c{,}9808$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $19°46'48''$ b $19°46'58''$
c $19°46'35''$ d nessuna delle precedenti

24 L'angolo $\alpha = 42°{,}8400$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $42°50'10''$ b $42°50'20''$
c $42°50'30''$ d nessuna delle precedenti

25 L'angolo $\alpha = 75°46'00''$ espresso in gradi centesimali vale

a $84^c{,}1852$ b $84^c{,}1462$
c $84^c{,}1222$ d nessuna delle precedenti

B Verifica delle competenze

Tipo di competenze verificate

- Sapere trasformare un angolo nelle diverse unità di misura.
- Sapere eseguire le operazioni fondamentali con gli angoli.
- Sapere utilizzare la calcolatrice nell'eseguire le operazioni con gli angoli.

ESERCIZI E PROBLEMI

26 Trasforma in radianti i seguenti angoli:

$267°{,}7654 \qquad 94°37'12'' \qquad 78^c{,}4558$

[$4^r{,}6734$; $1^r{,}6514$; $1^r{,}2324$]

27 Trasforma in gradi decimali i seguenti angoli:

$2^r{,}8761 \qquad 22°58'46'' \qquad 128^c{,}4576$

[$164°{,}7884$; $22°{,}9794$; $115°{,}6118$]

28 Trasforma in gradi sessagesimali i seguenti angoli:

$5^r{,}3451 \qquad 43°{,}4003 \qquad 67^c{,}1632$

[$306°15'06''$; $43°24'01''$; $60°26'49''$]

29 Trasforma in gradi centesimali i seguenti angoli:

$0^r{,}9963 \qquad 125°{,}4368 \qquad 170°46'07''$

[$63^c{,}4264$; $139^c{,}3742$; $189^c{,}7429$]

30 I due angoli α e β sono complementari; sapendo che $\alpha = 43°12'56''$, determina il valore dell'angolo β esprimendolo in radianti. [$\beta = 0^r{,}81654$]

31 I tre angoli α, β e γ sono supplementari; sapendo che $\alpha = 66°{,}5782$ e $\beta = 75°{,}0284$, determina il valore dell'angolo γ esprimendolo in gradi, primi e secondi sessagesimali. [$\gamma = 38°23'36''$]

32 I tre angoli α, β e γ hanno le seguenti ampiezze: $\alpha = 55°18'44''$, $\beta = 42°{,}7688$ e $\gamma = 1^r{,}2597$. Determina la loro somma esprimendola in gradi centesimali. [$\alpha + \beta + \gamma = 189^c{,}1739$]

33 Due rette si intersecano in un punto *V* formando due coppie di angoli opposti al vertice. Sapendo che ciascun angolo della prima coppia di angoli opposti al

Autovalutazione

vertice vale $\alpha = \beta = 133^c{,}9074$, determina il valore di ciascun angolo della seconda coppia di angoli opposti al vertice, esprimendola in radianti. $[\gamma = \delta = 1^r{,}03818]$

34 La somma di due angoli α e β è di $80^\circ{,}3333$, mentre la differenza degli stessi angoli è $0^r{,}07098$. Determina il valore di ciascuno dei due angoli esprimendoli in gradi sessagesimali. $[\alpha = 42^\circ 12' 00''; \beta = 38^\circ 08' 00'']$

35 La differenza di due angoli complementari α e β è di $12^\circ{,}3333$. Determina il valore di ciascuno dei due angoli esprimendoli in gradi centesimali. $[\alpha = 56^c{,}8518; \beta = 43^c{,}1482]$

36 La somma di due angoli α e β è di $1^r{,}20428$. Sapendo che α è la metà di β, determina il valore di ciascuno dei due angoli esprimendoli in gradi centesimali. $[\alpha = 25^c{,}5556; \beta = 51^c{,}1111]$

37 I tre angoli α, β e γ sono supplementari, mentre α e β sono complementari. Sapendo che $\alpha - \beta = 16^c{,}4444$, determina il valore di ciascuno dei tre angoli esprimendoli in gradi centesimali. $[\alpha = 58^c{,}2222; \beta = 41^c{,}7777; \gamma = 100^c]$

38 I tre angoli α, β e γ sono supplementari. Sapendo che $\gamma = 38^c{,}0066$ e che $\beta = 4\alpha$, determina il valore di ciascuno dei due angoli α e β esprimendoli in gradi decimali. $[\alpha = 116^\circ{,}6352; \beta = 29^\circ{,}1588]$

39 La somma dei tre angoli α, β e γ è uguale all'angolo giro. Sapendo che $\gamma = 1^r{,}2168$ e che $\alpha = 3\beta$, determina il valore di ciascuno dei due angoli α e β esprimendoli in gradi centesimali. $[\alpha = 241^c{,}9021; \beta = 80^c{,}6340]$

40 La somma dei tre angoli α, β e γ è $252^\circ 42' 36''$. Sapendo che $\beta = 2\alpha$ e che $\gamma = 2\beta$, determina il valore di ciascuno dei due angoli α e β esprimendoli in gradi centesimali. $[\alpha = 40^c{,}1127; \beta = 80^c{,}2254; \gamma = 160^c{,}4508]$

41 L'angolo al vertice γ di un triangolo isoscele è $\pi/5$ radianti. Determina il valore di ciascuno dei due angoli alla base esprimendoli in gradi centesimali. $[\gamma = 80^c{,}0000]$

42 L'angolo al vertice γ di un triangolo isoscele è maggiore di $42^c{,}0000$ di ciascuno degli angoli α e β alla base dello stesso triangolo. Determina il valore di ciascuno dei tre angoli del triangolo esprimendoli in gradi sessagesimali. $[\alpha = \beta = 47^\circ 24' 00''; \gamma = 85^\circ 12' 00'']$

43 Su un cerchio di centro O e di raggio 98,70 m, un arco di estremi A e B ha uno sviluppo di 130,18 m. Determina il valore del corrispondente angolo al centro $A\widehat{O}B$ esprimendolo in gradi centesimali. $[A\widehat{O}B = 83^c{,}9667]$

44 Su un cerchio di centro O e di raggio 122 m, l'angolo al centro di un arco di estremi A e B ha un valore di $79^c{,}5775$. Determina il valore dello sviluppo dell'arco $\widehat{AB}$. $[\widehat{AB} = 152{,}50 \text{ m}]$

45 In un quadrilatero gli angoli interni si succedono in modo tale che ciascuno di essi è maggiore di quello che lo precede di $22^\circ{,}0000$. Determina il valore dei quattro angoli del quadrilatero esprimendoli in gradi centesimali. [*Suggerimento*: la somma degli angoli interni di un quadrilatero è di 360°.] $[\alpha = 63^c{,}3333; \beta = 87^c{,}7777; \gamma = 112^c{,}2222; \delta = 136^c{,}6666]$

46 In un poligono di 5 lati con vertici A, B, C, D, E, si conoscono i seguenti quattro angoli interni:

$$A\widehat{B}C = 154^\circ 35' 49{,}7'' \qquad B\widehat{C}D = 70^c{,}88416$$
$$C\widehat{D}E = 141^c{,}75482 \qquad D\widehat{E}A = 1^r{,}507865$$

Determina il valore del quinto angolo $E\widehat{A}B$, espresso in gradi sessagesimali, gradi centesimali e in radianti. [*Suggerimento*: la somma degli angoli interni di un poligono di 5 lati è di 540°.] $[107^\circ 38' 0{,}52''; 119^c{,}59275; 1^r{,}87856]$

47 Sono noti i seguenti tre angoli:

$$\alpha = 134^\circ{,}2456 \qquad \beta = 149^c{,}6845 \qquad \gamma = 134^\circ 01' 24''$$

Calcola il valore, esprimendolo in radianti, della media aritmetica δ dei tre precedenti angoli. $[\delta = 2^r{,}34447]$

48 Sono noti i seguenti quattro angoli orientati:

$$\alpha = 33^\circ{,}0052 \qquad \beta = 28^c{,}9787$$
$$\gamma = 44^\circ 03' 11'' \qquad \delta = 0^r{,}12591$$

Calcola il valore, in gradi sessagesimali, della seguente operazione algebrica:

$$\varepsilon = \alpha + \frac{\gamma - \delta}{2} - \beta$$

$[\varepsilon = 25^\circ 20' 38'']$

Risultati dei quesiti vero/falso

1F, 2V, 3F, 4V, 5F, 6F, 7V, 8F, 9V, 10V, 11V, 12F, 13V, 14F.

Risultati dei quesiti a risposta multipla

15c, 16d, 17c, 18b, 19c, 20d, 21a, 22b, 23b, 24d, 25a.