Le disequazioni

CAPITOLO 9

1 Che cos'è una disequazione

Esercizi
a pag. 576

INDIVIDUARE COLLEGAMENTI E RELAZIONI

GIOCHIAMO CON LA MENTE

Più grande, più piccolo

Elena e Luca

► Elena e Luca hanno fatto una gara di corsa e ha vinto Elena. Scegli due simboli che indichino il tempo impiegato da Elena e il tempo impiegato da Luca e poi scrivi la relazione che esiste tra i due tempi:

.... = tempo di Elena

.... = tempo di Luca

Relazione tra i due tempi: ....

Tommaso

► Tommaso gioca nella squadra Under14 di basket. Scegli un simbolo per indicare l'età di Tommaso ed esprimi l'informazione che abbiamo sulla sua età:

.... = età di Tommaso.
Informazione sull'età di Tommaso: ....

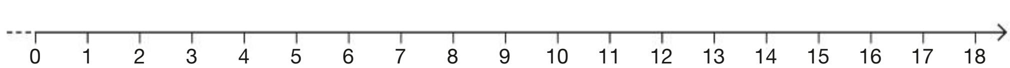
► A quale insieme numerico ritieni appartenga il valore dell'età di Tommaso?

....
....
....

► Scrivi tutti i valori possibili dell'età di Tommaso:

....
....
....
....

► Rappresenta i possibili valori dell'età di Tommaso sulla retta dei numeri.



Pesca sul lago ghiacciato

► L'acqua di un lago è ghiacciata. Scegli un simbolo per indicare la temperatura dell'acqua del lago ed esprimi l'informazione che abbiamo sul valore della temperatura.

.... = temperatura del lago in gradi Celsius.
Informazione sulla temperatura del lago: ....

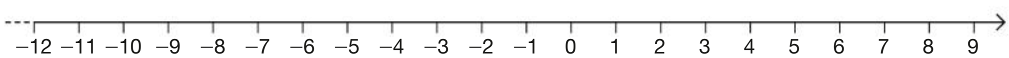
► Scrivi 5 possibili valori della temperatura del lago, espressi in gradi Celsius.

....

....

....

► Rappresenta i possibili valori della temperatura del lago sulla retta dei numeri (la temperatura può assumere valori reali).



In generale

► Sapendo che $x < 12$, scrivi quattro possibili valori reali per x.

....

....

....

► Puoi scrivere altri tre valori?

....

....

....

► Puoi scrivere tutti i valori possibili per x?

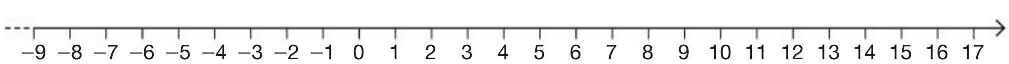
....

....

....

Sull'eBook ti proponiamo un'altra attività come questa.

► Rappresenta sulla retta dei numeri i possibili valori di x tali che $x < 12$.



TEORIA

IN TEORIA

Le disuguaglianze

Con i simboli della tabella seguente si possono rappresentare *disuguaglianze* tra numeri.

Simbolo	Significato
$a > b$	a è maggiore di b
$a < b$	a è minore di b
$a \geq b$	a è maggiore o uguale a b
$a \leq b$	a è minore o uguale a b

Una disuguaglianza tra numeri può essere *vera* oppure *falsa*.

PER ESEMPIO
- $3 + 5 > 8 - 4 \quad \rightarrow \quad 8 > 4$: *vero*.
- $3 + 1 < 2 \quad \rightarrow \quad 4 < 2$: *falso*.

Le disequazioni

Chiamiamo **disequazione** una disuguaglianza tra espressioni numeriche o letterali.

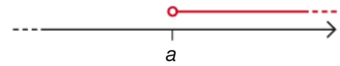
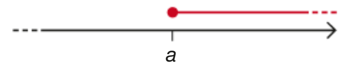
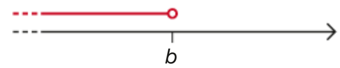
In una disequazione possono essere presenti più lettere.
Una disequazione può descrivere relazioni tra numeri o lettere.
Le due espressioni confrontate si dicono *membri* della disequazione.
Una disequazione può essere *vera* o *falsa*, a seconda di quale numero si sostituisce alle lettere presenti in essa.

PER ESEMPIO Consideriamo la disequazione $2x > 4$.
- Se attribuiamo a x il valore 3, la disuguaglianza è vera:
  $2 \cdot 3 > 4 \quad \rightarrow \quad 6 > 4$: *vero*.
- Se attribuiamo a x il valore 1, la disuguaglianza è falsa:
  $2 \cdot 1 > 4 \quad \rightarrow \quad 2 > 4$: *falso*.

Risolvere la disequazione significa trovare quali valori numerici sostituiti a determinate lettere della disequazione rendono vera la disuguaglianza. Le lettere di cui cerchiamo i valori che rendono vera la disequazione si dicono **incognite**.

Studieremo le disequazioni in cui compaiono **polinomi di primo grado in una sola incognita**.
L'incognita può assumere i valori contenuti in un dato insieme A, che è l'insieme in cui cerchiamo le **soluzioni** della disequazione. L'insieme A può essere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, oppure un loro sottoinsieme. Di solito cercheremo le soluzioni in $\mathbb{R}$; in casi diversi, lo specificheremo.
Mentre un'*equazione* di primo grado in una incognita, se non è indeterminata, può avere al massimo una soluzione, una *disequazione* di primo grado in una incognita può avere anche infinite soluzioni.
Possiamo rappresentare la soluzione di una disequazione in diversi modi: con una disuguaglianza, con un intervallo o sulla retta dei numeri.

Vediamo alcuni esempi, per capire come passare da una rappresentazione all’altra.

Significato	Disuguaglianza	Intervallo	Retta dei numeri
Tutti i numeri maggiori di a	$x > a$	$]a; +\infty[$	
Tutti i numeri maggiori o uguali ad a	$x \geq a$	$[a; +\infty[$	
Tutti i numeri minori di b	$x < b$	$]-\infty; b[$	
Tutti i numeri compresi tra a e b ($a < b$)	$a < x < b$	$]a; b[$	
Tutti i numeri compresi tra a e b, o uguali ad a o b	$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	

Osserviamo che:
- quando un valore estremo è compreso nell’insieme che si vuole indicare, si usa la parentesi quadra ordinaria o un pallino pieno;
- quando non è compreso, si usa una parentesi quadra ribaltata o un pallino vuoto;
- gli estremi $+\infty$ («più infinito») e $-\infty$ («meno infinito») non appartengono a $\mathbb{R}$, quindi non sono mai compresi.

IN PRATICA

[A] Come si verifica se un numero è soluzione di una disequazione?

PER ESEMPIO

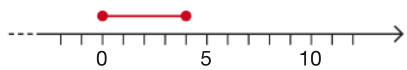
- 3 è soluzione della disequazione $4x + 5 > 3 - 3x$?
  Per verificare se 3 è soluzione della disequazione, sostituiamo il valore all’incognita x e verifichiamo se la disuguaglianza che ne risulta è vera:
  $$4 \cdot 3 + 5 > 3 - 3 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad 12 + 5 > 3 - 9 \quad \rightarrow \quad 17 > -6\text{: } \textit{vero}.$$
  Quindi 3 è una soluzione della disequazione.
- $-\frac{1}{2}$ è soluzione della disequazione $\frac{5}{3} + 2x < \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$?
  Sostituiamo il valore all’incognita e verifichiamo se la disuguaglianza è vera:
  $$\frac{5}{3} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3} - 1 < -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} < -\frac{5}{6}\text{: } \textit{falso}.$$
  Quindi $-\frac{1}{2}$ non è soluzione della disequazione.

[B] Come si rappresenta un intervallo di numeri?

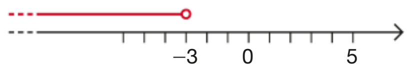
PER ESEMPIO

- Rappresentiamo i numeri reali compresi tra 0 e 4, estremi inclusi, cioè tutti quei numeri che sono sia maggiori o uguali a 0 sia minori o uguali a 4.
  Li possiamo rappresentare **con una catena di disuguaglianze**. Indicando genericamente uno di questi numeri con x, la condizione si scrive: $0 \leq x \leq 4$.
  Poiché gli estremi sono compresi, scriviamo l’intervallo racchiudendo gli estremi tra parentesi quadre: $[0; 4]$.

Infine, possiamo rappresentare l'intervallo sulla retta. I pallini pieni indicano che i valori 0 e 4 sono compresi.



- Rappresentiamo i numeri reali minori di -3. La disuguaglianza si può scrivere:



$$x < -3$$

e si rappresenta graficamente come in figura. Il cerchietto vuoto in corrispondenza di -3 indica che il valore non è compreso.
Possiamo infine scrivere l'intervallo usando le parentesi quadre rovesciate, per indicare che gli estremi non sono compresi: $]-\infty; -3[$.

PROVA TU

[A] **Verifica se i numeri scritti a fianco delle disequazioni sono loro soluzioni (esercizi da 1 a 7).**

1 $2x > 3$; $\quad 4; -2$.

2 $3x - 1 < 0$; $\quad 6; -2$.

3 $3x - 5 \geq 4x + 1$; $\quad 0; -6$.

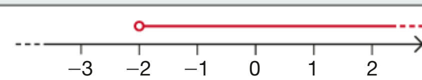
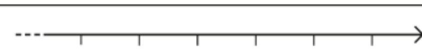
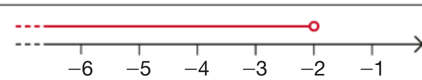
4 $4 - 3x < 8 - x$; $\quad 2; -2$.

5 $3 - 5x \geq x + 1$; $\quad 0; -\frac{2}{3}; \frac{1}{6}$.

6 $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x \leq x + \frac{1}{4}$; $\quad \frac{2}{3}; -1; \frac{6}{5}$.

7 $\frac{3}{5}x - 2 > \frac{4}{7} + \frac{x}{7}$; $\quad -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.

[B] **8** Completa la tabella rappresentando ogni disequazione nei modi che conosci.

Disuguaglianza	Intervallo	Retta dei numeri
x > -2	]-2; +∞[	
$x > 4$		
	$[2; 5[$	
$0 \leq x \leq \frac{3}{4}$		
	$]-2; 1[$	
		

Esercizi a pag. 576

Esercizi a pag. 577

La risoluzione delle disequazioni di primo grado

2

INDIVIDUARE COLLEGAMENTI E RELAZIONI

GIOCHIAMO CON LA MENTE

Cambiare e non cambiare

Sull'eBook ti proponiamo un'altra attività come questa.

Analizziamo che cosa succede a una disuguaglianza (vera) quando si eseguono le stesse operazioni a entrambi i membri.
In particolare ci chiediamo se, dopo aver effettuato la stessa operazione al primo e al secondo membro, la disuguaglianza rimane vera o se è necessario cambiare il verso.

► Considera la disuguaglianza **10 > 6** e completa la seguente tabella (puoi decidere tu quali numeri usare per sottrarre, moltiplicare o dividere).

Casi	Calcoli	Disuguaglianza	Cambia il verso?	Conclusione
Addizione di uno stesso numero a entrambi i membri	1° membro: $10 + \ldots\ldots = 16$ 2° membro: $6 + \ldots\ldots = 12$	...16 > 12...	...no...	Se $x > y$ allora $x + c$ ...>... $y + c$
Sottrazione di uno stesso numero a entrambi i membri	1° membro: $10 - \ldots\ldots = \ldots\ldots$ 2° membro: $6 - \ldots\ldots = \ldots\ldots$	....	....	Se $x > y$ allora $x - c$ .... $y - c$
Moltiplicazione per uno stesso numero positivo di entrambi i membri	1° membro: $10 \cdot \ldots\ldots = 30$ 2° membro: $6 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$	....	....	Se $x > y$ e $c > 0$ allora $x \cdot c$ .... $y \cdot c$
Moltiplicazione per uno stesso numero negativo di entrambi i membri	1° membro: $10 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$ 2° membro: $6 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$	....	....	Se $x > y$ e $c < 0$ allora $x \cdot c$............ $y \cdot c$
Divisione per uno stesso numero positivo di entrambi i membri	1° membro: $10 : \ldots\ldots = \ldots\ldots$ 2° membro: $6 : \ldots\ldots = \ldots\ldots$	....	....	Se $x > y$ e $c > 0$ allora $x : c$ .... $y : c$
Divisione per uno stesso numero negativo di entrambi i membri	1° membro: $10 : \ldots\ldots = \ldots\ldots$ 2° membro: $6 : \ldots\ldots = \ldots\ldots$	....	....	Se $x > y$ e $c < 0$ allora $x : c$ ....$y : c$

TEORIA

IN TEORIA

Le disequazioni equivalenti

La risoluzione delle disequazioni di primo grado si basa su principi analoghi a quelli delle equazioni.

Come le equazioni, due disequazioni si dicono **equivalenti** nell'insieme A se, in tale insieme, ogni soluzione della prima disequazione è anche soluzione della seconda e viceversa.

In altre parole, due disequazioni sono *equivalenti* nell'insieme A se in A hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

PER ESEMPIO La disequazione $x + 2 < 5$ e la disequazione $x < 3$ sono equivalenti: tutte e due sono risolte per tutti i valori di x minori di 3.

Quando la soluzione di una disequazione non è immediata, sostituiamo la disequazione con altre equivalenti in modo che siano via via più semplici, fino ad arrivare a una disequazione elementare del tipo $x < c$, $x \leq c$, $x > c$ o $x \geq c$.

Il primo principio di equivalenza delle disequazioni

Una disequazione nell'insieme A si trasforma in un'altra equivalente quando a entrambi i membri si addiziona (o si sottrae) uno stesso numero o una stessa espressione letterale, purché sempre definita nell'insieme A.

Una conseguenza del primo principio di equivalenza è che, se si «trasporta» un termine da un membro all'altro cambiandone il segno, si ottiene una disequazione equivalente.

PER ESEMPIO La disequazione $3x + 2 < x - 5$ e la disequazione $3x - x + 2 < -5$ sono equivalenti. Infatti, aggiungendo $-x$ a entrambi i membri della prima disequazione, otteniamo:

$$3x + 2 < x - 5 \quad \rightarrow \quad 3x + 2 - x < x - 5 - x \quad \rightarrow \quad 3x - x + 2 < -5$$

esattamente come se avessimo trasportato x dal secondo al primo membro, cambiandone il segno.

Il secondo principio di equivalenza delle disequazioni

- Una disequazione nell'insieme A si trasforma in un'altra equivalente quando si moltiplicano (o dividono) entrambi i membri per uno stesso numero **positivo.**
- Una disequazione nell'insieme A si trasforma in un'altra equivalente quando si moltiplicano (o dividono) entrambi i membri per uno stesso numero **negativo** e **si cambia il verso** della disuguaglianza.

Una conseguenza del secondo principio di equivalenza è che, se si cambiano i segni di tutti i termini e si cambia il segno della disuguaglianza, si ottiene una disequazione equivalente (infatti, cambiare tutti i segni è equivalente a moltiplicare per -1).

PER ESEMPIO La disequazione $-3x < 5$ e la disequazione $x > -\frac{5}{3}$ sono equivalenti: entrambi i membri sono stati divisi per -3 ed è stato cambiato il verso della disuguaglianza.

IN PRATICA

[A] Come si usano i principi di equivalenza per risolvere le disequazioni?

I due principi di equivalenza possono essere utilizzati per ricavare disequazioni via via più semplici, ma sempre equivalenti a quella da risolvere.
In genere, per risolvere le disequazioni di primo grado si può procedere secondo il seguente schema:

- utilizzando il primo principio, si fa in modo che il primo membro contenga solo termini con l'incognita e il secondo membro contenga solo termini noti;
- utilizzando il secondo principio, si fa in modo che il coefficiente dell'incognita a primo membro si riduca a 1.

PER ESEMPIO

- Consideriamo la disequazione:

  $2 - x > 7 - 2x.$

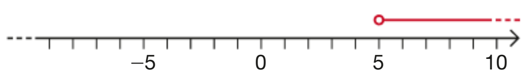
  Per avere le incognite a primo membro e i termini noti a secondo membro, trasportiamo il termine 2 a destra e il termine $-2x$ a sinistra, cambiando i loro segni:

  $2x - x > 7 - 2.$

  Sommiamo i termini simili:

  $x > 5.$

  Il coefficiente dell'incognita a primo membro è già 1, quindi abbiamo già ottenuto la soluzione. Possiamo rappresentare graficamente la soluzione o indicare l'insieme delle soluzioni sotto forma di intervallo:



  $S =]5; +\infty[.$

- Risolviamo la disequazione:

  $2x - 2 \leq 5x + 4.$

  Isoliamo le incognite a primo membro e i termini noti a secondo membro:

  $2x - 5x \leq 4 + 2.$

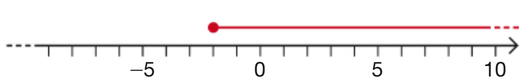
  Sommiamo i termini simili:

  $-3x \leq 6.$

  Il coefficiente dell'incognita è -3; affinché diventi 1 dobbiamo dividere entrambi i membri per -3, e quindi cambiare il verso della disuguaglianza:

  $$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{6}{-3} \quad \rightarrow \quad x \geq -2.$$

  Possiamo rappresentare graficamente la soluzione o scriverla sotto forma di intervallo:



  $S = [-2; +\infty[.$

PROVA TU

1 Completa con i simboli $<, \leq, <, \geq$.

a. Se $x < y$, allora $-5x$ ......>...... $-5y$.

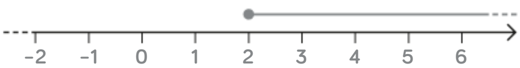
b. Se $x > y$, allora $\frac{x}{-20}$ .... $\frac{y}{-20}$.

c. Se $x \leq y$, allora $-3x$ .... $-3y$.

d. Se $x \geq y$, allora $\frac{x}{-10}$ .... $\frac{y}{-10}$.

[A] **Risolvi ogni disequazione e rappresenta la sua soluzione anche graficamente (esercizi da 2 a 17).**

2 $3x \geq 6$



3 $-x > -2$

4 $-x \geq 1$

5 $5k < 2k - 3$

6 $6x \leq 3$

7 $4 > 6x$

8 $3x < 27$

9 $-2x \geq 4$

10 $15x > 75$

11 $-4x \leq 16$

12 $3x \leq 18$

13 $4x \geq 62$

14 $3y < -36$

15 $5y > -24$

16 $-x < -2x + 3$

17 $x + 2 > 3x$

18 **ARGOMENTARE** Trova il più piccolo valore intero di x che soddisfa la disequazione $6x > 7$.

Esercizi a pag. 577

Esercizi
a pag. 578

Disequazioni per risolvere problemi

3

RISOLVERE PROBLEMI

GIOCHIAMO CON LA MENTE

Transito vietato

Il segnale stradale in figura significa che è vietato il transito a veicoli la cui massa supera le 2,5 tonnellate per ogni asse, ovvero ogni fila di ruote.

► Se un tir ha una massa di 14 tonnellate, quanti assi deve avere per poter passare?
Procediamo per passi.

- Indica con una variabile il numero di assi del tir: ....
- Scrivi un'espressione, contenente la variabile che hai appena definito, che indichi la massa complessiva ammissibile con questo numero di assi:
  ....
- Partendo dall'espressione che hai scritto, formula la condizione per cui la massa del tir non deve superare quella complessiva ammissibile:
  ....
- A che insieme deve appartenere il numero di assi del tir?
  ....
- Risolvi la disequazione che hai scritto, nell'insieme specificato.
  ....
  ....
  ....
- Scrivi la risposta al problema.
  ....
  ....

► Scrivi le disequazioni che esprimono il significato dei segnali stradali in figura:

a.

b.

c.

d.

e.

....
....
....
....
....

Sull'eBook ti proponiamo un'altra attività come questa.

TEORIA

IN TEORIA

In molte situazioni reali non si richiede che una certa grandezza abbia *esattamente* un dato valore, ma che sia *almeno* pari a un certo valore, oppure *non più di* un dato limite.

PER ESEMPIO

- In Italia è vietato vendere alcolici ai minori di 18 anni. Questo divieto potrebbe essere tradotto in una disuguaglianza.
Indicando con e l'età dell'acquirente, espressa in anni, possiamo scrivere:
$e \geq 18$.

- In un campionato di calcio Under12 possono partecipare solo ragazzi la cui età e in anni soddisfi la condizione:
$e \leq 12$.

Nella tabella seguente riportiamo alcune espressioni usate nel linguaggio di tutti i giorni che possono avere il significato di una disuguaglianza (l'elenco non è esaustivo, perché gli stessi concetti si possono esprimere in forme diverse).

Espressione	Esempio	Disuguaglianza
Almeno	Per passare alla fase successiva dei campionati, devi gettare il peso ad almeno 15 m.	l = distanza $l \geq 15$ m
Al massimo	Quest'aula può contenere al massimo 24 studenti.	s = studenti in aula $s \leq 24$
Non può superare	La larghezza delle auto che passano sotto l'arco non può superare 1,70 m.	l = larghezza $l \leq 1{,}70$ m
Deve superare	Nelle donne il valore del colesterolo HDL nel sangue deve superare i 45 mg/dL.	c = concentrazione colesterolo HDL $c > 45$ mg/dL
Meno di	In questo compito ho preso meno di 6.	v = voto $v < 6$
Più di	Se vuoi vincere, in questo turno devi realizzare più di 50 punti.	p = punteggio $p > 50$
Tra	Il film dura tra i 95 e i 115 minuti.	d = durata 95 min $\leq d \leq$ 115 min
Non più	Se vuoi finire in tempo per il cinema, devi mangiare in non più di 10 minuti.	t = tempo $t \leq 10$ min
Non meno	Per mantenere la media dell'otto nella prossima verifica, devo prendere non meno di 7,5.	v = voto $v \geq 7{,}5$

I problemi che si possono descrivere con delle disuguaglianze possono quindi avere anche molte soluzioni, a volte infinite.

IN PRATICA

[A] Come si esprime un'informazione con una disuguaglianza?

PER ESEMPIO Esprimiamo le seguenti affermazioni con delle disuguaglianze.

- L'auto di Paola è costata almeno 25 000 €.
- Siamo a non più di 50 km da Verona.
- Il canone di affitto non supera i 600 €.

In ciascuno di questi casi, prima di tutto assegniamo una variabile alla grandezza di cui si parla, poi utilizziamo la variabile per scrivere la disuguaglianza:

- c = costo dell'auto di Paola; $c \geq 25\,000$ €;
- d = distanza da Verona; $d \leq 50$ km;
- a = canone di affitto; $a \leq 600$ €.

[B] Come si risolve un problema con una disequazione?

PER ESEMPIO

- Anna vuole comprare dei quaderni su internet che costano 1,80 € ciascuno. Se si spendono almeno 15 €, la spedizione è gratuita. Quanti quaderni deve comprare Anna per avere la spedizione gratuita?
  Indichiamo con q il numero dei quaderni.
  Poiché ciascuno costa 1,80 €, la spesa totale sarà:
  $$q \cdot 1{,}80$$
  e la condizione per la spedizione gratuita si può esprimere con la disequazione:
  $$q \cdot 1{,}80 \geq 15.$$
  Risolviamo la disequazione:
  $$q \geq \frac{15}{1{,}80} \quad \rightarrow \quad q \geq 8{,}\bar{3}.$$
  Poiché il numero di quaderni deve essere un numero naturale (cioè stiamo risolvendo questa disequazione in $\mathbb{N}$), otteniamo:
  $$q \geq 9,$$
  cioè Anna deve comprare *almeno* 9 quaderni.

- Un mobilificio avvia la produzione di una nuova linea di tavoli; l'allestimento della linea di produzione è costato 40 000 €, mentre la produzione di ciascun tavolo costa 500 € e i tavoli vengono venduti a 700 € l'uno. Quanti tavoli devono essere venduti perché ci sia un profitto?
  Indichiamo con t il numero dei tavoli prodotti e venduti.
  Il costo complessivo è allora rappresentato dall'espressione:
  $$40\,000 + 500\,t,$$
  e il ricavo ammonta a:
  $$700\,t.$$
  Si ha un profitto se i ricavi sono maggiori dei costi, cioè se:
  $$700\,t > 40\,000 + 500\,t.$$
  Risolviamo la disequazione:
  $$700\,t - 500\,t > 40\,000 \quad \rightarrow \quad 200\,t > 40\,000 \quad \rightarrow \quad t > \frac{40\,000}{200} \quad \rightarrow \quad t > 200.$$
  L'azienda deve vendere *più di* 200 tavoli per avere un profitto.

TEORIA

PROVA TU

[A] **1** Esprimi le seguenti affermazioni con delle disuguaglianze.

a. Per arrivare fino in centro ci metterò almeno tre quarti d'ora.

....

b. In frigo abbiamo al massimo 3 uova.

....

c. Paperopoli dista da Topolinia tra 80 e 120 km.

....

d. Alla festa ci saranno state più di 50 persone!

....

e. Puoi sicuramente trovare una chitarra per meno di 60 €.

....

f. Io sono più giovane di Giorgio.

....

g. Paperone è più ricco di Rockerduck.

....

h. L'Adige è più corto del Po ma più lungo del Mincio.

....

[B] **2** **RISOLVERE PROBLEMI** Un autobus può trasportare al massimo 45 studenti. Imposta una disequazione per determinare il minimo numero di autobus necessari per trasportare 520 studenti e risolvila.

[B] **3** **RISOLVERE PROBLEMI** Un cartoccio di castagne costa 1,80 €. Imposta e risolvi una disequazione per determinare quanti cartocci di castagne si possono comprare con 20 €.

[B] **4** **RISOLVERE PROBLEMI** Nei primi tre test di matematica, Priscilla ha preso rispettivamente 85, 74 e 88 punti. Imposta e risolvi una disequazione per calcolare quanto deve prendere Priscilla nel quarto test per avere una media di almeno 80 punti.

[B] **5** **RISOLVERE PROBLEMI** L'hard disk di Tom ha una capienza di 800 GB, e di questi 277 GB sono già occupati. Imposta e risolvi una disequazione per calcolare quanti film da 7 GB l'uno è possibile memorizzare sull'hard disk.

[B] **6** **RISOLVERE PROBLEMI** Michele, riparatore di elettrodomestici, quando lavora al domicilio del cliente si fa pagare 30 € per la trasferta e 25 € l'ora. La settimana scorsa ha riparato la lavatrice a casa di Pietro, che ricorda di aver speso meno di 100 €.
Imposta e risolvi una disequazione per determinare per quanto tempo Michele ha lavorato sulla lavatrice di Pietro.

[B] **7** **RISOLVERE PROBLEMI** Sarah e Tania hanno deciso di comprare un regalo di compleanno per Arianna. Hanno stabilito di non spendere più di 20 € e che Sarah pagherà 2 € più di Tania. Quale sarà la spesa di Tania?

SUGGERIMENTO Scegli in modo opportuno la variabile, facendo attenzione a non introdurre variabili superflue. Per esempio, se chiami t la spesa di Tania, la spesa di Sarah sarà uguale a $t + 2$. Non è necessario introdurre una seconda variabile s.

Esercizi a pag. 578

Esercizi
a pag. 579

I sistemi di disequazioni

4

RISOLVERE PROBLEMI

GIOCHIAMO CON LA MENTE

Condizioni multiple

Gaia si sta preparando per le vacanze in montagna e deve comprare del cibo in scatola per il suo gatto. Le scorte dovranno bastare per almeno 13 giorni, perché la baita di Gaia è lontana da qualsiasi supermercato. Il gatto consuma tre scatolette da 85 g al giorno e ogni scatoletta costa 45 centesimi.

► Scrivi una disequazione che esprima il numero minimo n di scatolette sufficienti per i 13 giorni di permanenza in montagna.

....

► Scrivi una disequazione che esprima il numero massimo di scatolette che Gaia può comprare, sapendo che ha a disposizione 20 €.

....

....

► Risolvi la prima disequazione.

....

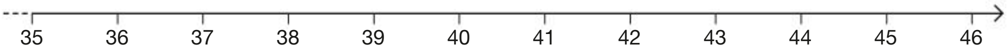
....

► Risolvi la seconda disequazione.

....

....

► Rappresenta le due soluzioni sulle seguenti rette dei numeri.



► Quali sono le soluzioni comuni alle due disequazioni?

....

....

► Che significato hanno le soluzioni comuni alle due disequazioni?

....

....

....

Sull'eBook ti proponiamo un'altra attività come questa.

IN TEORIA

Sistemi di disequazioni in una incognita

Risolvere un sistema di disequazioni significa trovare i valori per cui **tutte** le disequazioni del sistema sono soddisfatte.
Per ora ci occuperemo dei sistemi di disequazioni in una incognita.

Per risolvere un sistema di disequazioni in una incognita si risolve ogni disequazione in modo autonomo e poi si cercano i valori comuni alle soluzioni di ciascuna disequazione (cioè l'intersezione delle soluzioni).

Di solito si rappresentano graficamente le soluzioni di ogni disequazione, ponendo i grafici uno sotto l'altro: in questo modo è più facile ricavare l'insieme dei valori che soddisfano tutte le disequazioni.

PER ESEMPIO Consideriamo il seguente sistema di disequazioni.

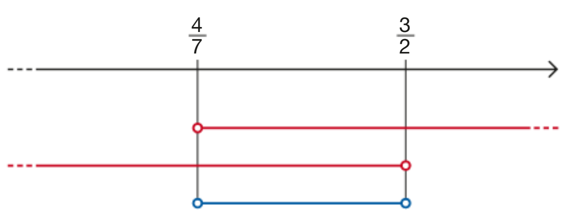
$$\begin{cases} 4x + 3 > 7 - 3x \\ 5 - x > 2 + x \end{cases}$$

Risolviamo ciascuna disequazione.

$$\begin{cases} 4x + 3x > 7 - 3 \\ -x - x > 2 - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x > 4 \\ -2x > -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{7} \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Tracciamo la retta dei numeri, dove posizioniamo i valori che compaiono nelle singole soluzioni, e sotto rappresentiamo le soluzioni delle due disequazioni.

Evidenziamo la parte **comune alle soluzioni di tutte le disequazioni**, controllando anche se i punti estremi sono compresi o no.



Il sistema è risolto per tutti i valori compresi tra $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{2}$, esclusi gli estremi. Possiamo scrivere la soluzione anche nelle seguenti forme:

$\frac{4}{7} < x < \frac{3}{2}$, oppure $S = \left]\frac{4}{7}; \frac{3}{2}\right[$, dove S è l'insieme delle soluzioni.

ATTENZIONE La scrittura $a < b < c$ (cioè b compreso tra a e c, estremi esclusi) è equivalente al sistema $\begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases}$.

IN PRATICA

[A] Come si risolve un sistema di due disequazioni?

PER ESEMPIO Consideriamo il seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} 2x+8 \leq 0 \\ x+3 > 2x \end{cases}$$

Risolviamo ciascuna disequazione.

$$\begin{cases} 2x \leq -8 \\ x-2x > -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ -x > -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x < 3 \end{cases}$$

Rappresentiamo le soluzioni indicando che nella prima disequazione -4 è compreso (pallino pieno) mentre nella seconda 3 non è compreso (pallino vuoto).

Dal grafico si deduce che le soluzioni comuni sono i valori minori o uguali a -4.
Scriviamo quindi la soluzione: $x \leq -4$, oppure $S =]-\infty; -4]$.

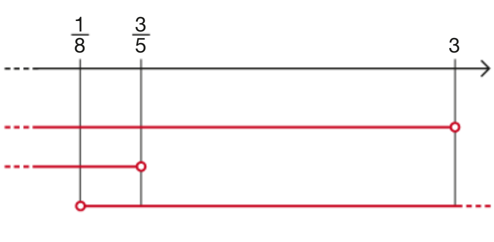
[B] Come si risolve un sistema di tre (o più) disequazioni?

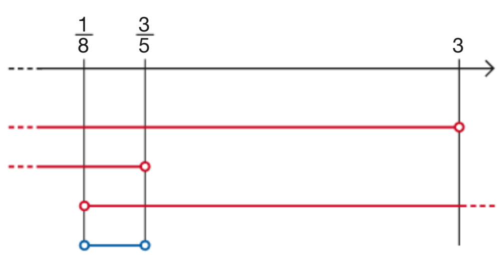
Nei sistemi di disequazioni le disequazioni vengono risolte in modo indipendente, perciò il fatto che ne siano presenti più di due non comporta particolari complicazioni: nel solito schema si rappresentano le soluzioni di ciascuna disequazione del sistema.

PER ESEMPIO Risolviamo il seguente sistema.
Risolviamo innanzitutto le singole disequazioni.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 < -1 \\ 3x - \frac{1}{5} < x+1 \\ \frac{3}{4} + x > 1 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x < -1+2 \\ 3x - x < 1 + \frac{1}{5} \\ x + x > 1 - \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x < 1 \\ 2x < \frac{6}{5} \\ 2x > \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < \frac{3}{5} \\ x > \frac{1}{8} \end{cases}$$

Rappresentiamo le soluzioni delle tre disequazioni, una sotto l'altra.



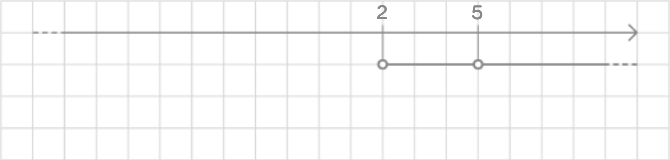


La soluzione del sistema è $\frac{1}{8} < x < \frac{3}{5}$, oppure $S = \left]\frac{1}{8}; \frac{3}{5}\right[$.

PROVA TU

Determina graficamente la soluzione dei seguenti sistemi di disequazioni.

1 $\begin{cases} x > 2 \\ x > 5 \end{cases}$



2 $\begin{cases} x \leq -1 \\ x < 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x < 4 \\ x > 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \leq -2 \\ x > 1 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

[A] **7** $\begin{cases} 3x > 6 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$

[A] **8** $\begin{cases} x - 5 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$

[A] **9** $\begin{cases} x - 3 < 4 \\ 3x > 15 \end{cases}$

Esercizi
a pag. 579

[A] **10** $\begin{cases} 4 - 2x < 8 \\ 5 > 2 - x \end{cases}$

[A] **11** $\begin{cases} 2 - x < 3 + x \\ 5 - 2x \geq 3 + x \end{cases}$

[B] **12** $\begin{cases} 4x + 2 < 6 \\ 2x - 3 < 6 - x \\ 2x + 1 > 1 \end{cases}$

[B] **13** $\begin{cases} 3x + 1 < 2 \\ x - 2 > 0 \\ 3x - 2 < 2x + 2 \end{cases}$

Esercizi
a pag. 580

Le disequazioni frazionarie

5

ACQUISIRE DATI E INFORMAZIONI

GIOCHIAMO CON LA MENTE

Positivo o negativo

Per quali valori di x il binomio $2x + 6$ è positivo?

► Traduci la domanda in una disequazione e risolvila.

Per quali valori di x, invece, il binomio $2x + 6$ è negativo?

► È possibile rispondere a questa domanda senza risolvere la disequazione? Come?

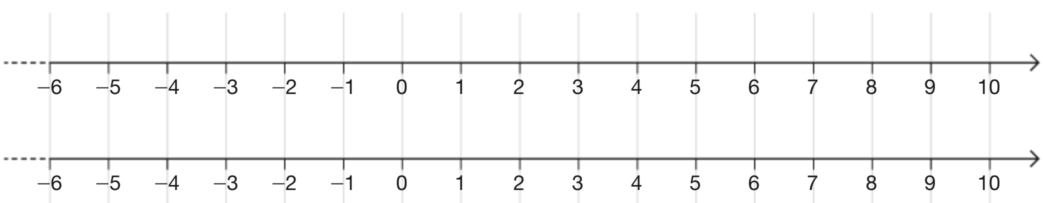
Per quali valori di x il binomio $5 - x$ è positivo?

► Traduci la domanda in una disequazione e risolvila.

Per quali valori di x, invece, il binomio $5 - x$ è negativo?

► Rispondi alla domanda senza risolvere la disequazione.

Sulla prima delle due seguenti rette dei numeri rappresenta con + i valori in cui il binomio $2x + 6$ è positivo e con − i valori in cui è negativo.
Usa la seconda retta per indicare quando il binomio $5 - x$ è positivo o negativo.



► Cosa puoi dire sul segno del prodotto $(2x + 6)(5 - x)$? Come puoi stabilire per quali valori è positivo e per quali negativo?

► Cosa puoi dire sul segno del quoziente $\frac{2x + 6}{5 - x}$? Come puoi stabilire per quali valori è positivo e per quali negativo?

Sull'eBook ti proponiamo un'altra attività come questa.

IN TEORIA

Per valutare il segno di un'espressione che contiene solo moltiplicazioni e divisioni è sufficiente contare quanti dei fattori o dei divisori sono negativi. Infatti, poiché il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo, e lo stesso vale per il rapporto, risulta che:

- se il numero totale di fattori e divisori negativi è **pari**, allora il risultato è **positivo**;
- se il numero totale di fattori e divisori negativi è **dispari**, allora il risultato è **negativo**.

PER ESEMPIO

- $\dfrac{(-2)(4)(-5)(-1)}{(8)(-1)(-7)} < 0,$

  perché 5 tra fattori e divisori sono negativi.

- $\dfrac{(-5)(-13)(66)(10)}{(-4)(38)(12)(-27)} > 0,$

  perché 4 tra fattori e divisori sono negativi.

Possiamo usare questa strategia per risolvere disequazioni in questa forma:

$$\frac{A}{B} \geq 0,\ \frac{A}{B} \leq 0,\ AB \geq 0,\ AB \leq 0,$$

o le disequazioni analoghe con le disuguaglianze strette.

PER ESEMPIO

- $(3x-2)(x+1) > 0$
- $\dfrac{4x-3}{x-2} \leq 0$
- $\dfrac{(x+5)(x-2)}{3-2x} \geq 0$

Risolvere questo tipo di disequazioni equivale a determinare il segno del primo membro; questo si può fare determinando i segni di tutti i fattori o divisori e applicando poi la regola dei segni.
Per risolvere questo tipo di disequazione si può quindi procedere nel modo seguente.

1. Si riscrive la disequazione in modo che il primo membro contenga solo fattori o divisori di primo grado e che il secondo membro sia zero.
2. Si pone ciascuno dei fattori o divisori maggiore di zero e si risolvono le disequazioni così ottenute.
3. Si riportano su una retta dei numeri tutti i valori ottenuti come soluzioni e poi si traccia sotto una riga di segni per ogni disequazione, indicando con + i tratti in cui la disequazione è maggiore di zero e con − i tratti in cui è minore di zero.
4. Se la disequazione originale contiene anche il segno =, cioè non è una disuguaglianza stretta, si indicano con un pallino pieno i valori che rendono zero i fattori a numeratore.
5. Si indicano con un pallino vuoto i valori che rendono zero i divisori.
6. Per ogni intervallo ottenuto, si ricava il segno del prodotto e si costruisce una riga con i segni complessivi del primo membro.
7. Si confrontano i segni ottenuti con la disuguaglianza della disequazione di partenza e si evidenziano gli intervalli che soddisfano la richiesta.

IN PRATICA

[A] Come si risolve una disequazione frazionaria?

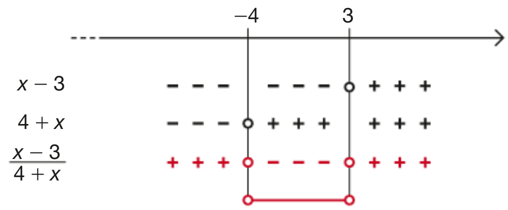
PER ESEMPIO Consideriamo la disequazione

$$\frac{x-3}{4+x} < 0.$$

Studiamo i segni del numeratore e del denominatore separatamente, ponendoli maggiori di 0:

- $x-3>0 \quad \rightarrow \quad x>3$;
- $4+x>0 \quad \rightarrow \quad x>-4$.

Costruiamo lo schema dei segni, indicando dove i singoli fattori sono positivi, negativi o nulli e studiamo il segno della frazione.



La disequazione di partenza chiede per quali valori la frazione è minore di zero, quindi scegliamo gli intervalli dove abbiamo −. La soluzione è:

$$-4 < x < 3 \text{ oppure } S =]-4;3[.$$

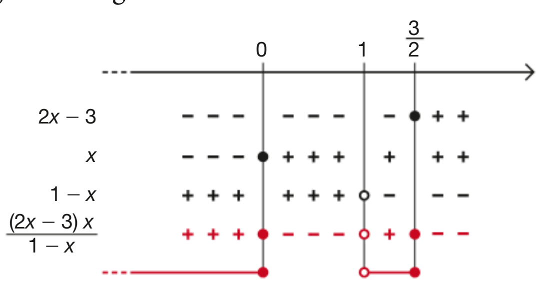
PER ESEMPIO Consideriamo la disequazione

$$\frac{(2x-3)x}{1-x} \geq 0.$$

Impostiamo una disequazione per ogni fattore o divisore. Poiché la disequazione contiene anche il segno =, poniamo i fattori del numeratore sempre maggiori o uguali a zero; poniamo invece il denominatore solo maggiore di zero, perché un denominatore non può mai essere zero:

- $2x-3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{3}{2}$;
- $x \geq 0$;
- $1-x>0 \quad \rightarrow \quad x<1$.

Rappresentiamo nel grafico i segni dei diversi fattori e calcoliamo il segno complessivo.



Poiché la disequazione originale richiedeva valori maggiori o uguali di zero, scegliamo gli intervalli con il + o il pallino pieno. La soluzione quindi è:

$$x \leq 0 \vee 1 < x \leq \frac{3}{2} \text{ oppure } S =]-\infty; 0] \cup \left]1; \frac{3}{2}\right].$$

TEORIA

[B] Come si risolve un sistema che contiene una disequazione frazionaria?

PER ESEMPIO Consideriamo il sistema

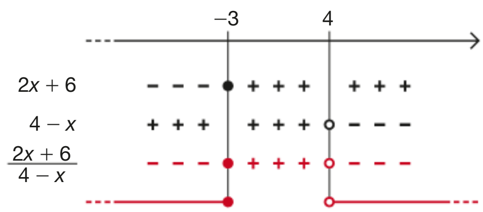
$$\begin{cases} \dfrac{2x+6}{4-x} \le 0 \\ 6x+2 > 2x \end{cases}$$

Prima disequazione:

- $2x+6 \ge 0 \ \rightarrow \ 2x \ge -6 \ \rightarrow \ x \ge -3;$
- $4-x > 0 \ \rightarrow \ -x > -4 \ \rightarrow \ x < 4.$

Soluzione della prima disequazione:

$x \le -3 \vee x > 4.$



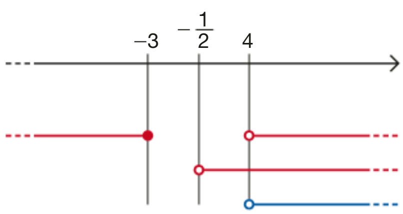
Seconda disequazione:

$6x-2x > -2 \ \rightarrow \ 4x > -2 \ \rightarrow \ x > -\dfrac{1}{2}.$

Disegniamo il grafico per trovare le soluzioni comuni alle due disequazioni (usando una riga per ogni equazione anche se la soluzione della prima è data da due intervalli separati).

La soluzione è:

$x > 4$ oppure $S =]4; +\infty[$.



PROVA TU

Risolvi le seguenti disequazioni.

[A] **1** $\dfrac{x}{1-x} > 0$

[A] **2** $\dfrac{3-x}{1+x} > 0$

[A] **3** $\dfrac{x}{x+4} < 0$

[A] **4** $\dfrac{x+5}{3-x} \le 0$

[A] **5** $\dfrac{2x+5}{4-2x} > 0$

[A] **6** $x(4x-3)(x+2) \ge 0$

[A] **7** $(2x-6)(1-x) \ge 0$

[A] **8** $\dfrac{9x-3}{5+2x} > 0$

9 $\dfrac{x-3}{x} > 2$

10 $\dfrac{x-2}{1+x} - 1 > 0$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

[B] **11** $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3} \le 0 \\ 2x-2 > -2 \end{cases}$

[B] **12** $\begin{cases} \dfrac{x}{4+x} \le 0 \\ 3x+1 > 2x \end{cases}$

[B] **13** $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5-x} \le 0 \\ 3 > 1-3x \end{cases}$

[B] **14** $\begin{cases} \dfrac{2}{4-3x} \le 0 \\ 4x+5 < 9x \end{cases}$

Esercizi a pag. 580

MAPPA
LE DISEQUAZIONI

LOSAI? RIPASSA CON LO SMARTPHONE

Su online.zanichelli.it/pensaci ti proponiamo altre mappe come questa.

DISEQUAZIONI

RISOLUZIONE

si calcolano

quali numeri sostituiti alle **INCOGNITE** (lettere) rendono vera la disuguaglianza

usando i

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

PRIMO PRINCIPIO

Una disequazione si trasforma in un'altra equivalente **addizionando** o **sottraendo** a entrambi i membri lo stesso numero o espressione letterale.

SECONDO PRINCIPIO

Una disequazione si trasforma in un'altra equivalente **moltiplicando** o **dividendo** entrambi i membri per uno stesso numero.

positivo

negativo *e* cambiando il verso della disuguaglianza

DEFINIZIONE

Una disequazione è una **DISUGUAGLIANZA** tra espressioni numeriche o letterali.

SISTEMA DI DISEQUAZIONI in un'incognita

Per esempio

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x+2>0 \end{cases}$$

RISOLUZIONE

si trovano

i valori che soddisfano **TUTTE** le disequazioni

PROCEDIMENTO

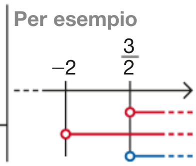
1. Si risolvono le disequazioni **SEPARATAMENTE**;

2. si cercano i **VALORI COMUNI** alle soluzioni di ciascuna disequazione.

attraverso la

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Per esempio



TEORIA

ESERCIZI

Controlla i risultati in fondo al volume.

1 Che cos'è una disequazione

Teoria a pag. 554

Ricorda

IN TEORIA
Le disuguaglianze tra numeri si possono rappresentare con i seguenti simboli:
- $a > b$; significa «a è .... b»;
- $a < b$; significa «a è .... b»;
- $a \geq b$; significa «a è .... b»;
- $a \leq b$; significa «a è .... b».

Una disequazione è una .... tra espressioni numeriche o letterali.

IN PRATICA Verifica se i numeri scritti a fianco delle disequazioni sono soluzioni delle disequazioni stesse.

a. $5x < 4$; $\quad -1; 1.$

b. $-3x > x + 1$; $\quad -2; 3.$

c. $1 - x < \frac{1}{3}x$; $\quad -3; \frac{1}{3}.$

d. $\frac{1}{4}x + 2 > 3 + \frac{3}{4}x$; $\quad -4; -\frac{1}{4}.$

Verifica se i numeri scritti a fianco delle disequazioni sono soluzioni (esercizi da 1 a 7).

1 $2x > 1$; $\quad 1; -2.$

2 $3x + 1 \geq 0$; $\quad 3; -2.$

3 $3x - 2 \leq 4x + 4$; $\quad 0; -6.$

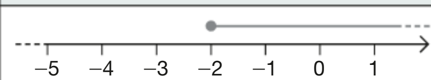
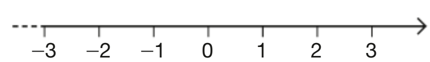
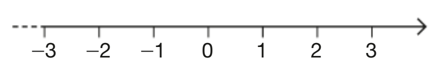
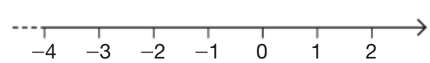
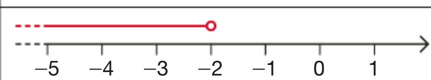
4 $1 + 3x < 8 - x$; $\quad 2; -2.$

5 $3 - x \geq 5x - 1$; $\quad 0; -\frac{2}{5}; \frac{1}{6}.$

6 $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \leq 2x + \frac{1}{4}$; $\quad \frac{2}{3}; -1; \frac{6}{5}.$

7 $\frac{3}{2}x - 1 > \frac{4}{3} + \frac{x}{3}$; $\quad -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}.$

8 Completa la seguente tabella in modo che ogni intervallo sia rappresentato con una disuguaglianza, un intervallo e un grafico sulla retta dei numeri.

Disuguaglianza	Intervallo	Grafico
$x \geq -2$	$[-2; +\infty[$	
	$[0; 2[$	
$-2{,}5 < x < 3$		
	$\left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right[$	
		

2 La risoluzione delle disequazioni di primo grado

Teoria a pag. 559

Ricorda

IN TEORIA
Primo principio di equivalenza delle disequazioni: una disequazione si trasforma in un'altra equivalente quando a entrambi i membri si .... o si .... uno stesso numero o una stessa espressione letterale.
Secondo principio di equivalenza delle disequazioni: una disequazione si trasforma in un'altra equivalente quando si .... o si .... entrambi i membri per uno stesso numero diverso da .... e si cambia il .... se tale numero è ....

IN PRATICA Completa inserendo in maniera opportuna uno dei simboli $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

a. Se $x > y$ allora $x - 3$ ☐ $y - 3$.
b. Se $x \leq y$ allora $x + 2$ ☐ $y + 2$.
c. Se $x < y$ allora $\frac{3}{4} \cdot x$ ☐ $\frac{3}{4} \cdot y$.
d. Se $x \geq y$ allora $x \cdot (-10)$ ☐ $y \cdot (-10)$.

Risolvi le seguenti disequazioni. Per ciascuna, rappresenta la soluzione anche sulla retta dei numeri.

9 $2x \leq 3x + 2$

10 $-3 - x > 2x - 7$

11 $18 - 3x > 5x - 4$

12 $x - 1 < 1$

13 $x + 2 > 6$

14 $4 - x < 3$

15 $5 - x > -1$

16 $7 > 3x$

17 $2x + 4 < 0$

18 $2x + 7 > 3$

19 $7 - 2x > 6$

20 $3x - 2 > 18 - 2x$

21 $7 - 2x < 11 + x$

22 $2(3x + 5) > 4x$

23 $3(x + 5) > 2(x + 2) + 8$

24 $x - 2 \leq 3$

25 $x + 2 \geq 3$

26 $4 - x \leq 4$

27 $x \geq \frac{1}{2}x - 1$

28 $x - 7 \geq 1 - x$

29 $2x + 1 \leq 5 - 4x$

30 $4 - 5x \leq x - 5$

31 $\frac{1}{2}x \geq 1 + \frac{1}{3}x$

32 $2(x - 3) \geq 1$

33 $2(x - 5) \leq 2 - x$

34 $5(x - 4) \leq 2x$

35 $3 - 4x \geq 3x - 4$

36 $3(1 - 4x) \leq 8 - 7x$

37 $\frac{1}{2}x - 1 \geq \frac{1}{3}x + 4$

38 $\frac{x}{5} - 4 < \frac{9}{5}x + 2$

39 $\frac{1}{3}(2x - 1) > \frac{3}{5}x$

40 $\frac{1}{4}(x + 4) > \frac{1}{3}(x + 1)$

ESERCIZI

41 $\frac{1}{2}(2-x) > \frac{1}{4}(3-x)+\frac{1}{2}$

42 $\frac{x-2}{4}+\frac{2}{3} < \frac{x-4}{6}$

43 $\frac{x+1}{2}+\frac{3x+1}{4} < \frac{3x-1}{4}+2$

44 $\frac{3x+4}{5}-\frac{x+1}{3} > 1-\frac{x+5}{3}$

45 $\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{3} > \frac{x+1}{4}+1$

46 $\frac{1}{4}(2x+3) \leq (7-4x)$

47 $\frac{1}{6}(2-x)-3 \geq \frac{x}{10}$

48 $\frac{1}{2}(3x+2) \geq \frac{1}{3}(2x-7)$

49 $\frac{1}{3}(x+2) \geq \frac{2}{3}+\frac{1}{4}(x-1)$

50 $\frac{4}{3}(2x+3) \geq 10-\frac{4x}{3}$

51 $4\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right) \geq 3\left(\frac{x}{2}-5\right)$

52 $\frac{1}{4}\left(\frac{10x-5}{7}+6\right) < \frac{2}{3}(x-4)$

3 Disequazioni per risolvere problemi

Teoria a pag. 563

Ricorda

IN TEORIA
Per risolvere un problema con una disequazione, prima di tutto si assegna una .... alla grandezza di cui si parla. Poi si utilizza la variabile per scrivere una ....

IN PRATICA Traduci in una disuguaglianza le seguenti espressioni.

a. Andrea è alto fra i 170 e i 180 cm, estremi compresi.

....

b. Barbara guadagna meno di 1000 € al mese.

....

c. Claudio deve prendere almeno 8 per recuperare l'insufficienza in inglese.

....

d. Nel salto in lungo, Daniela ha superato i 4,5 m.

....

53 **CONFRONTARE E ANALIZZARE FIGURE GEOMETRICHE** Il perimetro di un quadrato è inferiore a 80 cm. Qual è la lunghezza del lato?

54 **CONFRONTARE E ANALIZZARE FIGURE GEOMETRICHE** Di un triangolo ABC sappiamo che $AB = 24$ cm e $BC = 8$ cm. Cosa possiamo affermare sulla lunghezza di AC?

55 **RISOLVERE PROBLEMI** Un test consiste di 20 domande a scelta multipla. Vengono attribuiti 3 punti per ogni risposta corretta e viene tolto un punto per ogni risposta sbagliata, mentre non si attribuisce alcun punteggio per le risposte non date. Matteo ha risposto a 19 domande e il suo punteggio è stato superiore a 32 punti. Qual è il numero minimo di risposte corrette che ha dato?

56 **RISOLVERE PROBLEMI** Riccardo è andato al Luna Park con 30 €. Il tiro a segno costa 2 € a partita e l'ottovolante 3 € a giro. Riccardo ha fatto 2 partite di tiro a segno ogni giro di ottovolante. Quanti giri di ottovolante ha fatto?

57 **RISOLVERE PROBLEMI** Nell'allestimento di una mostra di sculture le opere sono state classificate in *piccole*, a cui è stato riservato uno spazio di 9 m^2, e *grandi*, a cui è stato riservato uno spazio di 16 m^2. Si è deciso di esporre 15 opere piccole in più di quelle grandi. Se lo spazio totale a disposizione è di 500 m^2, quante opere grandi si possono esporre?

4 I sistemi di disequazioni

Teoria a pag. 567

Ricorda

IN TEORIA
Per risolvere un sistema di disequazioni in una incognita si risolve ogni disequazione in modo autonomo; poi si cercano i valori .... alle soluzioni, cioè si determina l’................................ delle soluzioni.

IN PRATICA In un sistema di due disequazioni, la prima disequazione ha soluzione $x \le 1$ e la seconda ha soluzione $x > -1$. La soluzione del sistema è:

a $x > -1$.

b $x \le 1$.

c $-1 < x \le 1$.

d $-1 \le x < 1$.

58 Trova l’insieme dei valori x per cui $5x \le 3x + 10$ e $4x - 7 < 6x - 11$.

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

59 $\begin{cases} x - 4 \le 3 \\ 3x \ge -6 \end{cases}$

60 $\begin{cases} 2x + 5 < 15 \\ 3x - 2 > -6 \end{cases}$

61 $\begin{cases} 5x - 1 < 4 \\ 3x + 5 \ge x + 1 \end{cases}$

62 $\begin{cases} 2x - 5 \ge 1 \\ 3x - 1 > 26 \end{cases}$

63 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 4 > \dfrac{1}{3}x \\ \dfrac{1}{6}x + 1 > \dfrac{1}{8}x + 3 \end{cases}$

Risolvi le seguenti catene di disuguaglianze.

RICORDA La catena di disuguaglianze $a < b < c$ è equivalente al sistema $\begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases}$.

64 $5x + 18 < x - 2 \le 3x + 4$

65 $-4 \le 2x \le 3x - 2$

66 $1 - x < -2 \le 3 - x$

67 $-3 > x - 9 > 2x$

68 $2x \le x + 6 < 3x + 5$

69 $3x - 2 \ge 10 \ge x + 4$

70 $\dfrac{x}{4} + 3 \le 4 \le \dfrac{1}{2}x + 6$

71 $\dfrac{x}{3} \ge \dfrac{x}{2} + 1 \ge x - 1$

72 $2(1 - x) > x - 1 \ge \dfrac{1}{2}(x - 7)$

73 $\dfrac{x - 2}{3} < \dfrac{2x + 1}{5} \le 3$

74 $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{5} \ge \dfrac{2x}{5} > x - 5$

Risolvi le seguenti catene di disuguaglianze in $\mathbb{N}$.

75 $3x - 5 < 26 \le 4x - 6$

76 $3x + 2 < 19 < 5x - 4$

77 $-4 \le 7 - 3x \le 2$

78 $-10 < 7 - 2x \le 1$

79 $4x + 5 \le 5x - 2 < 4x + 7$

5 Le disequazioni frazionarie

Teoria a pag. 571

Ricorda

IN TEORIA
Per risolvere una disequazione frazionaria con un membro uguale a zero e l'altro scomposto in ....:

- risolviamo la disequazione che otteniamo ponendo ciascun fattore o divisore maggiore di zero;
- applichiamo la regola dei .... agli intervalli individuati dagli estremi delle soluzioni delle singole disequazioni.

IN PRATICA La soluzione della disequazione frazionaria $\frac{x-3}{x+2} > 0$ è:

a $x < -2$.

b $-2 < x < 3$.

c $x > 3$.

d $x < -2 \vee x > 3$.

Risolvi le seguenti disequazioni.

80 $\frac{2}{x} \geq 0$

81 $\frac{-3}{x-1} < 0$

82 $\frac{5-x}{x} \geq 0$

83 $(3-x)(3+x) < 0$

84 $x(2x+5) > 0$

85 $\frac{5-2x}{2+x} < 0$

86 $\frac{3x+1}{x+3} < 0$

87 $\frac{x}{x-2} > 5$

88 $\frac{x+1}{x-3} < 1$

89 $\frac{2x-4}{6-2x} < 2$

Risolvi i seguenti sistemi contenenti una disequazione frazionaria.

90 $\begin{cases} \frac{15}{4-4x} < 0 \\ x < 2x+3 \end{cases}$

91 $\begin{cases} \frac{5}{3x-1} < 2 \\ x > 2x \end{cases}$

92 $\begin{cases} \frac{2x+5}{3x-1} > 4 \\ 6-x > 2x+1 \end{cases}$

93 $\begin{cases} \frac{7-3x}{3x-1} > -2 \\ 4+x > 4x+1 \end{cases}$

94 $\begin{cases} \frac{x+5}{3-x} > 4 \\ 26-x < 6x+1 \end{cases}$

ESERCIZI DI RIEPILOGO

95 Esprimi le seguenti affermazioni con delle disequazioni.
a. Il quoziente tra x e 6 non supera 5.
b. La differenza tra b e 5 è inferiore a 1.
c. Il prodotto tra k e 8 è almeno pari a 2.
d. Se si riduce p di 20 il numero che si ottiene rimane superiore a 50.
e. La somma di x e 30 è non meno di 25.
f. La differenza tra n e 5 è al massimo 8.

Risolvi le seguenti disequazioni e rappresenta le soluzioni anche sulla retta dei numeri (esercizi da 96 a 135).

96 $a+5>1 \quad \rightarrow \quad a>1-5$

97 $2b-7\geq 9$

98 $3c+4<2c-3$

99 $3(d-2)\leq -d$

100 $6-a>-2$

101 $3b+4<4b-3$

102 $a-6<5$

103 $4a+5\leq -7$

104 $3b-2\geq 2$

105 $5+2b>0$

106 $5c+4>4c+6$

107 $7c-1\leq c+3$

108 $4-a<5$

109 $2-4a\leq 0$

110 $3-2b\geq 1$

111 $-10b>0$

112 $2c+5>3c+4$

113 $c+8\leq 5c+4$

114 $3(d-3)<4d$

115 $\frac{1}{4}(c-3)\geq c+2$

116 $0,5(d+2)\leq d+5$

117 $4(d+1)<d$

118 $6(2d-1)\geq 3+2d$

119 $3(2+e)\leq 2(e-3)$

120 $5(3e-4)>4(2e+1)$

121 $8(3f-7)\geq 1+3(f+1)$

122 $2(6f-5)+f<3(4-9f)-1$

123 $5(2-d)\geq 4+d$

124 $2(4+e)\leq 3(e-5)$

125 $-(2e-7)>8(4e+3)$

126 $6(2f-1)\geq 6+9(3f+2)$

127 $2(1-5f)+3<3(4-3f)-10$

128 $\frac{1}{2}(a+1)<3$

129 $\frac{2}{3}(1-a)\leq \frac{1}{4}a$

130 $\frac{5}{6}(2b+1)\geq \frac{1}{2}b-1$

131 $\frac{b+4}{5}-\frac{b+5}{4}>\frac{b}{3}$

ESERCIZI

132 $0,2(c-4) > 0,1c$

133 $0,8(5-c) \leq c$

134 $0,6(2d-5) < 4(0,2d-3)$

135 $0,5(10+3d) \geq 4+3(6-0,5d)$

136 **INVALSI 2013** Nell'insieme dei numeri reali, la disequazione $x^2 > 0$ è verificata

a per ogni $x \neq 0$. b per ogni x. c solo per ogni $x < 0$. d solo per ogni $x > 0$.

[INVALSI – scuola secondaria di secondo grado]

137 **INVALSI 2015** Nell'insieme dei numeri reali la disequazione $x^2+1 \geq 0$ è verificata

a solo per $x \geq 0$. b solo per $x \geq -1$. c per ogni x. d per nessun x.

[INVALSI – scuola secondaria di secondo grado]

138 Risolvi la seguente disequazione:

$$\frac{x-4}{4} \leq \frac{1+x}{3} - 1.$$

Quali sono i numeri interi negativi che soddisfano la disequazione?

139 Per ciascuna delle seguenti disequazioni, determina il più piccolo numero intero che sia una sua soluzione.

a. $15+4x > x-7$ **b.** $\frac{1}{4}x \leq \frac{1}{3}x - 1$

140 Per ciascuna delle seguenti disequazioni, determina il più grande numero intero che sia una sua soluzione.

a. $10-2x \geq 3(x-2)$ **b.** $2+0,25x < 0,05(3x-1)$

141 Per ciascuna delle seguenti disequazioni, determina il più piccolo numero primo che sia una sua soluzione.

a. $\frac{2x-1}{3} \leq \frac{5x+1}{6} - 2$ **b.** $3\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) > 4\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{4}\right)$

142 Per ciascuna delle seguenti disequazioni, determina il più grande numero primo che sia una sua soluzione.

a. $\frac{1}{5}(20-3x) > \frac{1}{10}(1-4x)$ **b.** $0,3(x-6) \geq 2(0,4x-4,9)$

143 Risolvi la disequazione:

$$\frac{2}{3}(y-4) > \frac{1}{12}(6-5y) + \frac{3}{4}.$$

Stabilisci se $y = 4$ è soluzione della disequazione.

144 Risolvi la disequazione:

$$5(-1+4x) \leq 8(x-2) + 99.$$

Scrivi il più grande numero naturale che è soluzione della disequazione.

145 Risolvi la disequazione:

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{2-5x}{4} < 6.$$

Scrivi tutti i numeri interi positivi che ne sono soluzione.

146 Data la disequazione $1,5x - 0,4(x+2) > 9,6$, determina:

a. il più piccolo numero intero che ne sia soluzione;

b. il più piccolo multiplo di 5 e di 8 che ne sia soluzione.

147 Data la disequazione

$$3{,}6 + 0{,}8(2 - 4x) \geq 2{,}4(x - 1)$$

a. determina il più grande numero razionale che ne sia soluzione;

b. stabilisci se 1,5 è una sua soluzione.

148 Risolvi la disequazione

$$\frac{x-4}{4} \leq \frac{1+x}{3}$$

e rappresenta la soluzione sulla linea dei numeri. Determina tutti i numeri interi negativi che ne sono soluzione.

149 **INVALSI 2015** Lorenza afferma:

«La disequazione $\frac{1}{2}x < x$ è soddisfatta per ogni numero reale x».

Lorenza ha ragione?

Scegli la risposta corretta e completa la frase.

Lorenza ha ragione perché

....

....

....

....

Lorenza non ha ragione perché

....

....

....

....

[INVALSI – scuola secondaria di secondo grado]

150 **RISOLVERE PROBLEMI** In una scuola il punteggio medio minimo per ottenere un premio è di 70. Giovanni ha avuto 64 nel primo test e 59 nel secondo.

Quanti punti deve realizzare nel terzo test per ottenere il premio?

151 **RISOLVERE PROBLEMI** La somma di quattro numeri dispari consecutivi è maggiore di 200. Qual è il più piccolo numero iniziale possibile di questa sequenza?

152 **RISOLVERE PROBLEMI** La somma di quattro numeri consecutivi è minore di 386. Determina il maggiore dei quattro.

153 **INVALSI 2016** Per frequentare una piscina si deve acquistare una tessera da 10 € e pagare 7 € per ogni ingresso. Luigi può spendere al massimo 100 €. Se n indica il numero degli ingressi, quale tra le seguenti disequazioni descrive il numero di ingressi che Luigi può effettuare?

- a $(10 + 7)n \leq 100$
- b $10n + 7 \leq 100$
- c $10 + 7n \leq 100$
- d $10 + 7n \geq 100$

[INVALSI – scuola secondaria di secondo grado]

154 **RISOLVERE PROBLEMI** Paola ha 25 € e vuole preparare una macedonia di meloni e mango, utilizzando in totale 15 frutti. Ogni melone costa 1,80 € e ogni mango 1,20 €.

Qual è il numero massimo di meloni che può comprare?