5 TI RICORDI? Le funzioni

INTRODUZIONE DELL'AUTORE

- Lo scopo dei capitoli *Ti ricordi?* è quello di riprendere alcuni argomenti importanti che di solito si affrontano nel primo biennio e che sono fondamentali per proseguire nello studio.
  La struttura proposta, basata su problemi svolti ed esercizi di consolidamento, permette un uso flessibile di queste pagine: ci si può soffermare solo su quello che si ritiene utile o necessario.
  A fianco dello svolgimento dei problemi guidati, sono richiamate le definizioni, le formule e i procedimenti utilizzati, in modo da poter fare un buon ripasso o eventualmente recuperare qualche concetto tralasciato in precedenza.
  Oltre agli *Esercizi per rinfrescare la memoria*, c'è una raccolta di test *Verso l'INVALSI* utili per la manutenzione dei contenuti fondamentali del primo biennio.
- Il concetto di funzione è uno dei fili che sottendono tutto il curriculum di matematica del triennio, ma a volte se ne perde la consapevolezza a causa della concentrazione su aspetti specifici. In vista dello studio delle funzioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche proponiamo un breve ripasso dei concetti di funzione: dominio, immagine, funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Questi concetti ci serviranno anche per introdurre le funzioni goniometriche inverse e il logaritmo come funzione inversa dell'esponenziale.
- Richiamiamo infine le caratteristiche principali delle funzioni elementari già note, che unite a quelle introdotte in questo volume formano una parte della cassetta degli attrezzi con cui affrontare la modellizzazione dei fenomeni reali.

PROBLEMI GUIDATI

1 Determiniamo quali delle seguenti relazioni sono funzioni.

a. La relazione tra l'insieme delle persone residenti in Lombardia e l'insieme dei comuni lombardi che associa a ogni persona il suo comune di residenza.

b. La relazione tra l'insieme delle classi e l'insieme degli studenti di una stessa scuola che associa a ogni classe i propri studenti.

c. La relazione fra due insiemi di numeri naturali che associa a ogni numero il suo doppio.

d. La relazione fra due insiemi di numeri reali che associa a ogni numero x un altro numero che elevato al quadrato dia x.

▶ Come si fa

In ciascun caso verifichiamo se a *ogni* elemento del primo insieme è sempre possibile associare *uno e un solo* elemento del secondo insieme.

a. Ogni persona ha uno e un solo comune di residenza, quindi la relazione è una funzione.

b. Ogni classe è composta da diversi studenti, quindi a ogni classe la relazione associa più di uno studente, per cui la relazione non è una funzione.

c. A ogni numero intero è possibile associare il suo doppio (per esempio $1 \to 2$; $2 \to 4$), che è unico, quindi la relazione è una funzione.

d. Ai numeri reali negativi non corrisponde nessun numero che elevato al quadrato dia il numero stesso come risultato, mentre ai numeri reali positivi ne corrispondono due (per esempio $4 \to 2$ e -2), quindi la relazione non è una funzione.

TI RICORDI? Una relazione esprime un legame tra gli elementi di due insiemi A e B: ad *alcuni* degli elementi dell'uno corrispondono *uno o più* elementi dell'altro.

TI RICORDI? Una funzione f dall'insieme A all'insieme B, $f\colon A \to B$, è una particolare relazione che a *ogni* elemento x appartenente all'insieme di partenza A associa *uno e un solo* elemento y dell'insieme di arrivo B. Si scrive anche $y = f(x)$.
Gli insiemi A e B sono detti rispettivamente *dominio* e *codominio* della funzione.

2 Rappresentiamo le seguenti funzioni con un grafico sul piano cartesiano.

a. $y = 3x + 2$

b. $y = -x$

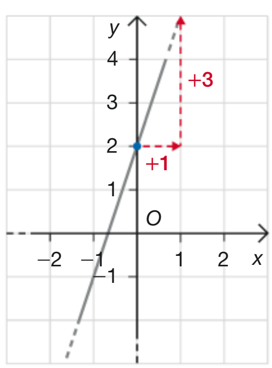
c. $y = x^2 - 2x + 4$

d. $y = \dfrac{6x+2}{3x-1}$

▶ Come si fa

a. $y = 3x + 2$ è una funzione lineare del tipo $y = mx + q$, quindi il suo grafico è una retta con:

- coefficiente angolare 3 (per ogni unità di incremento sull'asse delle ascisse, il corrispondente incremento sull'asse delle ordinate è il triplo);
- intercetta 2 (il grafico interseca l'asse delle ordinate in 2).

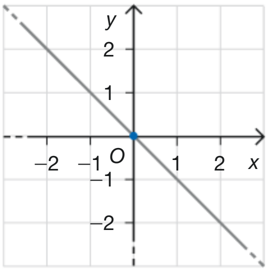


TI RICORDI? Il grafico sul piano cartesiano di una funzione f definita fra due insiemi numerici è l'insieme di tutte le coppie ordinate $(x; y)$ con $y = f(x)$; il secondo elemento della coppia è l'immagine del primo elemento tramite f. Il piano cartesiano che utilizziamo per rappresentare una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ può essere *monometrico*, cioè avere su entrambi gli assi la stessa unità di misura, oppure *dimetrico*, se le unità di misura sono diverse.

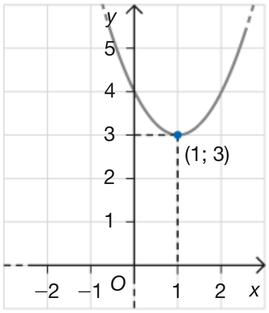
TI RICORDI? Il grafico di una funzione lineare del tipo $y = mx + q$ è una retta con coefficiente angolare m e intercetta q.

TI RICORDI?

b. $y = -x$ è una funzione lineare del tipo $y = mx + q$; il suo grafico è una retta di coefficiente angolare -1 e intercetta 0 (quindi passa per l'origine). In particolare, si tratta dell'equazione della bisettrice del secondo e quarto quadrante.



c. $y = x^2 - 2x + 4$ è una funzione quadratica del tipo $y = ax^2 + bx + c$, quindi il grafico è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.



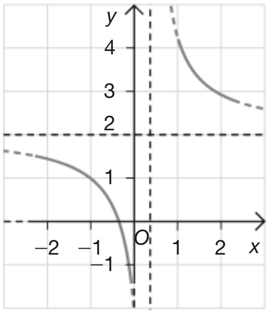
Il vertice ha:

- ascissa $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1$;
- ordinata $y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$.

Poiché $a > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto.

TI RICORDI? Il grafico di una funzione quadratica del tipo $y = ax^2 + bx + c$ è una parabola con il vertice di coordinate $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.
L'ordinata del vertice può essere calcolata con la sostituzione:
$y_V = ax_V^2 + bx_V + c$.
La parabola volge la concavità verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$.

d. $y = \dfrac{6x + 2}{3x - 1}$ è una funzione omografica del tipo $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; il grafico è un'iperbole equilatera.

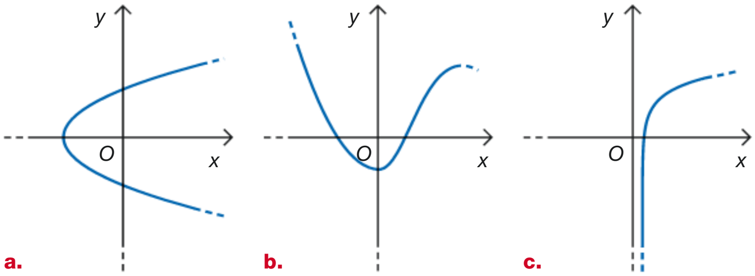


Gli asintoti dell'iperbole hanno equazione $y = \dfrac{a}{c} = \dfrac{6}{3} = 2$ e $x = -\dfrac{d}{c} = -\dfrac{-1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Il grafico intercetta l'asse delle ordinate nel punto $(0; -2)$.

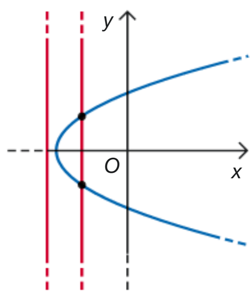
TI RICORDI? Il grafico di una funzione omografica del tipo $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, è un'iperbole equilatera; gli asintoti sono paralleli agli assi cartesiani e hanno equazione $x = -\dfrac{d}{c}$ e $y = \dfrac{a}{c}$.
Il grafico è simmetrico rispetto al punto $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$.

3 Stabiliamo se i seguenti grafici rappresentano delle funzioni.



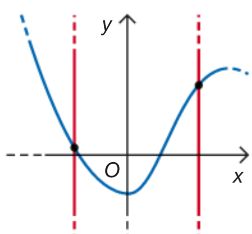
► **Come si fa**

a. Per ciascun grafico immaginiamo una retta parallela all'asse delle ordinate, che si muove da sinistra verso destra, e valutiamo quante volte interseca il grafico.
Inizialmente le rette verticali non intersecano la curva, ma questo aspetto non ci garantisce che il grafico rappresenti una funzione.

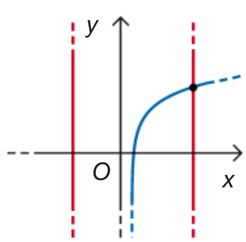


Infatti, spostando la retta verticale verso destra, questa interseca la curva in più di un punto: a un valore fissato di x corrispondono più valori di y. Quindi il grafico *non* rappresenta una funzione.

b. Ogni retta verticale interseca la curva sempre in un solo punto: il grafico rappresenta una funzione.



c. Le rette verticali o non intersecano il grafico o lo intersecano in un solo punto: il grafico rappresenta una funzione.



TI RICORDI? Un grafico rappresenta una funzione solamente se ogni retta verticale, cioè parallela all'asse delle ordinate, interseca il grafico in al più un punto.

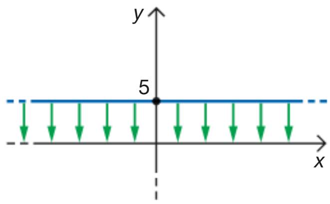
4 Stabiliamo il dominio e l'insieme immagine delle seguenti funzioni.

a. $y = 5$ **c.** $y = x^2 + 3x - 2$ **e.** $y = \dfrac{4x+2}{3x-2}$

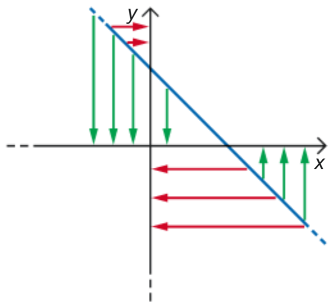
b. $y = 4 - x$ **d.** $y = -2x^2$ **f.** $y = \sqrt{x-2}$

▶ Come si fa

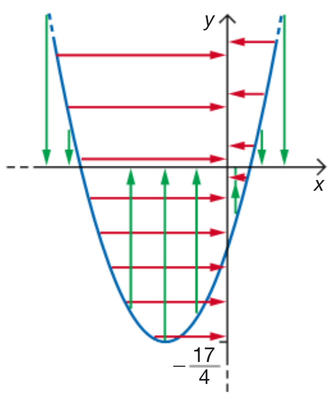
a. $y = 5$ è una funzione lineare, il cui grafico è una retta parallela all'asse delle ascisse.
L'insieme immagine è costituito unicamente da 5, mentre il dominio coincide con $\mathbb{R}$.



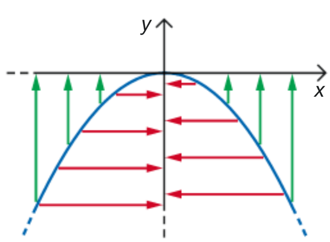
b. $y = 4 - x$ è una funzione lineare, il cui grafico è una retta che non è parallela a nessuno dei due assi cartesiani; quindi il dominio è $\mathbb{R}$ perché y si può calcolare per qualsiasi valore di x, e l'insieme immagine è $\mathbb{R}$, infatti y può assumere qualsiasi valore come risultato.



c. $y = x^2 + 3x - 2$ è una funzione quadratica, il cui grafico è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.
La funzione può essere calcolata per qualsiasi valore di x, quindi il dominio è $\mathbb{R}$.
Poiché $a > 0$, la concavità è rivolta *verso l'alto* e l'insieme immagine è costituito dai numeri reali *maggiori* o uguali all'ordinata del vertice:
$y_V = -\dfrac{17}{4}$.
Pertanto $\text{Imm}(f) = \left[-\dfrac{17}{4}; +\infty\right[$.

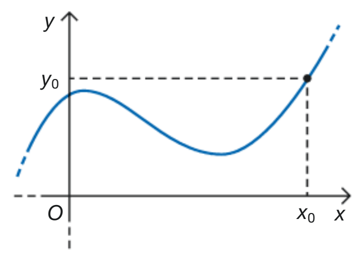


d. $y = -2x^2$ è una funzione quadratica, il cui grafico è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.
La funzione può essere calcolata per qualsiasi valore di x, quindi il dominio è $\mathbb{R}$.



Poiché $a < 0$ la concavità è rivolta *verso il basso* e l'insieme immagine è costituito dai numeri reali *minori* o uguali dell'ordinata del vertice che vale zero poiché la funzione è del tipo $y = ax^2$.
Quindi $\text{Imm}(f) =]-\infty; 0]$.

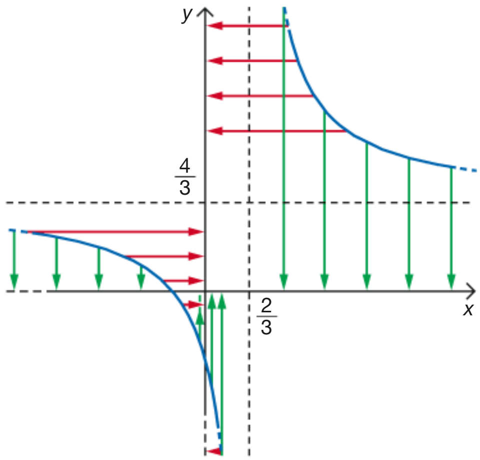
TI RICORDI? Quando gli insiemi di partenza (dominio) e di arrivo (codominio) di una funzione numerica f non sono indicati esplicitamente, si considera come dominio il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per cui la legge può essere applicata e come codominio $\mathbb{R}$.
Se $y_0 = f(x_0)$, il valore y_0 si chiama immagine di x_0 tramite la funzione f. Sul grafico della funzione f si può individuare l'immagine come segue: a partire dal punto x_0 dell'asse delle ascisse si traccia una retta parallela all'asse delle ordinate che interseca il grafico della funzione; da questo punto di intersezione si traccia una retta parallela all'asse delle ascisse che interseca l'asse delle ordinate in y_0.



L'insieme immagine di f, $\text{Imm}(f)$, è l'insieme di tutti i valori del codominio che sono immagine di almeno un elemento del dominio. $\text{Imm}(f)$ è un sottoinsieme del codominio.

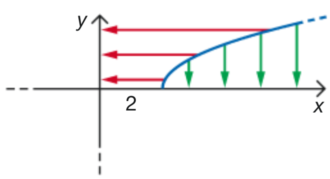
e. $y = \dfrac{4x+2}{3x-2}$ è una funzione omografica, il cui grafico è un'iperbole equilatera. Gli asintoti in questo caso sono $x = \dfrac{2}{3}$ e $y = \dfrac{4}{3}$ e non esiste nessun punto del grafico di ascissa $\dfrac{2}{3}$ o di ordinata $\dfrac{4}{3}$.

Il dominio quindi è $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ e il codominio $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$.



f. $y = \sqrt{x-2}$ è una funzione che contiene un radicale quadratico. Imponiamo quindi la condizione di esistenza:

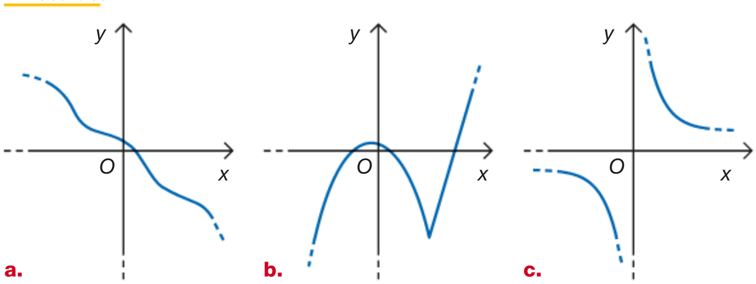
$$x - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 2.$$



Per cui il dominio è l'insieme $[2; +\infty[$.

Per determinare l'insieme immagine ricordiamo che un radicale quadratico è sempre positivo o nullo. Poiché il radicando può assumere tutti i valori positivi o nulli al variare di x nel dominio della funzione, anche il radicale stesso può assumere tutti i valori positivi o nulli, pertanto $\mathrm{Imm}(f) = [0; +\infty[$.

5 Stabiliamo se le funzioni rappresentate nei seguenti grafici sono iniettive.



► Come si fa

a. Per capire se una funzione è iniettiva dobbiamo verificare se a ogni valore nel codominio corrisponde al più un valore di x. Per questo immaginiamo una retta parallela all'asse delle ascisse

TI RICORDI? Una funzione f si dice iniettiva se a elementi distinti del dominio associa sempre elementi distinti del codominio.
In simboli:

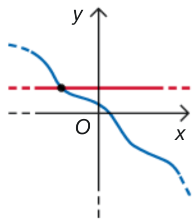
$$x_1 \neq x_2 \quad \rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente

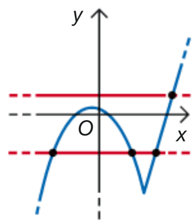
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

In altre parole, se f è iniettiva, a ogni elemento del codominio corrisponde al più un elemento x del dominio.
Equivalentemente, a ogni elemento nell'insieme immagine corrisponde esattamente un elemento x del dominio.

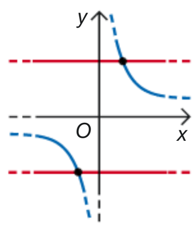
che scorre dal basso in alto e valutiamo in quanti punti questa retta interseca il grafico: la funzione è iniettiva se una qualunque retta orizzontale interseca il grafico in al più un punto.
In questo caso c'è sempre esattamente una intersezione fra grafico e retta orizzontale, quindi la funzione è iniettiva.



b. Esistono rette orizzontali che intersecano il grafico in un punto e altre rette che lo intersecano in tre punti. Esistono quindi valori dell'insieme immagine a ognuno dei quali corrispondono tre diversi valori di x; pertanto la funzione non è iniettiva.



c. Una qualunque retta orizzontale interseca il grafico sempre in un solo punto, a parte quando la retta coincide con l'asse delle ascisse, nel qual caso non interseca il grafico.



6 Stabiliamo se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive, biiettive.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 3x - 4$.

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 3x^2 - 4$.

c. $f: [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 3x^2 - 4$.

d. $f: \mathbb{R} \to [-4; +\infty[$, $\quad f(x) = 3x^2 - 4$.

e. $f: [0; +\infty[\to [-4; +\infty[$, $\quad f(x) = 3x^2 - 4$.

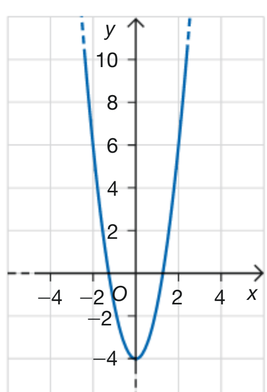
TI RICORDI? Una funzione f si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio, cioè se l'insieme Imm(f) coincide con l'insieme di arrivo (codominio).
Una funzione si dice biunivoca o biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

► Come si fa

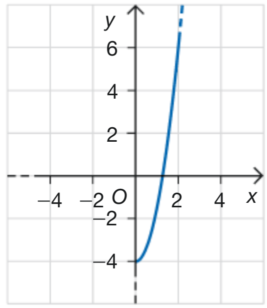
a. $y = 3x - 4$ è una funzione lineare, il cui grafico è una retta.
La funzione è iniettiva perché ogni valore di y è immagine di un solo valore di x ed è suriettiva perché l'insieme immagine coincide con il codominio $\mathbb{R}$.

Le funzioni dei punti successivi differiscono per dominio e codominio.

b. Il grafico della funzione $y = 3x^2 - 4$, è una parabola con vertice in $(0; -4)$ e concavità rivolta verso l'alto. L'insieme immagine è $\mathrm{Imm}(f) = [-4; +\infty[$.
La funzione non è iniettiva, perché i valori di y maggiori di -4 sono immagine di due valori del dominio, e non è neppure suriettiva, perché il codominio, $\mathbb{R}$, non corrisponde all'insieme immagine, $[-4; +\infty[$.



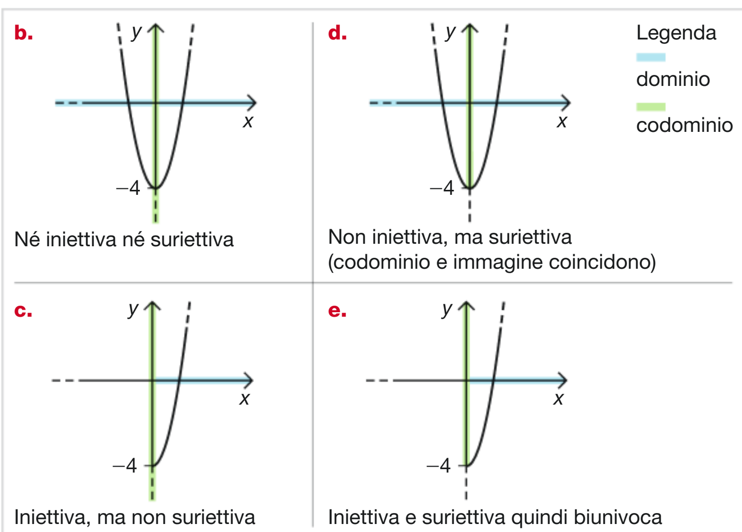
c. In questo caso il dominio è $[0; +\infty[$, il codominio è $\mathbb{R}$. Il grafico della funzione non è più quello dell'intera parabola, ma di una mezza parabola. La funzione diventa iniettiva, perché ogni valore del codominio è immagine di al più un solo valore del dominio. Non è però suriettiva perché codominio e insieme immagine, $[-4; +\infty[$, non corrispondono.



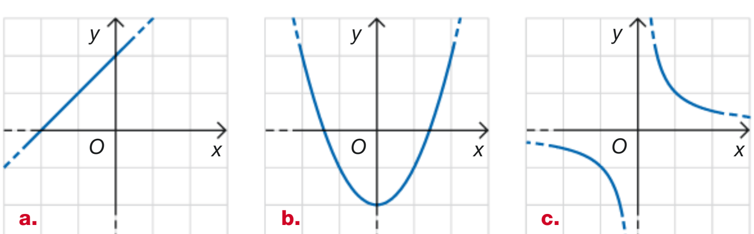
d. Il dominio è $\mathbb{R}$, il codominio è $[-4; +\infty[$. Il grafico della funzione è l'intera parabola, perché il dominio è lo stesso di quello della funzione del caso **b**, quindi la funzione non è iniettiva. Il codominio, invece, coincide con l'insieme immagine della funzione, che quindi risulta suriettiva.

e. In questo caso sono stati ristretti sia il dominio sia il codominio.
Il dominio è $[0; +\infty[$, per garantire l'iniettività come visto nel caso **c.** Il codominio è $[-4; +\infty[$, per garantire la suriettività come visto nel caso **d**. La funzione è dunque biiettiva.

Riassumiamo i risultati degli ultimi quattro punti in una tabella.



7 Stabiliamo se le funzioni rappresentate nei seguenti grafici sono pari, dispari o né pari né dispari.



TI RICORDI? Una funzione si dice pari se $f(-x) = f(x)$, cioè se il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
Una funzione si dice dispari se $-f(-x) = f(x)$, cioè se il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

TI RICORDI?

▶ Come si fa

a. La funzione non è né pari né dispari, perché il grafico non è simmetrico né rispetto all'asse delle ordinate né rispetto all'origine.

b. La funzione è pari perché il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

c. La funzione è dispari perché il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

8 Stabiliamo se le seguenti funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari.

a. $y = 4x$ **b.** $y = 2x^2 - x + 1$ **c.** $y = 6 - x^2$

▶ Come si fa

a. La funzione è dispari perché $f(-x) = 4 \cdot (-x) = -4x = -f(x)$.

b. La funzione non è né pari né dispari, infatti:

$$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x) + 1 = 2x^2 + x + 1$$

che non coincide né con $f(x) = 2x^2 - x + 1$ (quindi non è pari) né con $-f(x) = -2x^2 + x - 1$ (quindi non è dispari).

c. La funzione è pari perché $f(-x) = 6 - (-x)^2 = 6 - x^2 = f(x)$.

Nei tre casi proposti, trattandosi di rette e parabole, cioè di funzioni particolari di cui potremmo facilmente tracciare il grafico, avremmo potuto dedurre da questo le eventuali simmetrie.

9 Consideriamo le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 5$ e scriviamo le equazioni delle funzioni composte $w = f \circ g$ e $z = g \circ f$.

▶ Come si fa

Per comporre le funzioni partiamo sempre da quella scritta più a destra:

- $w(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+5) = (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$;
- $z(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$.

TI RICORDI? Date due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, la funzione composta $h = g \circ f$ (si legge «g composto f») è una funzione da A a C così definita:

$$h(x) = g(f(x)).$$

In altri termini, a partire da un valore $x \in A$ si calcola il valore $y = f(x)$ e questo risultato è utilizzato a sua volta come argomento di g per calcolare il valore di $h(x)$. L'operazione di composizione tra funzioni, in generale, non è commutativa: $g \circ f \neq f \circ g$.

10 Riscriviamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x+4)^2}$ come composizione di altre due funzioni.

▶ Come si fa

- Se consideriamo prima il calcolo di $(x+4)^2$ e poi il calcolo del reciproco, possiamo definire:

  $$w(x) = (x+4)^2 \quad \text{e} \quad z(x) = \frac{1}{x}.$$

  In questo caso scriviamo $f(x) = z(w(x))$, cioè $f = z \circ w$.

  Verifichiamo che le funzioni definite siano corrette:

  $$x \xrightarrow{w(x)} (x+4)^2 \xrightarrow{z(w(x))} \frac{1}{(x+4)^2}.$$

- Possiamo anche definire:

  $$s(x) = x + 4 \quad \text{e} \quad t(x) = \frac{1}{x^2},$$

quindi: $f(x) = t(s(x))$, cioè $f = t \circ s$.
Procediamo alla verifica anche in questo caso:

$$x \xrightarrow{s(x)} x+4 \xrightarrow{t(s(x))} \frac{1}{(x+4)^2}.$$

11 Scriviamo la funzione inversa di:

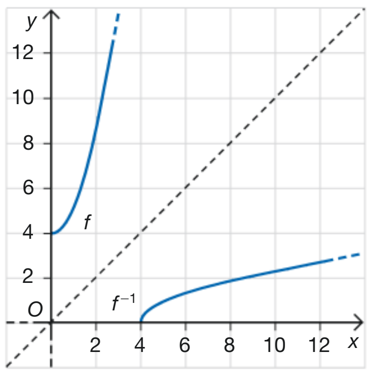
$$f:[0;+\infty[\to [4;+\infty[,$$
$$x \to 3x^2+4$$

e rappresentiamone il grafico.

► Come si fa

Osserviamo che la funzione, nel dominio e codominio assegnati, è biiettiva e quindi invertibile.
Il grafico è un arco di parabola di vertice $V(0;4)$, con il dominio ristretto a $[0;+\infty[$.
Dal grafico di f possiamo ottenere quello di f^{-1} per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y = x$.
Invece, per via analitica, scriviamo l'equazione della funzione nella forma $y = 3x^2+4$ ed esplicitiamo la x:

$$3x^2 = y-4 \quad \to \quad x^2 = \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}.$$



Dall'ultima equazione si otterrebbe $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}y - \frac{4}{3}}$, ma poiché il dominio di f è l'insieme $[0;+\infty[$, cioè le x appartengono all'intervallo $[0;+\infty[$, consideriamo solo il segno +:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}y - \frac{4}{3}}.$$

In conclusione otteniamo:

$$f^{-1}: [4;+\infty[\to [0;+\infty[,\ f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{3}y - \frac{4}{3}}.$$

Poiché possiamo scegliere la lettera x come variabile della funzione f^{-1}, troviamo:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}}.$$

In questo modo è possibile rappresentare le funzioni f e f^{-1} sullo stesso piano cartesiano.

TI RICORDI? Data una funzione $f: A \to B$, biiettiva, si chiama funzione inversa di f la funzione $f^{-1}: B \to A$ tale che:

$x = f^{-1}(y)$ se e solo se $y = f(x)$.

Poiché la funzione inversa scambia i ruoli tra un valore del dominio e la sua immagine, il grafico si può ottenere dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

TI RICORDI?

12 Rappresentiamo il grafico della funzione $f(x)=x^2-x$. A partire da questo rappresentiamo anche i grafici delle seguenti funzioni.

a. $s(x)=x^2-x-4$

b. $t(x)=(x+1)^2-(x+1)$

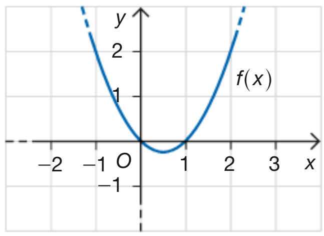
c. $u(x)=3(x^2-x)$

d. $v(x)=-x^2+x$

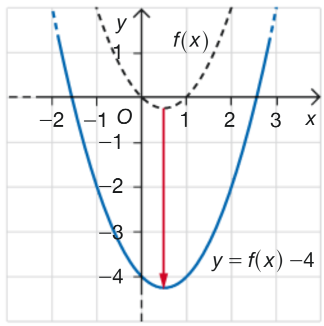
e. $w(x)=x^2+x$

► Come si fa

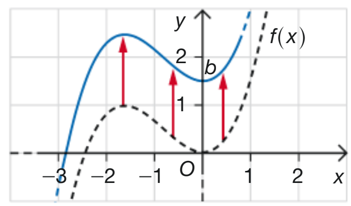
La funzione f ha come grafico una parabola di vertice $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ con la concavità rivolta verso l'alto.



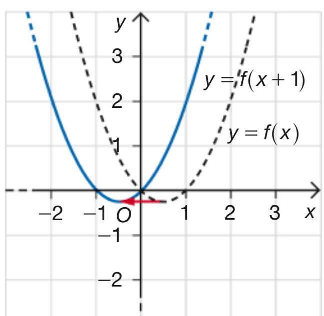
a. Poiché $s(x)=f(x)-4$, il grafico di s si ottiene da quello di f con una traslazione verticale di vettore $(0;-4)$:



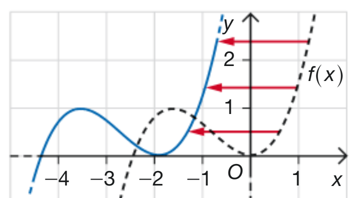
TI RICORDI? Il grafico della funzione $y=b+f(x)$ si ottiene da quello di f per traslazione verticale del vettore $(0;b)$.



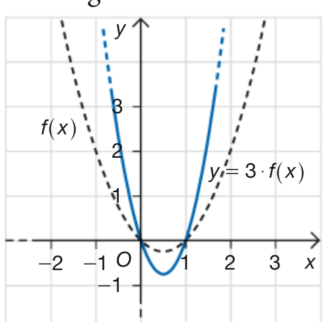
b. $t(x)$ può essere scritta come $t(x)=f(x+1)$, perché l'equazione di t ha la stessa forma di quella di f sostituendo $x+1$ a x.
Per questo motivo il grafico di t si ottiene da quello di f con una traslazione orizzontale di vettore $(-1;0)$.



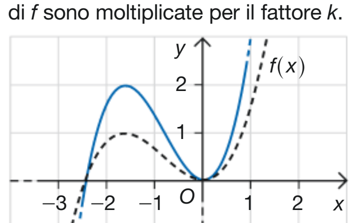
TI RICORDI? Il grafico della funzione $y=f(x+a)$ si ottiene da quello di f per traslazione orizzontale di vettore $(-a;0)$.



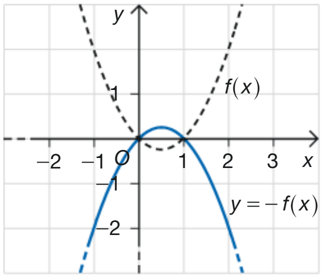
c. L'equazione di $u(x)$ si ottiene da quella di f moltiplicando il risultato per 3, $u(x)=3\cdot f(x)$, quindi il grafico si ottiene da quello di f con una dilatazione verticale di fattore 3.



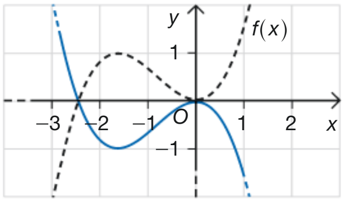
TI RICORDI? Il grafico della funzione $y=k\cdot f(x)$ si ottiene da quello di f per dilatazione verticale: tutte le ordinate dei punti del grafico di f sono moltiplicate per il fattore k.



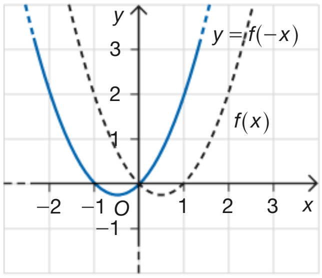
d. L'equazione della funzione v fornisce un valore opposto a quello di f, $v(x) = -f(x)$, quindi il grafico si ottiene da quello di f per simmetria rispetto all'asse delle ascisse.



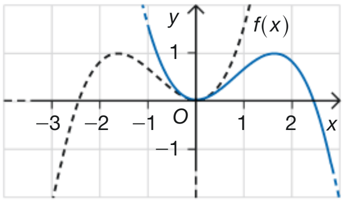
TI RICORDI? Il grafico della funzione $y = -f(x)$ si ottiene da quello di f per simmetria rispetto all'asse delle ascisse: tutte le ordinate dei punti del suo grafico hanno segno opposto rispetto a quelle dei punti del grafico di f.



e. L'equazione della funzione w si ottiene da quella di f sostituendo $-x$ a x, infatti $w(x) = x^2 + x = (-x)^2 - (-x) = f(-x)$, quindi il grafico si ottiene da quello di f per simmetria rispetto all'asse delle ordinate.



TI RICORDI? Il grafico della funzione $y = f(-x)$ si ottiene da quello di f per simmetria rispetto all'asse delle ordinate: tutte le ascisse dei punti del suo grafico hanno segno opposto rispetto a quelle dei punti del grafico di f.

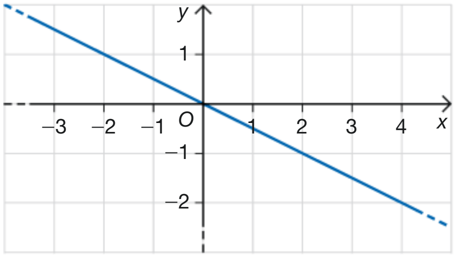


ESERCIZI PER RINFRESCARE LA MEMORIA

Relazioni, funzioni, dominio e insieme immagine

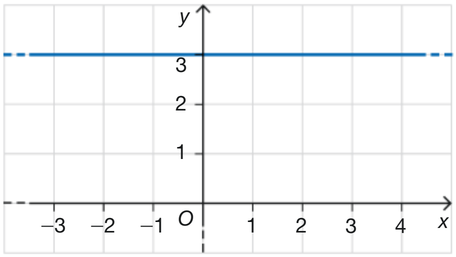
Considera i seguenti grafici e stabilisci se rappresentano una funzione. In caso affermativo determina il dominio e l'insieme immagine.

1 ●○○



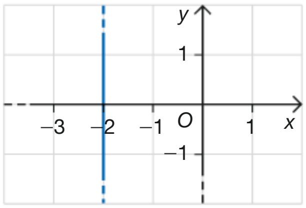
[sì; $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$]

2 ●○○



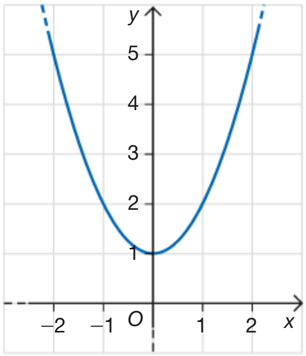
[sì; $\mathbb{R}$; $\{3\}$]

3 ●○○



[no]

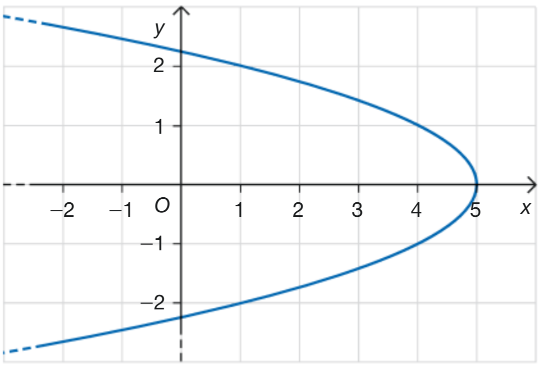
4 ●○○



[sì; $\mathbb{R}$; $[1; +\infty[$]

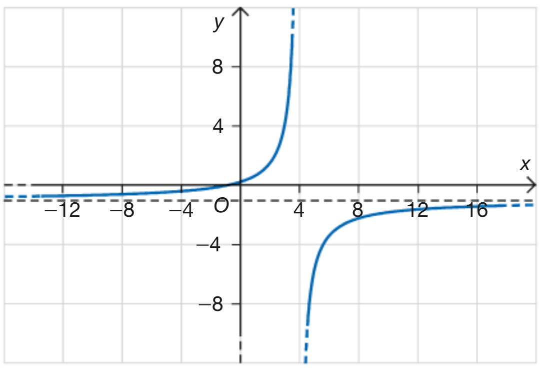
TI RICORDI?

5 ●○○



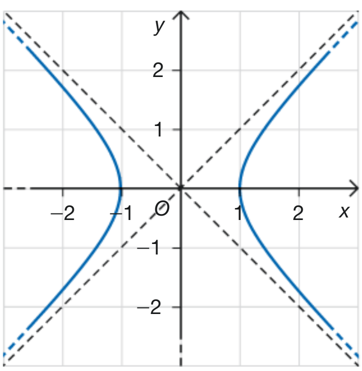
[no]

6 ●○○



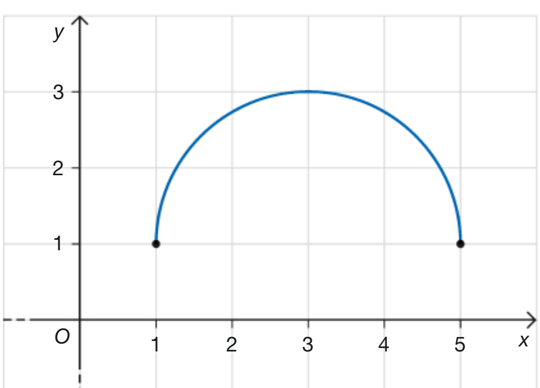
[sì; $\mathbb{R}-(4)$; $\mathbb{R}-\{-1\}$]

7 ●○○



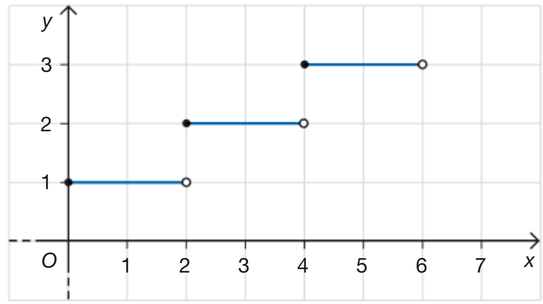
[no]

8 ●○○



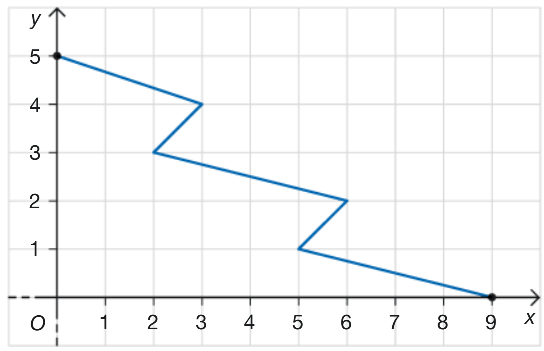
[sì; [1; 5]; [1; 3]]

9 ●○○



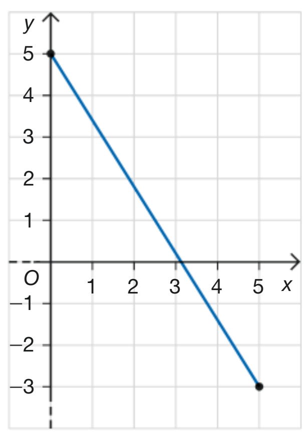
[sì; [0; 6[; {1; 2; 3}]

10 ●○○



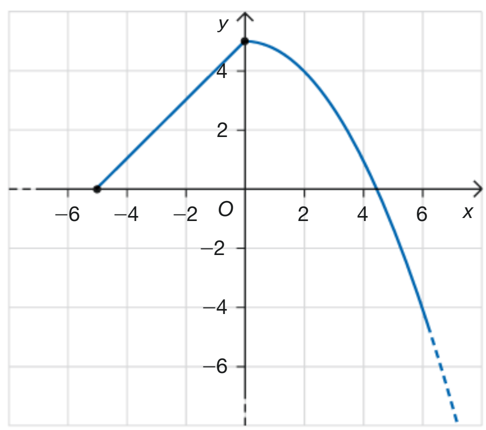
[no]

11 ●○○



[sì; [0; 5]; [−3; 5]]

12 ●○○



[sì; $[-5; +\infty[$; $]-\infty; 5]$]

Disegna i seguenti grafici in base alle indicazioni date.

13 Disegna il grafico di una funzione di dominio $[-5; 20]$.

14 Disegna il grafico di una relazione che non sia una funzione e spiega perché non lo è.

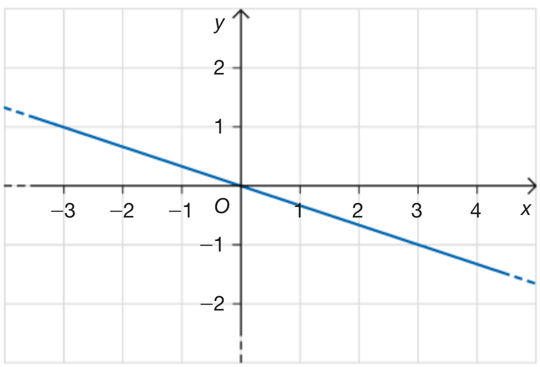
15 Disegna il grafico di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

16 Disegna il grafico di una funzione $f\colon [0; 2] \to [3; 4]$.

Proprietà delle funzioni

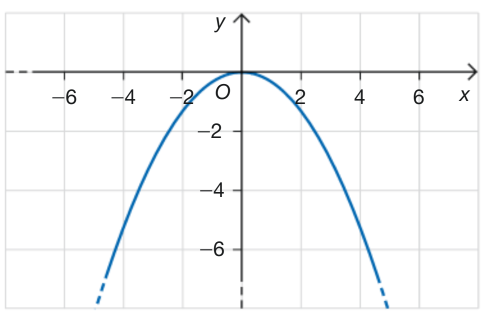
Considera i seguenti grafici e stabilisci se rappresentano una funzione. In caso affermativo, considerando come codominio $\mathbb{R}$, stabilisci se la funzione è iniettiva, suriettiva, biiettiva, pari, dispari.

17



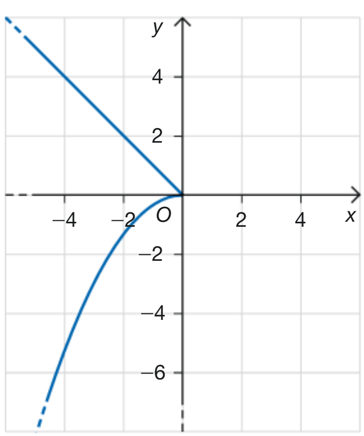
[sì; iniettiva; suriettiva; biiettiva; dispari]

18



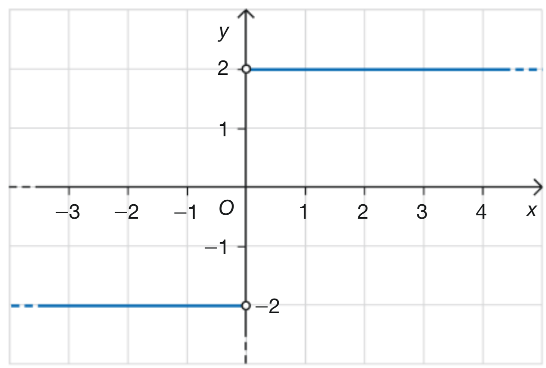
[sì; pari]

19



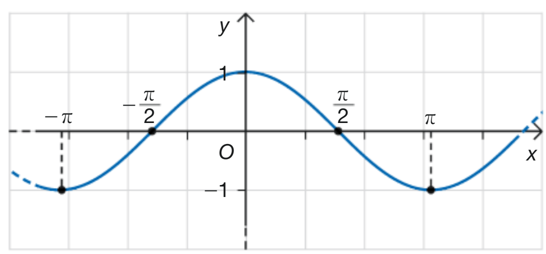
[no]

20



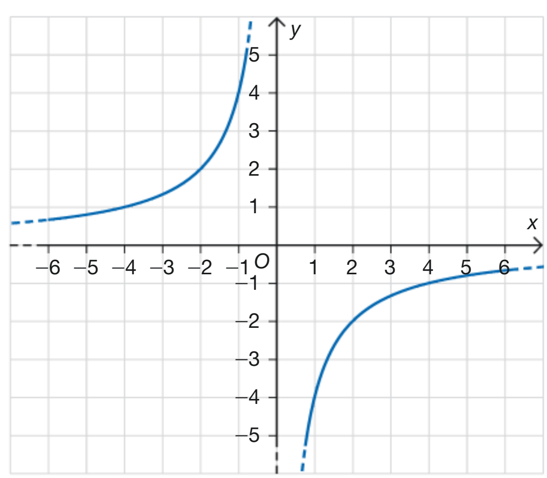
[sì; dispari]

21



[sì; pari]

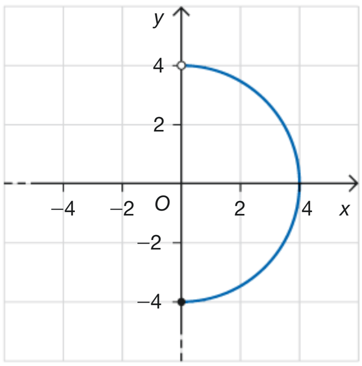
22



[sì; iniettiva; dispari]

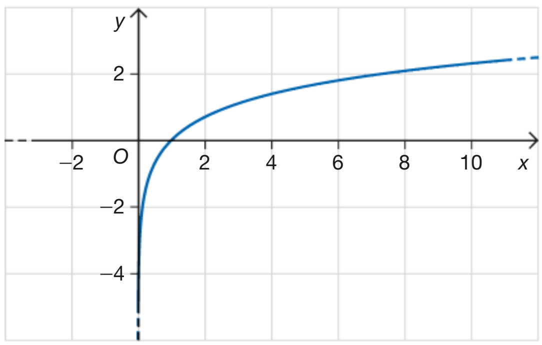
TI RICORDI?

23 ●●○



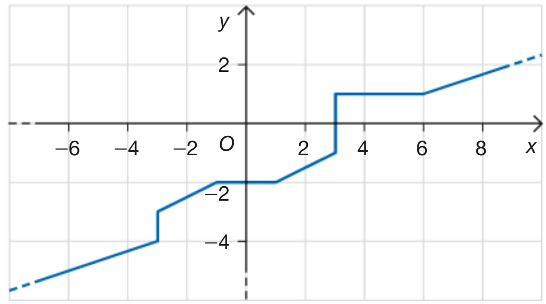
[no]

24 ●●○



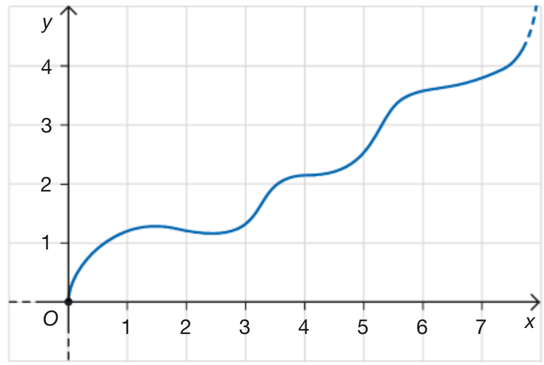
[sì; iniettiva; suriettiva; biiettiva]

25 ●●○



[no]

26 ●●○



[sì]

Disegna i seguenti grafici di funzione secondo le caratteristiche indicate.

27 ●●○ Funzione non iniettiva.

28 ●●○ Funzione iniettiva.

29 ●●○ Funzione suriettiva $f: \mathbb{R} \to [0; 4]$.

30 ●●○ Funzione non suriettiva $f: [-3; 3] \to [1; 5]$.

31 ●●○ Funzione biiettiva.

Considera le seguenti funzioni e per ciascuna stabilisci se è iniettiva, suriettiva, biiettiva, pari, dispari dopo averne disegnato il grafico.

32 ●●○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3}{2}x.$ [Iniettiva; suriettiva; biiettiva; dispari]

33 ●●○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2.$ [Pari]

34 ●●○ $f: [-\infty; 0[\to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2.$ [Iniettiva]

35 ●●○ $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+5}{x}.$ [Iniettiva]

36 ●●○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3.$ [Pari]

37 ●●○ $f: [0; 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x.$ [Iniettiva]

38 ●●○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 4x - 1.$ [Né iniettiva, né suriettiva, né pari, né dispari]

39 ●●○ $f: [-4; 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. [Pari]

40 ●●○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. [Iniettiva; suriettiva; biiettiva; dispari]

41 ●●○ $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$. [Iniettiva; dispari]

Composizione di funzioni

Considera le seguenti coppie di funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e scrivi le equazioni delle funzioni composte $w = f \circ g$ e $z = g \circ f$.

42 ●○○ $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^3$. $\left[w(x) = 2x^3 - 1;\ z(x) = (2x - 1)^3\right]$

43 ●○○ $f(x) = 3x - 5$; $g(x) = \frac{1}{x}$. $\left[w(x) = \frac{3}{x} - 5;\ z(x) = \frac{1}{3x - 5}\right]$

44 ●○○ $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2$. $\left[w(x) = x^4;\ z(x) = x^4\right]$

45 ●○○ $f(x) = \frac{1}{3x}$; $g(x) = \frac{1}{2x}$. $\left[w(x) = \frac{2}{3}x;\ z(x) = \frac{3}{2}x\right]$

46 ●○○ $f(x) = 6x + 3$; $g(x) = \frac{1}{6}(x - 3)$. $\left[w(x) = x;\ z(x) = x\right]$

Considera le seguenti funzioni $f(x)$ e definisci due funzioni $s(x)$ e $t(x)$ in modo che risulti $f = s \circ t$.

47 ●○○ $f(x) = (x + 4)^3$ $\left[\text{Per esempio: } s(x) = x^3;\ t(x) = x + 4\right]$

48 ●○○ $f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\left[\text{Per esempio: } s(x) = \sqrt{x};\ t(x) = x - 2\right]$

49 ●○○ $f(x) = (x - 1)^2 + x - 1$ $\left[\text{Per esempio: } s(x) = x^2 + x;\ t(x) = x - 1\right]$

50 ●○○ $f(x) = \frac{2}{(x + 7)^2}$ $\left[\text{Per esempio: } s(x) = \frac{2}{x^2};\ t(x) = x + 7\right]$

51 ●○○ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}}$ $\left[\text{Per esempio: } s(x) = \frac{1}{\sqrt{x}};\ t(x) = 3x\right]$

Funzioni inverse

Per ciascuna delle seguenti funzioni, se possibile, scrivi l'equazione della funzione inversa e rappresentane il grafico.

52 ●○○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$. $\left[y = 3 - x\right]$

53 ●○○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 6$. $\left[y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\right]$

54 ●●○ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. [Non invertibile]

55 ●●○ $f: [4; +\infty[\to [0; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x - 4}$. $\left[y = x^2 + 4\right]$

56 ●●○ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x}$. $\left[y = \frac{1}{x}\right]$

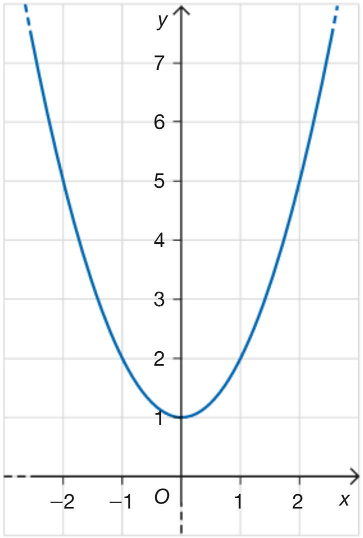
57 ●●● $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$. [Non invertibile]

58 ●●● $f: [2; +\infty[\to [-3; +\infty[$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$. $\left[y = 2 + \sqrt{3 + x}\right]$

TI RICORDI?

Risolvi il seguente problema.

59 Il grafico della funzione inversa di una funzione biunivoca $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ può essere ottenuto facendo la simmetria del grafico di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.
Utilizza la funzione rappresentata nel seguente grafico per spiegare come mai è sbagliata l'affermazione «facendo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del grafico di una funzione f, si ottiene il grafico della sua inversa».



Funzioni e trasformazioni geometriche

Per ciascun gruppo di funzioni traccia il grafico della funzione $f(x)$ e, a partire da questo, quelli delle altre.

60 $f(x) = x^2; \quad g(x) = (x-3)^2; \quad h(x) = (x-3)^2 + 5.$

61 $f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{x+4}; \quad h(x) = \frac{1}{x+4} + 2.$

62 $f(x) = x^2 + 2x; \quad g(x) = -x^2 - 2x; \quad h(x) = x^2 - 2x.$

63 $f(x) = x^2 - 6x; \quad g(x) = (x-3)^2 - 6(x-3); \quad h(x) = -x^2 + 6x.$

64 $f(x) = \frac{4}{x}; \quad g(x) = -\frac{4}{x}; \quad h(x) = -\frac{4}{x} - 3.$

VERSO L'INVALSI

65 **INVALSI 2007** Sono date le due funzioni $f(x) = x + 1$ e $g(x) = -2x + 3$. Quali sono gli zeri della funzione $f(x) \cdot g(x)$?

a -1 e $\frac{3}{2}$.

b 1 e $-\frac{2}{3}$.

c 1 e $-\frac{3}{2}$.

d -1 e $\frac{2}{3}$.

[INVALSI – scuola secondaria II grado]

66 Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$ è:

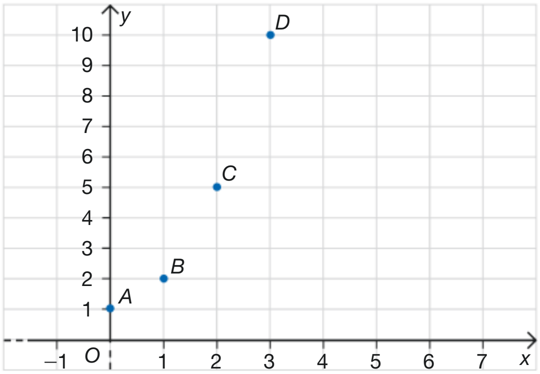
a $\mathbb{R}$.

b $x \neq -1$.

c $x > -1$.

d $x \geq -1$.

67 **INVALSI 2016** Sul seguente piano cartesiano sono rappresentati i punti $A(0;1)$, $B(1;2)$, $C(2;5)$, $D(3;10)$.



Il grafico della funzione f passa per i punti A, B, C, D. Quale tra le formule seguenti individua la funzione f?

a $f(x) = x^3 + 1$. c $f(x) = -x^2 + 1$.
b $f(x) = 2^x$. d $f(x) = x^2 + 1$.

[INVALSI – scuola secondaria II grado]

68 Data la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F).

a. 0 non appartiene al dominio della funzione. V F

b. 0 non appartiene all'insieme immagine della funzione. V F

c. 1 non appartiene al dominio della funzione. V F

d. 1 non appartiene all'insieme immagine della funzione. V F

e. La funzione assume valori positivi se $x > 1$. V F

69 **INVALSI 2016** Per calcolare il voto V di laurea in alcune facoltà viene applicata la seguente formula:

$$V = \frac{M}{3} \cdot 11 + T$$

dove:

- M rappresenta la media dei voti (variabile da un minimo di 18 a un massimo di 30);
- T è il punteggio attribuito alla tesi di laurea (variabile da un minimo di 5 a un massimo di 11 punti).

a. La media M dei voti di Irene è 24. Il suo voto V di laurea può essere 90?
Scegli la risposta e completa la frase.

☐ Sì, perché ....
....
....
....

☐ No, perché ....
....
....
....

b. La media M dei voti di Pietro è 27. Pietro vuole ottenere almeno 105 come voto V di laurea.
Qual è il punteggio minimo T che Pietro dovrà ottenere nella tesi?

a 5 b 6 c 8 d 11

[INVALSI – scuola secondaria I grado]

70 Data la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$, l'equazione della funzione inversa di f è:

a $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 4$.

b $f^{-1}(x) = x + 4$.

c $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-4}$.

d $f^{-1}(x) = (x-4)^{-1}$.

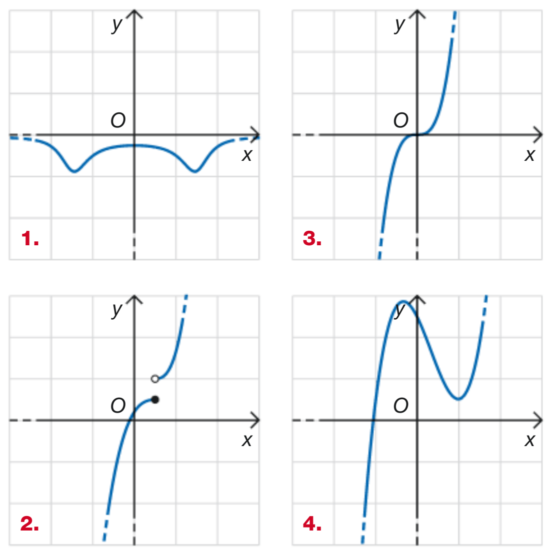
71 Associa a ciascuna delle funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rappresentate nei grafici sottostanti una delle seguenti caratteristiche.

a. La funzione è iniettiva ma non è suriettiva.

b. La funzione è suriettiva ma non è iniettiva.

c. La funzione non è né iniettiva né suriettiva.

d. La funzione è biunivoca.



72 Stabilisci se le seguenti affermazioni, relative alla funzione di equazione $y = ax^2 + 4ax$, sono vere (V) o false (F).

a. È una parabola per qualsiasi valore reale di a. V F

b. È una parabola rivolta verso l'alto se $a > 1$. V F

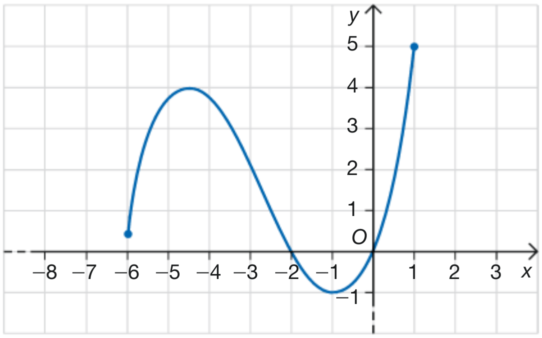
c. È una parabola con vertice di ascissa negativa se $a \neq 0$. V F

d. Passa per l'origine per qualsiasi valore di a. V F

e. Non ha mai come grafico una retta. V F

TI RICORDI?

73 **INVALSI 2007** Nella figura è rappresentato nell'intervallo $-6 \leq x \leq 1$ il grafico di una funzione.



In quale dei seguenti insiemi la funzione assume solo valori positivi?

a $-2 < x < 0$.

b $-6 \leq x < -2 \cup 0 < x \leq 1$.

c $0 < x \leq 5$.

d $-6 \leq x \leq -2 \cup 0 \leq x \leq 1$.

[INVALSI – scuola secondaria II grado]

74 **INVALSI 2011** Nelle prime due colonne di un foglio elettronico sono state calcolate alcune coppie di valori (x, y) di una funzione.
Quale tra le seguenti è la funzione di cui sono stati calcolati i valori (x, y)?

x	1	2	5	10	17	26	37
y	0	1	2	3	4	5	6

a $y = \sqrt{x} - 1$.

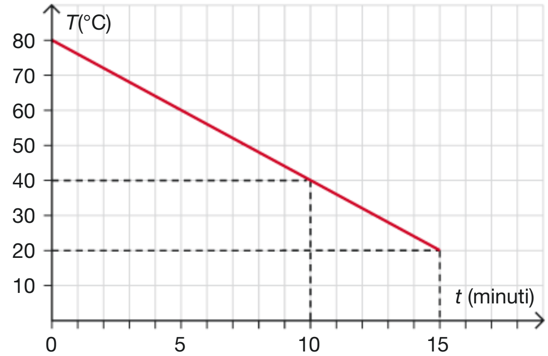
b $y = \sqrt{x+1}$.

c $y = \sqrt{x-1}$.

d $y = 1 + \sqrt{x}$.

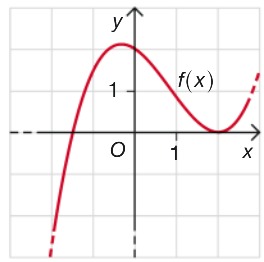
[INVALSI – scuola secondaria II grado]

75 Una pentola piena d'olio viene messa a raffreddare per 15 minuti all'interno di un abbattitore (uno strumento utilizzato per il raffreddamento rapido).
L'andamento della temperatura T (in °C) dell'olio in funzione del tempo t (in minuti) è rappresentato dal seguente grafico.
Di quanto diminuisce all'incirca la temperatura dell'olio negli ultimi 5 minuti?



Risposta: .... °C.

76 A partire dal grafico di $f(x)$, associa a ciascuno dei quattro grafici proposti una delle seguenti funzioni.

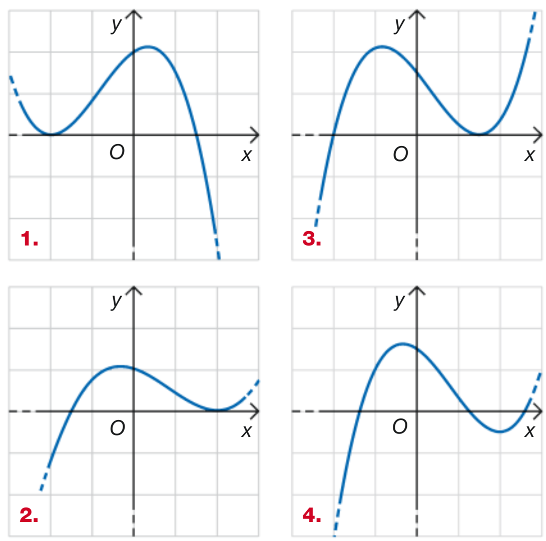


a $f(x+1)$

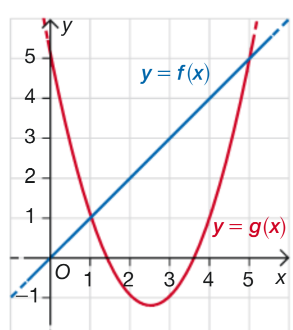
b $f(x) - 1$

c $f(-x)$

d $\frac{1}{2} f(x)$



77 In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni f e g definite, nell'insieme dei numeri reali, dalle equazioni $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 5x + 5$.



Aiutandoti anche con i grafici di f e g, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

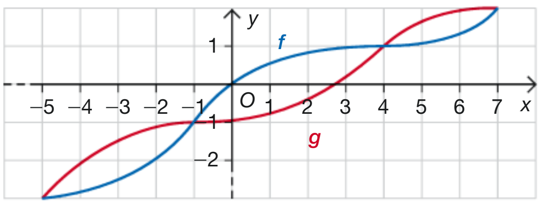
a. $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. V F

b. $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1$ o $x = 5$. V F

c. $g(x) > f(x)$ se e solo se $x < 1$ o $x > 5$. V F

d. $f(x) > 0$ se e solo se $1 < x < 5$. V F

78 Osserva i grafici delle funzioni f e g di variabile reale definite nell'intervallo $[-5; 7]$.



L'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) < g(x)$ è:

a. $-5 < x < -1 \quad \vee \quad 4 < x < 7$ V F

b. $-3 < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < 2$ V F

c. $-1 < x < 4$ V F

d. $-1 < x < 1$ V F

79 Il dominio di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme dei valori che possono essere attribuiti:

a alla y affinché la x esista.

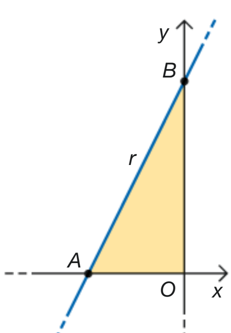
b alla x affinché la y non si annulli.

c alla y affinché la x non si annulli.

d alla x affinché la y esista.

80 **INVALSI 2013** Osserva la seguente figura.

Le coordinate di A sono $(-3; 0)$ e l'area del triangolo AOB è 9. Quale fra le seguenti equazioni rappresenta la retta r?



a $y = 2x + 6$.

b $y = -2x - 6$.

c $y = 3x + 9$.

d $y = -3x - 9$.

[INVALSI – scuola secondaria II grado]

81 Completa il seguente testo.

Se f è una funzione .... possiamo considerare la sua funzione inversa f^{-1}.

Se $f(-x) =$ ...., cioè se f è una funzione dispari, possiamo dimostrare che f^{-1} è ....

Ricordiamo che per definizione di funzione inversa vale che $f^{-1}(f(x)) =$ ....; dato che f è dispari possiamo scrivere $f^{-1}(-x) = f^{-1}($.................$)$, da cui $f^{-1}(-x) =$ ....

82 Individua quali fra i seguenti punti non appartengono al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x}.$$

a $(1; 0)$

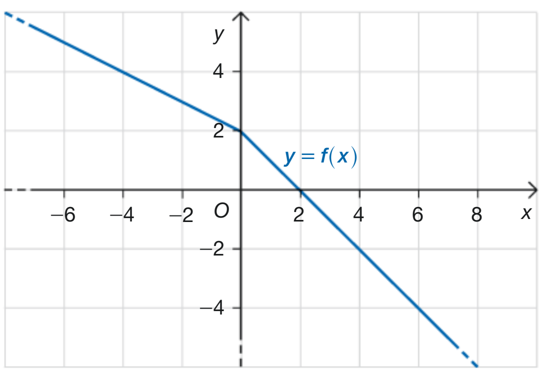
b $(0; 1)$

c $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$

d $(-1; 0)$

e $\left(-3; -\frac{10}{3}\right)$

83 Utilizza il grafico seguente per completare le seguenti uguaglianze.



a. $f(6) =$ ....

b. $f($.........$) = 3$

c. $f(f(2)) =$ ....

d. $f(f($..........$)) = 4$