CAPITOLO 21
FUNZIONI, SUCCESSIONI E LORO PROPRIETÀ

Il prezzo è giusto!

Ci sono *funzioni* utilizzate per descrivere variabili economiche. In particolare, si usano la *funzione della domanda* e la *funzione dell'offerta* per determinare il prezzo di un paio di scarpe, della benzina, di un pacco di pasta...
Infatti, il prezzo di un bene sale o scende a seconda che esso sia più o meno richiesto (domanda) e più o meno presente (offerta) sul mercato.

Per la vendita di mele, come determiniamo il prezzo al quintale con un modello matematico?

→ La risposta a pag. 1344

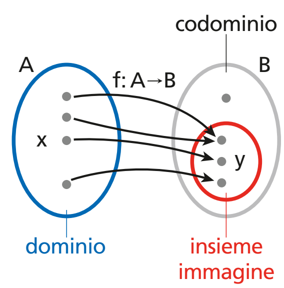
1 Funzioni reali di variabile reale

Definizione di funzione

→ Esercizi a p. 1358

Richiamiamo il concetto di funzione reale di variabile reale.

DEFINIZIONE
Dati due sottoinsiemi A e B (non vuoti) di $\mathbb{R}$, una **funzione** f da A a B è una relazione che associa a *ogni* numero reale di A *uno e un solo* numero reale di B.



Scriviamo: $f: A \to B$.
Se a $x \in A$ la funzione f associa $y \in B$, diciamo che y è **immagine** di x mediante f.
La legge che definisce la funzione f molto spesso viene indicata con l'equazione $y = f(x)$, detta **espressione analitica** della funzione.
In una funzione $y = f(x)$, x è detta **controimmagine** di y mediante f.
Gli insiemi A e B vengono detti rispettivamente **dominio** e **codominio** della funzione. Il sottoinsieme di B formato dalle immagini degli elementi di A è detto **insieme immagine** di A ed è indicato con $f(A)$, con $Im\,(f)$ o con Im. Se non diamo indicazioni diverse, consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ come codominio di una funzione.

ESEMPIO
La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, descritta dalla legge matematica $y = -\frac{3}{2}x + 3$, associa a ogni valore di x uno e un solo valore di y. Per esempio, per $x = 4$ si ha $y = -3$.

Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo

In una funzione $y = f(x)$, x è detta **variabile indipendente**, mentre y è detta **variabile dipendente**.
Una funzione può essere anche indicata con un'espressione del tipo $f(x; y) = 0$, detta **forma implicita**, mentre $y = f(x)$ è detta **forma esplicita** rispetto alla variabile y. Per esempio, la funzione $3x + 2y - 6 = 0$ è la forma implicita di $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

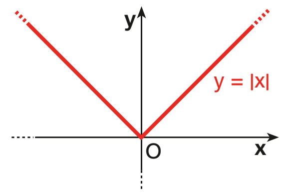
Di una funzione f possiamo disegnare il **grafico** nel piano cartesiano, cioè l'insieme dei punti $P(x; y)$ tali che y è immagine di x mediante f, ossia l'insieme dei punti $P(x; f(x))$. Del grafico possiamo cercare le **intersezioni con gli assi**, che si determinano mettendo a sistema l'equazione della funzione con $y = 0$ (equazione dell'asse x) o con $x = 0$ (equazione dell'asse y).

Esistono funzioni, dette **funzioni definite a tratti**, date da espressioni analitiche diverse a seconda dei valori attribuiti alla variabile indipendente.

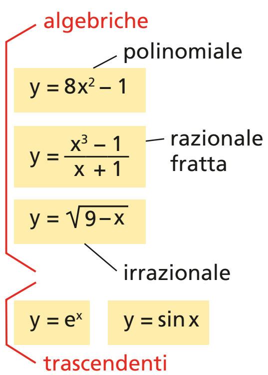
ESEMPIO

Funzione valore assoluto:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$



Classificazione delle funzioni



La funzione è **algebrica** se l'espressione analitica $y = f(x)$ che la descrive contiene solo, per la variabile x, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice. Una funzione algebrica è:

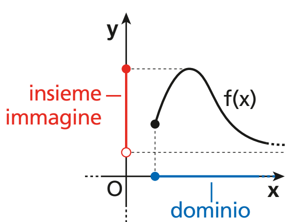
- **razionale intera** o **polinomiale** se è espressa mediante un polinomio; in particolare se il polinomio è di primo grado rispetto alla variabile x, la funzione è **lineare**, se il polinomio in x è di secondo grado, la funzione è **quadratica**;
- **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi;
- **irrazionale** se la variabile indipendente x compare sotto il segno di radice.

Se una funzione $y = f(x)$ non è algebrica, si dice **trascendente**.

Dominio di una funzione

→ Esercizi a p. 1360

Dominio naturale



> Qual è il dominio di $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}{x - 3}$?
>
> **Animazione** nell'eBook

DEFINIZIONE

Il **dominio naturale** (o **campo di esistenza**) della funzione $y = f(x)$ è l'insieme più ampio dei valori reali che si possono assegnare alla variabile indipendente x affinché esista il corrispondente valore reale y.

Molto spesso una funzione viene assegnata senza indicare il dominio.
In questi casi deve essere determinato il suo *dominio naturale* e chiamiamo il dominio naturale anche soltanto **dominio**. Lo indichiamo con D.

Per esempio, la funzione $y = \sqrt{x^2 - 4}$ ha come dominio D: $x \leq -2 \vee x \geq 2$.

Domini delle funzioni principali	
Funzione	**Dominio**
Funzioni razionali intere: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P e Q polinomi)	$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $Q(x)$
Funzioni irrazionali: $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}, \text{ se } n \text{ è pari} \\ \text{dominio di } f(x), \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
Funzioni logaritmiche: $y = \log_a f(x) \qquad a > 0, a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
Funzioni esponenziali: $y = a^{f(x)} \qquad a > 0, a \neq 1$ $y = [f(x)]^{g(x)}$ $f(x)^{\alpha} \qquad \alpha$ irrazionale	 dominio di $f(x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap$ dominio di $g(x)$ $\begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}, \text{ se } \alpha > 0 \\ \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}, \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$
Funzioni goniometriche: $y = \sin x$, $y = \cos x$ $y = \tan x$ $y = \cot x$ $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$	 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, con $k \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$ $[-1; 1]$ $\mathbb{R}$

> Trova il dominio di
> **a.** $y = (x-1)^{\sqrt{x}}$;
> **b.** $y = x^{\pi}$;
> **c.** $y = (x-2)^{-\pi}$.

Video

Dominio di una funzione
Il dominio della funzione $f(x) = \tan x \cos x$ è lo stesso dominio della funzione $f(x) = \sin x$? Facciamo alcuni esempi.

TEORIA

Funzioni uguali

DEFINIZIONE
$y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono **funzioni uguali** se hanno lo stesso dominio D e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in D$.

ESEMPIO

Le funzioni $f(x) = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}$ e $g(x) = x$ sono uguali perché hanno lo stesso dominio $\mathbb{R}$ e $f(x) = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-1}$ e $g(x) = x$ *non* sono uguali: $\dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$ *solo se* $x \neq 1$.

Zeri e segno di una funzione

→ Esercizi a p. 1370

Un numero reale a è uno **zero della funzione** $y = f(x)$ se $f(a) = 0$.

Nel grafico di $f(x)$ gli zeri sono le ascisse degli eventuali punti di intersezione con l'asse x.
Gli eventuali punti di intersezione con l'asse y si ottengono calcolando $y = f(0)$, se $x = 0$ appartiene al dominio di f.

È possibile anche **studiare il segno** di una funzione $y = f(x)$, cioè cercare per quali valori di x appartenenti al dominio il corrispondente valore di y è positivo, e per quali è negativo. Per esempio, la funzione $y = 2x - 6$ risulta positiva per $x > 3$, nulla per $x = 3$, negativa per $x < 3$.

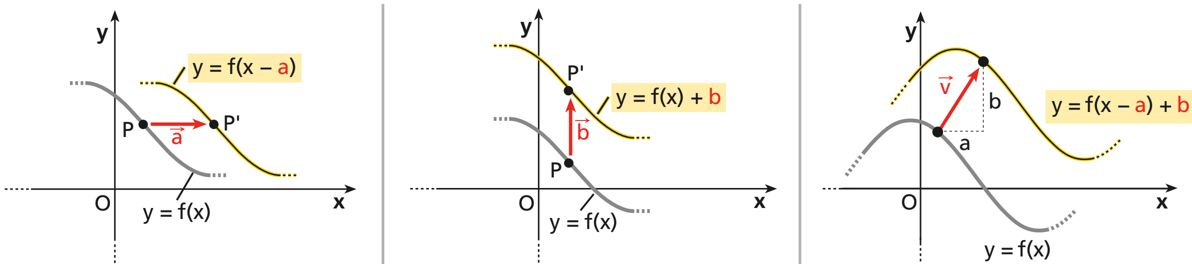
T TEORIA

Animazione nell'eBook

Studiamo i tre casi della figura sotto, partendo dalla funzione $y = 9 - x^2$ e usando una figura dinamica al variare di a e b nel vettore di traslazione $\vec{v}(a; b)$.

Grafici delle funzioni e trasformazioni geometriche

Traslazioni
Dato il grafico di una funzione $y = f(x)$, mediante una traslazione di vettore $\vec{v}$ otteniamo il grafico di una nuova funzione, che chiamiamo **funzione traslata**. Nella figura distinguiamo tre casi, di cui i primi due sono casi particolari del terzo, rispettivamente con $b = 0$ e con $a = 0$.



a. Traslazione di vettore $\vec{a}(a; 0)$ parallelo all'asse x.

b. Traslazione di vettore $\vec{b}(0; b)$ parallelo all'asse y.

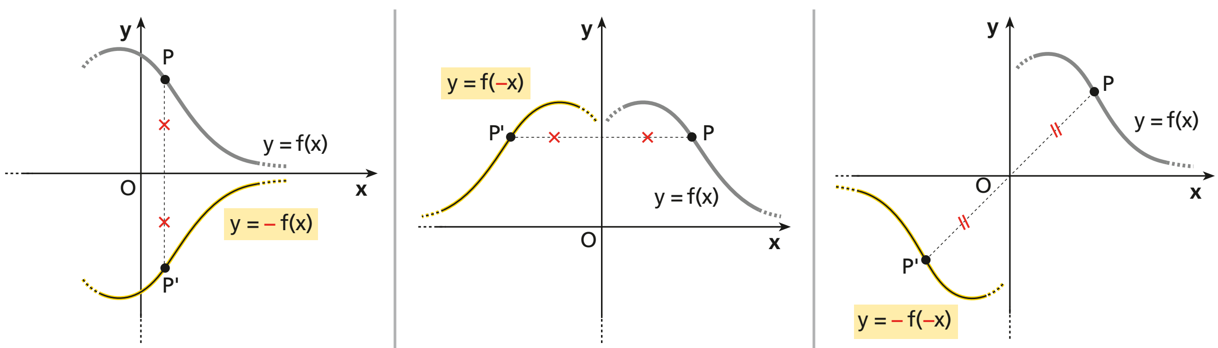
c. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$.

Simmetrie
Data una funzione di equazione $y = f(x)$, con considerazioni analoghe a quelle utilizzate per la traslazione, si può dimostrare che la funzione:

a. $y = -f(x)$ ha il grafico simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse x;

b. $y = f(-x)$ ha il grafico simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse y;

c. $y = -f(-x)$ ha il grafico simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'origine.



a. Simmetria rispetto all'asse x.

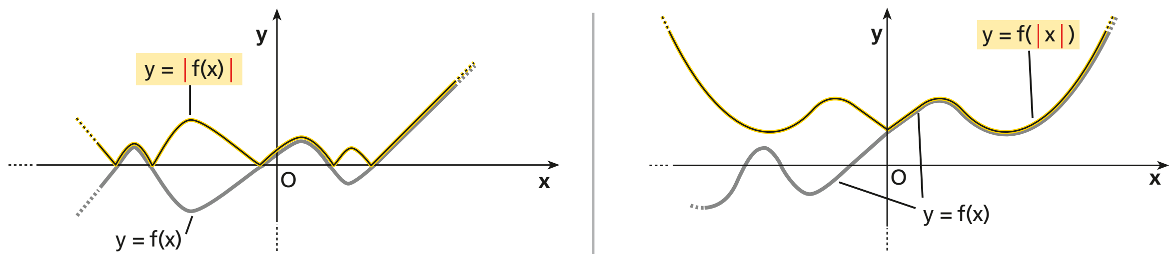
b. Simmetria rispetto all'asse y.

c. Simmetria centrale rispetto a O.

Per ottenere il grafico di $\boldsymbol{y = |f(x)|}$, dove $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$, disegniamo il grafico di $y = f(x)$ e confermiamo il grafico di f per i punti del grafico che appartengono al semipiano delle ordinate positive o nulle; consideriamo il simmetrico rispetto all'asse x del grafico di f per i punti del grafico che appartengono al semipiano delle ordinate negative.

La funzione $\boldsymbol{y = f(|x|)}$, dove $f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$,

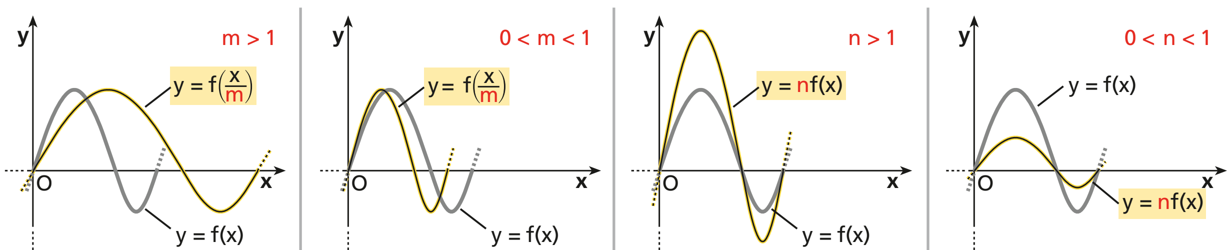
- se $x \geq 0$ (semipiano delle ascisse positive), ha lo stesso grafico di $y = f(x)$;
- se $x < 0$ (semipiano delle ascisse negative), ha il grafico di $y = f(-x)$, che si ottiene tracciando il simmetrico rispetto all'asse y del grafico di $y = f(x)$.



a. Simmetria rispetto all'asse x delle parti del grafico di $y = f(x)$ con $y < 0$.

b. Per $x \geq 0$ il grafico è lo stesso di $y = f(x)$, per $x < 0$ il grafico è il simmetrico rispetto all'asse y del grafico di $y = f(x)$ per $x > 0$.

Dilatazioni e contrazioni



a. Dilatazione orizzontale. **b.** Contrazione orizzontale. **c.** Dilatazione verticale. **d.** Contrazione verticale.

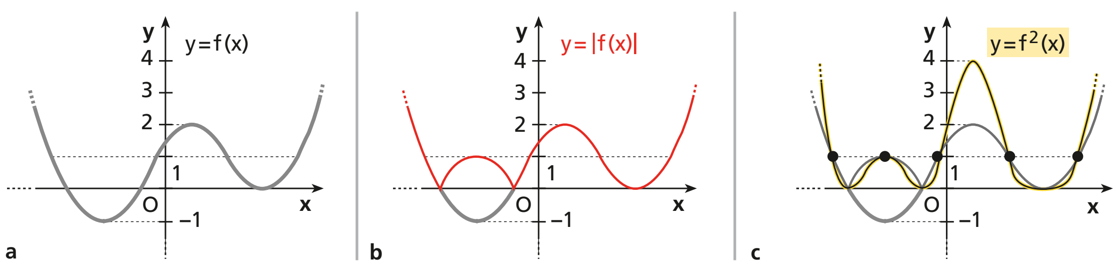
Grafico di $y = f^2(x)$

Dato il grafico di $y = f(x)$, per tracciare l'andamento di quello di $y = f^2(x)$, disegniamo il grafico di $|f(x)|$ e teniamo conto che:

1. se $|f(x)| = 1$, $\quad f^2(x) = 1$;
2. se $|f(x)| = 0$, $\quad f^2(x) = 0$;
3. se $|f(x)| < 1$, $\quad f^2(x) < |f(x)|$;
4. se $|f(x)| > 1$, $\quad f^2(x) > |f(x)|$.

Animazione nell'eBook

Studiamo i quattro casi della dilatazione, partendo dalla funzione $y = x^2 - 3x$ e usando una figura dinamica in cui possiamo variare m e n.



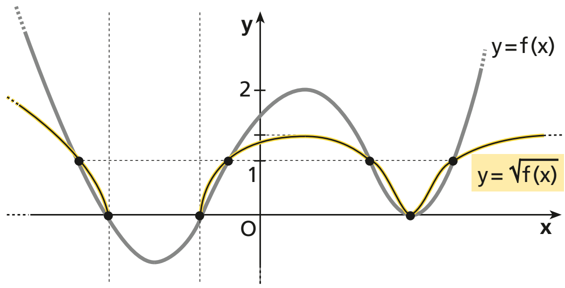


Grafico di $y = \sqrt{f(x)}$

Dato il grafico di $y = f(x)$, per tracciare l'andamento di quello $y = \sqrt{f(x)}$, osserviamo che:

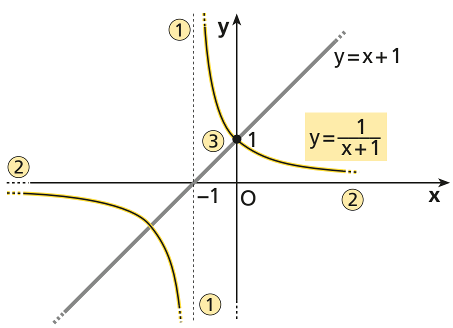
1. se $f(x) < 0$, $\quad \sqrt{f(x)}$ non esiste;
2. se $f(x) = 0$, $\quad \sqrt{f(x)} = 0$;
3. se $f(x) = 1$, $\quad \sqrt{f(x)} = 1$;
4. se $0 < f(x) < 1$, $\quad f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;
5. se $f(x) > 1$, $\quad 1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.

T TEORIA

Grafico di $y = \dfrac{1}{f(x)}$

1. Se $f(x) = 0$ in x_0, $\dfrac{1}{f(x)}$ non esiste in x_0, ma per x che si avvicina a x_0:
   - se $f(x) > 0$, $\dfrac{1}{f(x)}$ assume valori positivi sempre più grandi; diciamo che $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a $+\infty$;
   - se $f(x) < 0$, $\dfrac{1}{f(x)}$ assume valori negativi, in valore assoluto sempre più grandi; diciamo che $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a $-\infty$.

   La retta $x = x_0$ è asintoto verticale.
2. Se $f(x)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a 0.
3. Se $f(a) = 1$ o $f(a) = -1$, a è punto di intersezione fra i grafici di $f(x)$ e di $\dfrac{1}{f(x)}$.



① Se $x+1=0$, $\nexists \dfrac{1}{x+1}$, ma:
se $x \to -1^+$, $\dfrac{1}{x+1} \to +\infty$;
se $x \to -1^-$, $\dfrac{1}{x+1} \to -\infty$.

② Se $x+1$ tende a $-\infty$ o a $+\infty$, $\dfrac{1}{x+1}$ tende a 0.

③ Il punto di ordinata 1, appartenente a $y=x+1$, appartiene anche a $y=\dfrac{1}{x+1}$.

MATEMATICA E STORIA

› **Polinomi identici**
Augustin-Louis Cauchy, nel suo *Cours d'analyse* (1821), scrive:
«I due polinomi $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$, entrambi di grado $n-1$, risultano uguali per ciascuno dei valori $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$».
Prendendo spunto dal suo testo, risolviamo alcuni problemi.

PDF **Risposta – Esercizi in più**

Listen to it

A **function** from a set *A* to a set *B* is said to be:
- an **injection** (or an **injective function**) if it maps distinct objects of set *A* to distinct objects of set *B*;
- a **surjection** (or a **surjective function**) if each element of *B* is the image of at least one element of *A*;
- a **bijection** (or a **bijective function**) if it is both injective and surjective.

2 Proprietà delle funzioni

Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

→ Esercizi a p. 1376

DEFINIZIONE

Una funzione da *A* (dominio) a *B* (codominio) è:
- **iniettiva** se ogni elemento di *B* è immagine di al più un elemento di *A*;
- **suriettiva** se ogni elemento di *B* è immagine di almeno un elemento di *A*;
- **biunivoca** (o biiettiva) se è sia iniettiva sia suriettiva.

Una definizione equivalente di funzione iniettiva è la seguente:

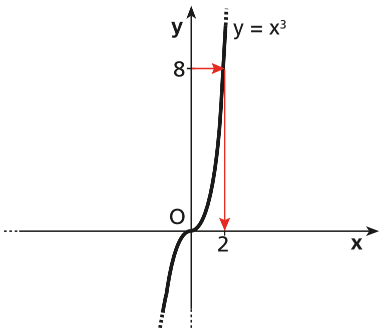
una funzione è *iniettiva* se a elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, ossia

$$x_1 \neq x_2 \quad \rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

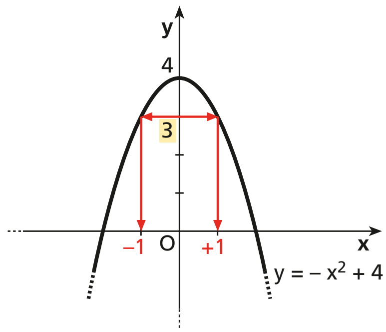
Ogni funzione è suriettiva se si prende come codominio l'insieme immagine della funzione.

ESEMPIO

Entrambi i grafici rappresentano delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



a. La funzione $y = x^3$ è sia iniettiva sia suriettiva perché ogni valore scelto sull'asse y è immagine di *un* valore (suriettiva) e *un solo* (iniettiva) valore sull'asse x. La funzione è quindi biunivoca.



b. La funzione $y = -x^2 + 4$ è suriettiva se si considera come codominio B l'insieme immagine $]-\infty; 4]$, ma *non* è iniettiva perché, scelto nell'insieme immagine un y diverso da 4, esso è l'immagine di **due** valori distinti di x.

Animazione nell'eBook

Studiamo l'iniettività e la non iniettività delle due funzioni dell'esempio, anche mediante figure dinamiche.

TEORIA

▶ Disegna il grafico di una funzione suriettiva su $\mathbb{R}$ che non sia iniettiva.

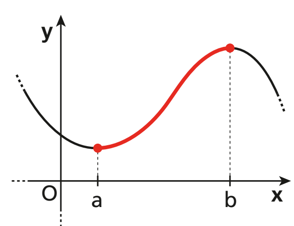
Funzioni crescenti, decrescenti, monotòne

→ Esercizi a p. 1377

Funzioni crescenti

DEFINIZIONE

$y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una **funzione crescente** in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $\boldsymbol{x_1 < x_2}$, risulta $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$.



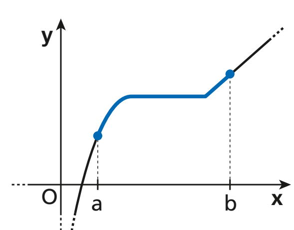
f(x) crescente in [a; b]

a

ESEMPIO

La funzione $y = \cos x$ è crescente in senso stretto in $[\pi; 2\pi]$.

Se nella definizione sostituiamo la relazione $f(x_1) < f(x_2)$ con $f(x_1) \leq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **crescente in senso lato**, o anche **non decrescente**. Si può anche dire che la funzione è **debolmente crescente**.



f(x) non decrescente in [a; b]

b

Funzioni decrescenti

DEFINIZIONE

$y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una **funzione decrescente** in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $\boldsymbol{x_1 < x_2}$, risulta $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$.

▶ In quale intervallo la funzione $y = x^2 - 2x + 1$ è decrescente?

Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) > f(x_2)$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **decrescente in senso lato**, o anche **non crescente**. In questo caso si può anche dire che la funzione è **debolmente decrescente.**

In seguito, se diremo che una funzione è crescente (o decrescente), senza aggiungere altro, sarà sottinteso che lo è in senso stretto.

Funzioni monotòne

DEFINIZIONE
Una funzione di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è **monotòna** in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se in quell'intervallo è sempre crescente o sempre decrescente in senso stretto. Analoga definizione può essere data per una funzione monotòna in senso lato.

Una funzione f monotòna in senso stretto è sempre iniettiva. Infatti, se f è monotòna in senso stretto, allora per ogni $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$; quindi risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè f è iniettiva.

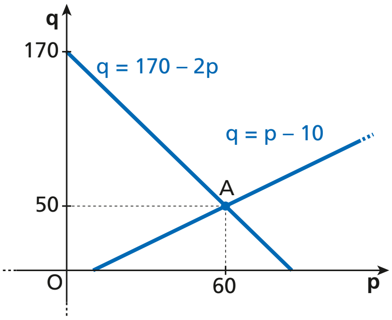
TEORIA

Quale delle due funzioni
$y = x^2 - 4x + 4$,
$y = \frac{1}{2}x + 1$
è monotòna?

ESEMPIO
$y = \sin x$ è monotòna in senso stretto nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e in tale intervallo è iniettiva. Invece, la stessa funzione non è monotòna in $[0; \pi]$, dove non è iniettiva.

ESEMPIO Il prezzo di equilibrio
Le leggi di mercato della domanda e dell'offerta di un prodotto determinano il suo prezzo di vendita, che si ottiene quando la domanda e l'offerta coincidono (punto di equilibrio).

Esaminiamo un esempio in un modello semplificato. In un determinato periodo dell'anno, la quantità di mele richiesta sul mercato segue la legge della domanda $q(p) = 170 - 2p$, mentre la legge dell'offerta è $q(p) = p - 10$, dove p è il prezzo in euro al quintale e $q(p)$ è la quantità di mele in quintali.



- Verifichiamo che sono funzioni monotòne.
- Calcoliamo il prezzo di vendita al quintale delle mele e quanti quintali di mele corrispondono al punto di equilibrio.

Le due funzioni assegnate hanno entrambe come grafico una retta nel piano cartesiano Opq. La funzione della domanda è decrescente, mentre la funzione dell'offerta è crescente, entrambe in senso stretto.

Delle rette consideriamo soltanto quelle parti in cui $p \geq 0$ e $q \geq 0$, perché prezzo e quantità non possono assumere valori negativi.

Per calcolare le coordinate del punto di equilibrio risolviamo il sistema:

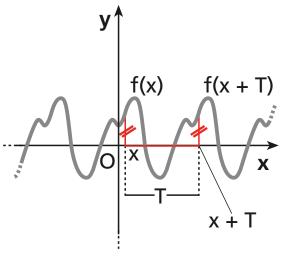
$$\begin{cases} q = 170 - 2p \\ q = p - 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 170 - 2p = p - 10 \\ q = p - 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p = 60 \\ q = 50 \end{cases}.$$

In corrispondenza del punto di equilibrio il prezzo di vendita è di € 60 al quintale e vengono venduti 50 quintali di mele.

Funzioni periodiche

→ Esercizi a p. 1378

DEFINIZIONE
$y = f(x)$ è una **funzione periodica** di periodo T, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, abbiamo $f(x) = f(x + kT)$.



In una funzione periodica il grafico si ripete di periodo in periodo.

Se $f(x)$ è periodica di periodo T, allora non è iniettiva, perché x e $x + kT$ hanno la stessa immagine.

Se una funzione è periodica di periodo T, essa lo è anche di periodo $2T$, $3T$, $4T$, …

Le dilatazioni modificano il periodo delle funzioni.

Se $f(x)$ è una funzione di periodo T_1, allora $f(kx)$ è periodica di periodo $T = \frac{T_1}{k}$.

Per esempio, $\sin kx$ e $\cos kx$ hanno periodo $\frac{2\pi}{k}$, $\tan kx$ e $\cot kx$ hanno periodo $\frac{\pi}{k}$.

> Qual è il periodo di $y = 2\cos x$? E quello di $y = \cos 2x$?

Funzioni pari e funzioni dispari

→ Esercizi a p. 1379

Animazione nell'eBook

Nell'animazione risolviamo i tre esercizi relativi a funzioni pari e funzioni dispari, quello qui sotto e i due della pagina successiva.

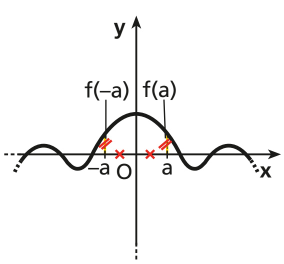
DEFINIZIONE
Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$.
$y = f(x)$ è una **funzione pari** in D se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ per qualunque x appartenente a D.

ESEMPIO
$y = f(x) = -x^4 + 2x^2$ è pari perché:
- il dominio è $\mathbb{R}$;
- $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 = -x^4 + 2x^2 = f(x)$.

> La funzione $y = \frac{1}{-x^2 + 4}$ è pari?

In generale, se una funzione polinomiale ha espressione analitica contenente soltanto potenze della x con *esponente pari*, allora è pari.
Verifica invece che la funzione $y = f(x) = 2x^4 - x$ **non** è pari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, non si ottiene $f(x)$.

Se una funzione è **pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y**. Infatti, se il punto $P(x; y)$ appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto $P'(-x; y)$. Pertanto, le coordinate di P', pensate come $(x'; y')$, soddisfano le equazioni della simmetria rispetto all'asse y:



$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

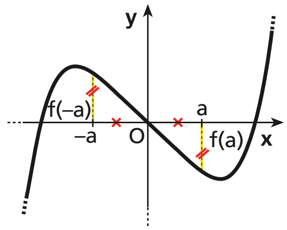
DEFINIZIONE
Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, anche $-x \in D$.
$y = f(x)$ è una **funzione dispari** in D se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ per qualunque x appartenente a D.

ESEMPIO
$y = f(x) = 4x^5 - x$
è dispari perché:
- il dominio è $\mathbb{R}$;
- $f(-x) = 4(-x)^5 - (-x) = -4x^5 + x = -(4x^5 - x) = -f(x)$.

> Verifica che la funzione $y = f(x) = x^3 + 1$ **non** è dispari.

Una funzione polinomiale con espressione analitica contenente solo potenze della x con *esponente dispari* è una funzione dispari.

Se una funzione è **dispari**, **il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi**.
Infatti, se il punto $P(x; y)$ appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto $P'(-x; -y)$. Pertanto le coordinate di P', pensate come $(x'; y')$, soddisfano le equazioni della simmetria centrale avente come centro l'origine:



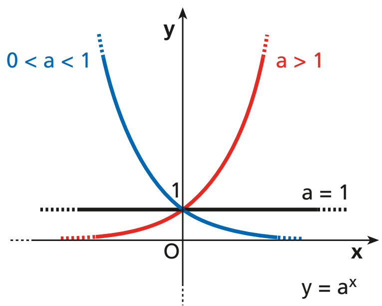
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}.$$

> Verifica che $y = f(x) = x^3 - x^2$ non è né pari né dispari.

Una funzione che non sia pari non è necessariamente dispari (e viceversa).

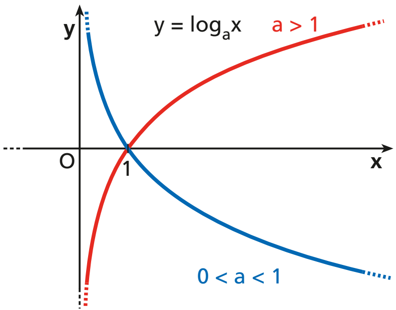
Proprietà delle principali funzioni trascendenti

Funzione esponenziale



- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **insieme immagine**, se $a \neq 1$, $\mathbb{R}^+$, ossia il suo grafico sta tutto «sopra» l'asse x.
- Il grafico **non interseca** l'asse x, **interseca** l'asse y in $(0; 1)$.
- Se $a > 1$, è una funzione sempre **crescente**; se $0 < a < 1$, è sempre **decrescente**; se $a = 1$, è **costante** e vale 1.

Funzione logaritmica



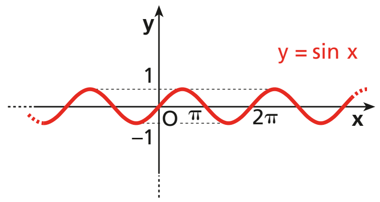
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}^+$, come **insieme immagine** $\mathbb{R}$.
- Il grafico **interseca** l'asse x in $(1; 0)$, **non interseca** l'asse y.
- Se $a > 1$, è una funzione sempre **crescente**; se $0 < a < 1$, è sempre **decrescente**.

Animazione nell'eBook

Animazione nell'eBook

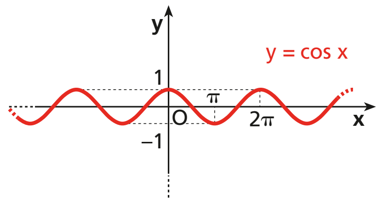
Nelle animazioni esaminiamo, mediante figure dinamiche, le caratteristiche delle funzioni seno e coseno.

Funzione seno



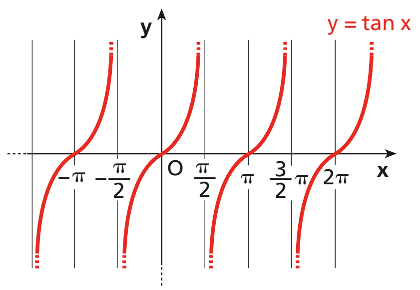
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **insieme immagine** $[-1; 1]$.
- È una funzione **dispari**: $\sin(-x) = -\sin x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π.
- È **crescente** in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Funzione coseno



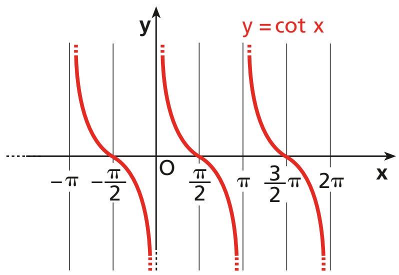
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **insieme immagine** $[-1; 1]$.
- È una funzione **pari**: $\cos(-x) = \cos x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π.
- È **crescente** in $[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$.

Funzione tangente



- Ha come **dominio** $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, con $k \in \mathbb{Z}$, e come **insieme immagine** $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari**: $\tan(-x) = -\tan x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π: $\tan x = \tan(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Funzione cotangente



- Ha come **dominio** $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ con $k \in \mathbb{Z}$, e come **insieme immagine** $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari**: $\cot(-x) = -\cot x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π: $\cot x = \cot(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **decrescente** in $]0 + k\pi; \pi + k\pi[$.

Animazione nell'eBook

Animazione nell'eBook

In queste animazioni osserviamo in modo dinamico tutte le caratteristiche delle funzioni tangente e cotangente.

TEORIA

3 Funzione inversa

→ Esercizi a p. 1381

Listen to it

Given a bijective function f from A to B, its **inverse function** f^{-1} is the bijective function from B to A which associates to each y in B the value x in A such that $y = f(x)$.

DEFINIZIONE

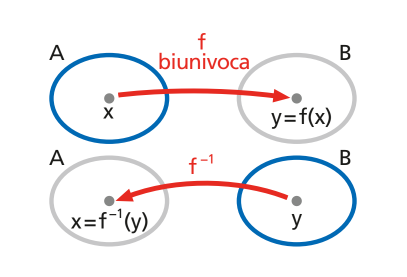
Data la funzione *biunivoca*

$y = f(x)$ da A a B,

la **funzione inversa** di f è la funzione biunivoca

$x = f^{-1}(y)$ da B ad A

che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$.



Se una funzione ammette inversa, si dice che è **invertibile**.

Le funzioni monotòne in senso stretto sono biunivoche se si considera come codominio il loro insieme immagine. Quindi esse ammettono sempre la funzione inversa.
Se una funzione $f(x)$ non è biunivoca, è possibile effettuare una **restrizione del suo dominio** a un sottoinsieme D' in cui sia biunivoca. Infatti, per l'invertibilità è sufficiente scegliere in A un sottoinsieme D' dove $f(x)$ risulta iniettiva, perché $f(x)$ è sicuramente suriettiva se come codominio B consideriamo l'insieme immagine $f(D')$.

ESEMPIO

La funzione

$$y = f(x) = x^2$$

nel suo dominio $\mathbb{R}$ non è biunivoca, e quindi non è invertibile. Per renderla biunivoca consideriamo come dominio l'insieme dei numeri reali positivi o nulli, cioè $x \geq 0$. Con la restrizione del dominio operata possiamo considerare la funzione inversa di $f(x)$,

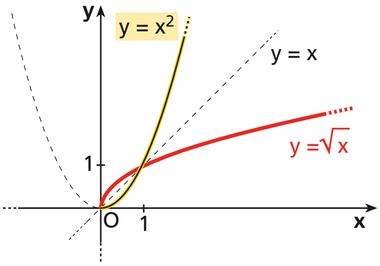
$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y},$$

definita associando a un numero quel valore che, elevato al quadrato, dà il numero stesso.
Per esempio,

$$f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3,$$

perché

$$9 = f(3) = 3^2.$$



Per rappresentare f e f^{-1} nello stesso piano cartesiano, scambiamo le variabili x e y nell'espressione della funzione inversa, perché la variabile indipendente diventa quella dipendente e viceversa:

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

› Restringi il dominio della funzione

$y = 9 - x^2$

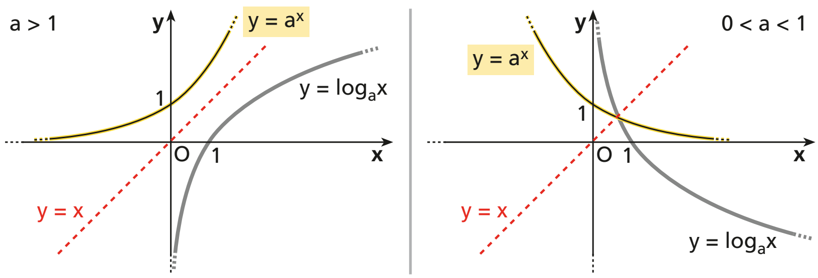
in modo che sia invertibile e determina la funzione inversa.

Animazione nell'eBook

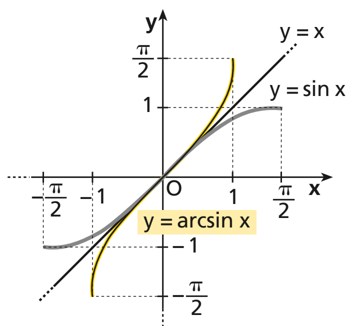
T TEORIA

Grafici delle funzioni inverse

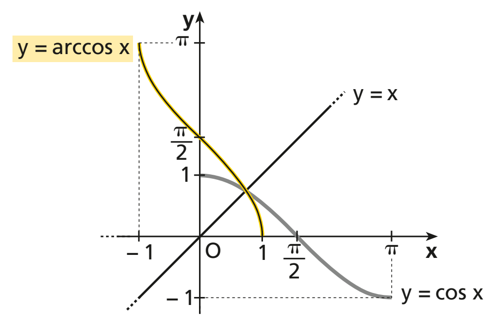
Funzione esponenziale e funzione logaritmica
La funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa). Sono entrambe funzioni strettamente monotòne e quindi biunivoche.



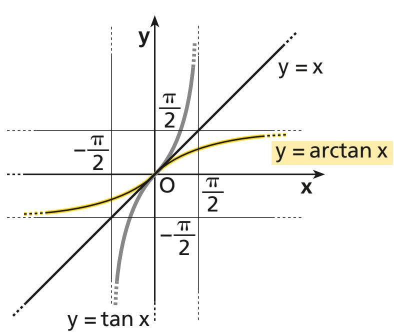
Funzioni goniometriche e loro inverse
Poiché nel loro dominio naturale le funzioni goniometriche sono periodiche, e quindi non biunivoche, per ottenere le loro funzioni inverse è necessario effettuare restrizioni dei domini, in modo che risultino biunivoche.



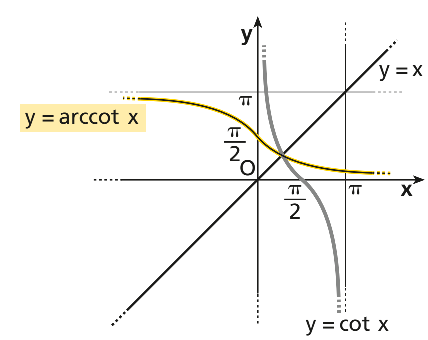
a. Considerata la funzione seno nel dominio $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la **funzione arcoseno** ha dominio $D = [-1; 1]$ e insieme immagine $Im = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



b. Considerata la funzione coseno nel dominio $[0; \pi]$, la **funzione arcocoseno** ha dominio $D = [-1; 1]$ e insieme immagine $Im = [0; \pi]$.



c. Considerata la funzione tangente nel dominio $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, la **funzione arcotangente** ha dominio $D = \mathbb{R}$ e insieme immagine $Im = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

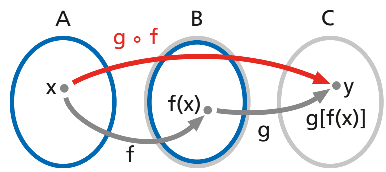


d. Considerata la funzione cotangente nel dominio $]0; \pi[$, la **funzione arcocotangente** ha dominio $D = \mathbb{R}$ e insieme immagine $Im =]0; \pi[$.

4 Funzione composta

→ Esercizi a p. 1384

Date le funzioni f e g, indichiamo con $g \circ f$ (si legge «g composto f») oppure con $y = g[f(x)]$ la **funzione composta** che si ottiene associando a ogni elemento x del dominio di f, che abbia immagine $f(x)$ appartenente al dominio di g, il valore y immagine di $f(x)$ mediante g.



Per comporre le due funzioni, occorre che l'immagine di x mediante la prima funzione, cioè $f(x)$, sia un valore per il quale si può determinare l'immagine tramite la seconda funzione.
Quindi il dominio di $y = g[f(x)]$ è costituito da tutti gli x del dominio di f tali che $f(x)$ appartiene al dominio di g.

In generale, **la composizione delle funzioni non è commutativa**: $g \circ f \neq f \circ g$.

ESEMPIO

Consideriamo le funzioni f e g, da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2, g(x) = x + 1.$$

La funzione composta $g \circ f$ è:

$$y = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Invece $f \circ g$ è:

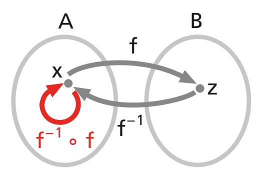
$$y = f[g(x)] = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Per esempio, $g[f(5)] = g(25) = 26$, mentre $f[g(5)] = f(6) = 36$.

> Date le seguenti funzioni f e g, determina $f \circ g$ e $g \circ f$:
>
> **a.** $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$;
>
> **b.** $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^3$.
>
> **Animazione** nell'eBook

Se si compone la funzione f con la sua inversa f^{-1}, si ottiene la **funzione identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso:

$$f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x.$$



5 Successioni e progressioni

Rivediamo i principali concetti relativi a successioni e progressioni, già esaminati nel terzo volume.

DEFINIZIONE

Una **successione numerica** è una funzione che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n:

$$a_n = f(n).$$

> **Listen to it**
>
> A **numerical sequence** is a function $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ that associates with each natural number n a real value a_n:
>
> $a_n = f(n)$.

Una successione è quindi un insieme ordinato e infinito di numeri, che chiamiamo **termini**:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

L'**indice** 0,1, … crea la corrispondenza fra i termini a_0, a_1, … e i numeri naturali 0, 1, …
L'n-esimo termine, a_n, è detto **termine generale**.

ESEMPIO
La successione costituita da tutte le frazioni con numeratore 1 e denominatore un numero naturale dispari è la funzione:

$$a_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Sostituendo a n i valori 0, 1, 2, 3, …, si ha:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{7}, \quad \dots$$

Possiamo estendere la definizione di successione anche a casi in cui sia opportuno avere come primo termine a_k, con $k > 0$.
Per esempio, la successione $a_n = \frac{2n+1}{n}$ ha come primo termine a_1 perché a_0 non esiste.

Rappresentazioni delle successioni

→ Esercizi a p. 1388

Rappresentazione per elencazione

Indichiamo i primi termini della successione seguiti dai puntini di sospensione.

ESEMPIO
0, 3, 6, 9, … è la successione dei multipli di 3.

> Rappresenta per elencazione la successione dei quadrati dei numeri pari.

Rappresentazione mediante espressione analitica

Indichiamo la relazione che lega l'indice n e il termine a_n.

ESEMPIO
I multipli di 3 sono descritti dall'espressione $a_n = 3n$.

> Scrivi la successione dei quadrati dei numeri pari in forma analitica.

Rappresentazione ricorsiva o per ricorsione

Consiste nel fornire il primo termine della successione e una relazione che lega il termine generale a_n a quello precedente.

$$\begin{cases} a_0 \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} a_0 = \mathbf{0} \\ a_n = a_{n-1} + 3 \quad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Ogni termine si ottiene dal precedente sommando 3:

$$a_0 = \mathbf{0}, \quad a_1 = a_0 + 3 = \mathbf{3}, \quad a_2 = a_1 + 3 = \mathbf{6}, \quad \dots$$

Abbiamo riottenuto la successione dei multipli di 3.

> Scrivi i primi quattro termini della seguente successione.
> $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad \text{se } n > 0 \end{cases}$

Non è sempre facile passare da un tipo di rappresentazione a un altro.

TEORIA

ESEMPIO

1. La successione $a_n = 2n^2 - 1$ si può rappresentare per elencazione,

   $-1, \quad 1, \quad 7, \quad 17, \quad \ldots,$

   mentre non è facile scriverla in forma ricorsiva.

2. La successione $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \end{cases}$ si può rappresentare per elencazione,

   $3, \quad 7, \quad 15, \quad 31, \quad \ldots,$

   ma è più complicato trovare l'espressione analitica.

3. Per la successione

   $0, \quad 0{,}2, \quad 0{,}22, \quad 0{,}222, \quad \ldots,$

   non è facile ricavare l'espressione analitica o ricorsiva.

In generale:

- la rappresentazione per elencazione è efficace se, leggendo i primi termini, si possono dedurre gli altri senza ambiguità;
- quando è possibile, conviene utilizzare la rappresentazione analitica perché permette di calcolare il termine n-esimo direttamente da n.

Successioni monotòne

→ Esercizi a p. 1390

Una successione è:

- **crescente** se ogni termine è maggiore del suo precedente, ossia:

  $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

- **decrescente** se ogni termine è minore del suo precedente, ossia:

  $a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

- **non decrescente** (o **crescente in senso lato**) se: $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **non crescente** (o **decrescente in senso lato**) se: $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **costante** se ogni termine è uguale al suo precedente, ossia:

  $a_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

In generale, una successione per cui vale una di queste proprietà si dice **monotòna**.

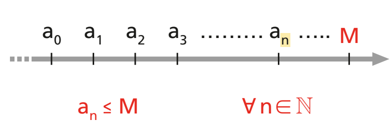
ESEMPIO

1. $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ è una successione monotòna crescente.
2. $-1, -2, -3, -4, \ldots$ è monotòna decrescente.
3. $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ è monotòna non decrescente.
4. $-1, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$ è monotòna non crescente.
5. $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots$ è costante.

Successioni limitate e illimitate

→ Esercizi a p. 1391

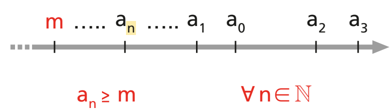
Una successione è **limitata superiormente** se tutti i suoi termini risultano minori o uguali di un numero reale M, ossia $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.



ESEMPIO

$2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \ldots,\ \frac{2}{n+1},\ \ldots$ è una successione limitata superiormente, perché tutti i suoi termini sono minori o uguali a 2.

Una successione è **limitata inferiormente** se tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a un numero reale m, ossia $a_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$.



ESEMPIO

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{26}{5},\ \ldots,\ \frac{n^2+1}{n},\ \ldots,\quad \text{con } n \neq 0,$$

è una successione limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a 2.

Una successione è **limitata** quando è limitata sia superiormente sia inferiormente, ossia quando esistono due numeri reali m e M tali che $m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,$$

è una successione limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a 0, ed è anche limitata superiormente perché la frazione $\frac{n}{n+1}$ è una frazione propria, pertanto minore di 1. Tutti i termini della successione risultano minori di 1, anche se 1 non fa parte di essi.
La successione è allora una successione limitata.

Una successione non limitata si dice **illimitata**.
Per esempio, la successione dei numeri dispari è illimitata superiormente.

Progressioni aritmetiche

→ Esercizi a p. 1391

Consideriamo la successione

$$1,\quad 5,\quad 9,\quad 13,\quad 17,\quad 21,\quad \ldots$$

Ogni termine si ottiene dal precedente aggiungendo 4. Diciamo anche che la differenza fra ogni termine e il suo precedente è 4.
La successione è una *progressione aritmetica*.

DEFINIZIONE
Una successione numerica è una **progressione aritmetica** quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante.

La differenza costante fra un termine e il precedente è detta **ragione** e viene indicata con d.

$$a_n - a_{n-1} = d \quad \rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + d$$

Per le progressioni indichiamo in genere il primo termine con a_1 e non con a_0.

Listen to it

A numerical sequence is an **arithmetic progression** if the difference between any two consecutive terms is constant.

Verifica se la successione
$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -1, -\frac{5}{4}, \ldots$
è una progressione aritmetica.

Se consideriamo un numero finito di termini consecutivi di una progressione, il primo e l'ultimo sono detti **estremi** della progressione.

Calcolo del termine a_n di una progressione aritmetica

Animazione nell'eBook

Nell'animazione ti riproponiamo la dimostrazione del teorema, già vista nel volume 3, insieme alla sua interpretazione geometrica e a un esempio di applicazione con il calcolo della ragione *d* della progressione aritmetica di primo termine 1 e settimo termine 25.

TEOREMA
In una progressione aritmetica, il termine a_n è uguale alla somma del primo termine a_1 con il prodotto della ragione d per $(n-1)$:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}, \text{ con } n \geq 1.$$

ESEMPIO
Calcoliamo a_{10} nella progressione aritmetica che ha termine iniziale 3 e ragione $\frac{1}{3}$:

$$a_{10} = 3 + 9 \cdot \frac{1}{3} = 3 + 3 = 6.$$

Somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica

Animazione nell'eBook

Anche in questa animazione, così come nelle due successive, riproponiamo quanto è stato presentato nel volume 3. Esaminiamo la dimostrazione del teorema e calcoliamo la somma dei primi 6 termini della progressione aritmetica di primo termine 2 e ragione 3.

TEOREMA
La somma S_n dei primi n termini $a_1, \ldots, a_n$ di una progressione aritmetica è uguale al prodotto di n per la semisomma dei due termini estremi a_1 e a_n:

$$\boldsymbol{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}.$$

ESEMPIO
Calcoliamo la somma dei primi 8 termini della progressione aritmetica di primo termine 2 e ragione 3: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23.

$$S_8 = 8 \cdot \frac{2 + 23}{2} = 100$$

Progressioni geometriche

→ Esercizi a p. 1391

Consideriamo la successione

$$3, \quad 6, \quad 12, \quad 24, \quad 48, \quad \ldots$$

Ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per 2. Si può anche dire che il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è uguale a 2.
Una successione di questo tipo è una *progressione geometrica*.

DEFINIZIONE
Una successione numerica è una **progressione geometrica** quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante.

Il quoziente costante fra un termine e il precedente è detto **ragione** e viene indicato con q. La ragione q non può essere mai uguale a 0 e nemmeno i termini della progressione possono essere 0, perché non ha significato la divisione del tipo $\frac{b}{0}$.

$$\boldsymbol{\frac{a_n}{a_{n-1}} = q} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_n = a_{n-1} \cdot q}$$

In una progressione geometrica:

- se $q > 0$, i termini sono tutti o **positivi** o **negativi**;
- se $q < 0$, i termini sono **alternativamente** di **segno opposto**.

Se consideriamo un numero finito di termini consecutivi di una progressione geometrica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi** della progressione.

Calcolo del termine a_n di una progressione geometrica

TEOREMA

In una progressione geometrica il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la potenza della ragione con esponente $(n-1)$:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}, \text{ con } n \geq 1.$$

ESEMPIO

Calcoliamo il quinto termine della progressione geometrica che ha 45 come primo termine e ragione $\frac{2}{3}$:

$$a_5 = 45 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 45 \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{9}.$$

Animazione nell'eBook

Nell'animazione, dimostriamo il teorema.
Inoltre, di tre progressioni geometriche, calcoliamo:
- a_5 sapendo che $q = 3$ e $a_1 = 4$;
- a_1 se $q = 2$ e $a_4 = 96$;
- q sapendo che $a_1 = 2$ e $a_4 = 54$.

Somma di termini consecutivi di una progressione geometrica

TEOREMA

La somma S_n dei primi n termini $a_1, \ldots, a_n$ di una progressione geometrica di ragione q diversa da 1 è:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la somma dei primi 6 termini della progressione geometrica

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad \ldots$$

Poiché $q = 2$ e $a_1 = \frac{1}{4}$:

$$S_6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{64 - 1}{1} = \frac{63}{4}.$$

Animazione nell'eBook

Nell'animazione, dimostriamo il teorema e calcoliamo la somma dei primi 5 termini della progressione geometrica di primo termine 4 e ragione 3.

6 Principio di induzione

→ Esercizi a p. 1394

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare proprietà che dipendono da un numero naturale n.

Vogliamo dimostrare che una proposizione $P(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Seguiamo un tipo di ragionamento che si basa su due passi.

Primo passo: si dimostra che $P(n)$ è vera per $n = 0$.

Secondo passo: supponendo vera la proposizione $P(n)$, si dimostra che è vera $P(n+1)$, cioè la proposizione associata al valore successivo di n.

In questo modo, a partire da $n = 0$, è *dimostrato* che la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si può applicare lo stesso ragionamento anche se si parte, nell'associare le proposizioni P a numeri naturali, invece che da $n = 0$, da un valore $k > 0$.
Abbiamo allora la seguente forma generale del **principio di induzione**.

Dati $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$, e una proposizione $P(n)$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$, se

1. è vera $P(k)$,

2. supposta vera $P(n)$, è vera anche $P(n+1)$,

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq k$.

TEORIA

Mediante il principio di induzione, dimostra che:

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

con $n \geq 1$.

Animazione nell'eBook

Dimostra per induzione che

$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Video

Dimostrazione per induzione Dimostriamo che, per qualsiasi n, la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2, cioè $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

ESEMPIO

Dimostriamo per induzione l'uguaglianza

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Primo passo

Se $n = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow$ l'uguaglianza è vera.

Secondo passo

Ammettiamo che l'uguaglianza sia vera per n e dimostriamo che è vera per $n+1$, cioè dimostriamo che

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Poiché per ipotesi $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$, il primo membro diventa:

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{2-1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

L'uguaglianza è verificata.

Essendo vere entrambe le condizioni del principio di induzione, concludiamo che l'uguaglianza data è vera $\forall n \geq 1$.

È possibile riscrivere in modo più sintetico l'uguaglianza dell'esempio utilizzando il simbolo di *sommatoria*:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

In generale, la notazione $\sum_{i=1}^{n} a_i$ si legge «sommatoria in i da 1 a n di a_i» e indica la somma di tutti i termini a_i per i che varia da 1 a n.

IN SINTESI
Funzioni, successioni e loro proprietà

Funzioni reali di variabile reale

- Una **funzione** da A a B è una relazione che a *ogni* elemento di A associa *uno e un solo* elemento di B.
- Il **dominio** della funzione è l'insieme A, il **codominio** è l'insieme B, l'**insieme immagine** è il sottoinsieme di B costituito dalle immagini degli elementi di A.
- **Funzioni reali di variabile reale**: sono rappresentate in genere da un'**espressione analitica**, ossia un'equazione del tipo $y = f(x)$. x è la **variabile indipendente** e y la **variabile dipendente**.
- **Dominio naturale di una funzione**: è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che può essere preso come dominio. È costituito da tutti i valori per i quali ha significato l'espressione analitica che definisce la funzione.

Proprietà delle funzioni

- Una funzione da A a B è:
  - **iniettiva** se due qualunque elementi *distinti* di A hanno immagini distinte in B;
  - **suriettiva** se *tutti* gli elementi di B sono immagini di almeno un elemento di A;
  - **biiettiva** (o biunivoca) se è iniettiva e suriettiva.
- Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, in un intervallo $I \subseteq D$ è:
  - **crescente in senso stretto** se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$;
  - **decrescente in senso stretto** se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.
  - **monotòna** se è sempre crescente o sempre decrescente.
- Una funzione $y = f(x)$ è **periodica** di periodo T se: $f(x) = f(x + kT)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, con $T > 0$.
- $y = f(x)$, definita in $D \subseteq \mathbb{R}$, è: **pari** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$; **dispari** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Funzione inversa

Una funzione f ammette la **funzione inversa** f^{-1} se e solo se è biunivoca. $a = f^{-1}(b) \leftrightarrow b = f(a)$.

Funzione composta

Date le funzioni f e g, la **funzione composta** $g \circ f$ associa a ogni x del dominio di f che ha immagine $f(x)$ nel dominio di g il valore $y = g[f(x)]$. In generale, $g \circ f \neq f \circ g$.

Successioni e progressioni

- **Successione numerica**: è una funzione f che associa a ogni numero naturale un numero reale:

  $$a_n = f(n).$$

  n è l'**indice** e a_n il **termine generale** della successione.
- **Progressione aritmetica di ragione d**: è una successione a_n tale che $a_n - a_{n-1} = d$ per ogni $n \geq 1$.
- **Progressione geometrica di ragione q**: è una successione a_n tale che $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ per ogni $n \geq 1$.

Principio di induzione

Dati $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$, e una proposizione $P(n)$, il cui enunciato dipende da n, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$, se

1. la proposizione è vera per $n = k$,
2. supposta vera per n, la proposizione è vera anche per $n + 1$,

allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq k$.

T

TEORIA