T

CAPITOLO

12 FUNZIONI E LORO PROPRIETÀ

1 Funzioni reali di variabile reale

▶ Esercizi a p. 572

Definizione di funzione

Richiamiamo il concetto di funzione reale di variabile reale.

Listen to it

A **function** from a subset A of $\mathbb{R}$ to a subset B of $\mathbb{R}$ is a relation that assigns to each element in the set A exactly one element in the set B.

DEFINIZIONE

Dati due sottoinsiemi A e B (non vuoti) di $\mathbb{R}$, una **funzione** f da A a B è una relazione che associa a *ogni* numero reale di A *uno e un solo* numero reale di B.

Scriviamo: $f: A \to B$.

Se a $x \in A$ la funzione f associa $y \in B$, diciamo che y è **immagine** di x mediante f.
La legge che definisce la funzione f molto spesso viene indicata con l'equazione $y = f(x)$, detta **espressione analitica** della funzione.
In una funzione $y = f(x)$, x è detta **controimmagine** di y.

A viene detto **dominio** della funzione, e lo indicheremo anche con D, mentre il sottoinsieme di B formato dalle immagini degli elementi di A è detto **codominio** o **immagine** di A ed è indicato con C o con $f(A)$ o con I.

▶ Considera la funzione $y = x^2 - 3$. Quale valore di y associa a $x = 2$?

ESEMPIO

La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, descritta dalla legge matematica $y = -\frac{3}{2}x + 3$, associa a ogni valore di x uno e un solo valore di y. Per esempio, per $x = 4$ si ha $y = -3$.

x è detta **variabile indipendente**, y **variabile dipendente**.
Una funzione può essere anche indicata con un'espressione del tipo $f(x; y) = 0$, detta **forma implicita**, mentre $y = f(x)$ è detta **forma esplicita**. Per esempio, la funzione $3x + 2y - 6 = 0$ è la forma implicita di $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

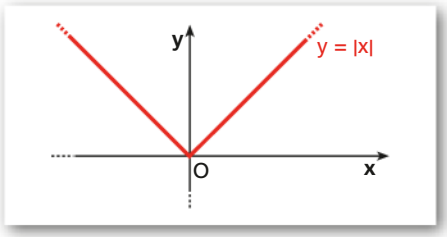
Di una funzione f possiamo disegnare il **grafico**, cioè l'insieme dei punti $P(x; y)$ del piano cartesiano tali che y è immagine di x mediante f, ossia l'insieme dei punti $P(x; f(x))$. Del grafico possiamo cercare le **intersezioni con gli assi**, che si determinano mettendo a sistema l'equazione della funzione con $y = 0$ (equazione dell'asse x) o con $x = 0$ (equazione dell'asse y).

Esistono funzioni, dette **funzioni definite a tratti**, date da espressioni analitiche diverse a seconda dei valori attribuiti alla variabile indipendente.

ESEMPIO

La **funzione valore assoluto** è definita nel seguente modo:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

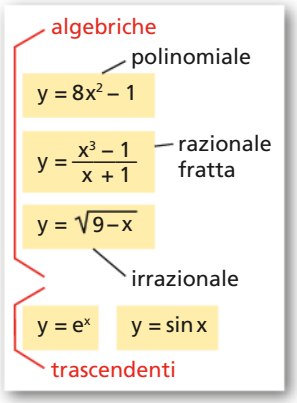


Classificazione delle funzioni

La funzione è **algebrica** se l'espressione analitica $y = f(x)$ che la descrive contiene solo, per la variabile x, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice. Una funzione algebrica è:

- **razionale intera** o **polinomiale** se è espressa mediante un polinomio; in particolare se il polinomio è di primo grado rispetto alla variabile x, la funzione è **lineare**, se il polinomio in x è di secondo grado, la funzione è **quadratica**;
- **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi;
- **irrazionale** se la variabile indipendente x compare sotto il segno di radice.

Se una funzione $y = f(x)$ non è algebrica, si dice **trascendente**.



Per ogni funzione algebrica razionale si può scrivere un'espressione analitica in forma implicita $P(x; y) = 0$, dove $P(x; y)$ è un polinomio nelle variabili x e y; si definisce **grado** della funzione algebrica il grado di tale polinomio $P(x; y)$.

ESEMPIO

La funzione $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ in forma implicita diventa $x^2y - x + 1 = 0$, quindi il suo grado è 3.

▶ Qual è il grado della funzione $y = \dfrac{x^2-3}{x^3+1}$?

Dominio, zeri e studio del segno di una funzione

Dominio naturale

Molto spesso una funzione viene assegnata senza indicare il dominio.
In questi casi deve essere determinato il suo *dominio naturale*.

DEFINIZIONE

Il **dominio naturale** (o **campo di esistenza**) della funzione $y = f(x)$ è l'insieme più ampio dei valori reali che si possono assegnare alla variabile indipendente x affinché esista il corrispondente valore reale y.

Chiamiamo il dominio naturale anche soltanto **dominio** e lo indichiamo con D.

ESEMPIO

La funzione $y = \sqrt{x^2 - 4}$ ha come dominio l'insieme dei numeri reali x per i quali il radicando dell'espressione a secondo membro è positivo o nullo, ossia $x \leq -2 \vee x \geq 2$. In sintesi, D: $x \leq -2 \vee x \geq 2$.

TEORIA

▶ Qual è il dominio di $y = \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{x-3}$?

Animazione

Nell'animazione, oltre al dominio della funzione dell'esercizio, studiamo anche le intersezioni del suo grafico con gli assi e il segno.

Domini delle principali funzioni	
Funzione	**Dominio**
Funzioni razionali intere: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P e Q polinomi)	$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $Q(x)$
Funzioni irrazionali: $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}, \text{ se } n \text{ è pari} \\ \text{dominio di } f(x), \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
Funzioni logaritmiche: $y = \log_a f(x) \qquad a > 0, a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
Funzioni esponenziali: $y = a^{f(x)} \qquad a > 0, a \neq 1$ $y = [f(x)]^{g(x)}$	dominio di $f(x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap$ dominio di $g(x)$
Funzioni goniometriche: $y = \sin x,\ y = \cos x$ $y = \tan x$ $y = \cot x$ $y = \arcsin x,\ y = \arccos x$ $y = \arctan x,\ y = \operatorname{arccot} x$	 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, con $k \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$ $[-1; 1]$ $\mathbb{R}$

Video

Dominio di una funzione

Il dominio della funzione $f(x) = \tan x \cos x$ è lo stesso di quello della funzione $f(x) = \sin x$? Facciamo alcuni esempi.

Funzioni uguali

DEFINIZIONE

$y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono **funzioni uguali** se hanno lo stesso dominio D e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in D$.

ESEMPIO

Le funzioni $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1}$ e $g(x) = x$ sono uguali perché hanno lo stesso dominio $\mathbb{R}$ e $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ e $g(x) = x$ *non* sono uguali: $\frac{x(x-1)}{x-1} = x$ *solo se* $x \neq 1$.

Zeri e segno

Un numero reale a è uno **zero della funzione** $y = f(x)$ se $f(a) = 0$.

Nel grafico di $f(x)$ gli zeri sono le ascisse dei punti di intersezione con l'asse x. Gli eventuali punti di intersezione con l'asse y si ottengono calcolando $y = f(0)$, se $x = 0$ appartiene al dominio di f.

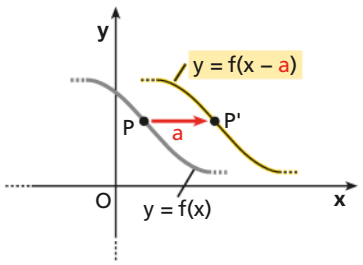
È possibile anche **studiare il segno** di una funzione $y = f(x)$, cioè cercare per quali valori di x appartenenti al dominio il corrispondente valore di y è positivo, e per quali è negativo. Per esempio, la funzione $y = 2x - 6$ risulta positiva per $x > 3$, nulla per $x = 3$, negativa per $x < 3$.

Animazione

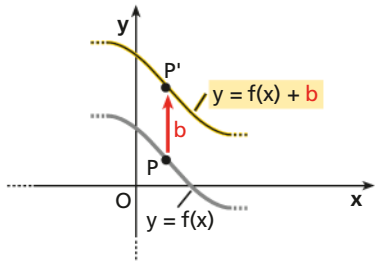
Studiamo i tre casi della figura sotto, partendo dalla funzione $y = 9 - x^2$ e utilizzando una figura dinamica al variare di a e b nel vettore di traslazione $\vec{v}(a; b)$.

Grafici delle funzioni e trasformazioni geometriche

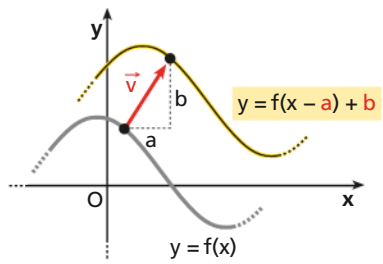
Traslazioni



a. Traslazione di vettore parallelo all'asse x.

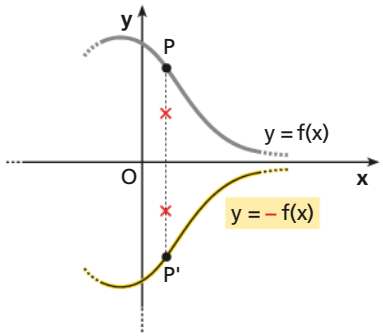


b. Traslazione di vettore parallelo all'asse y.

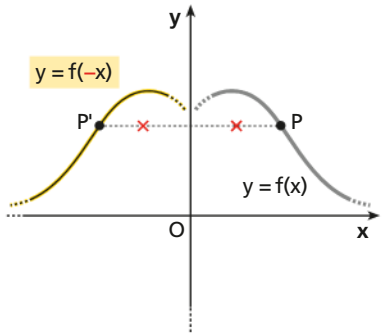


c. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$.

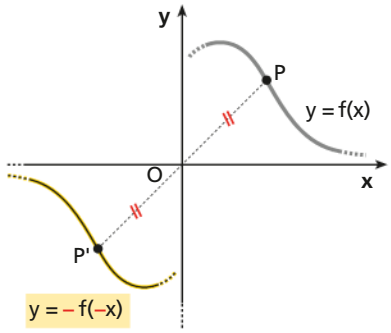
Simmetrie



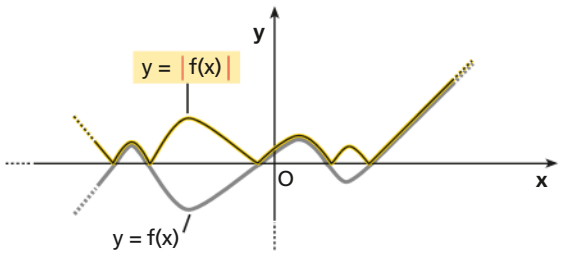
a. Simmetria rispetto all'asse x.



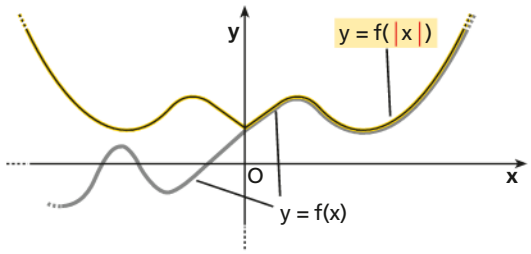
b. Simmetria rispetto all'asse y.



c. Simmetria centrale rispetto a O.



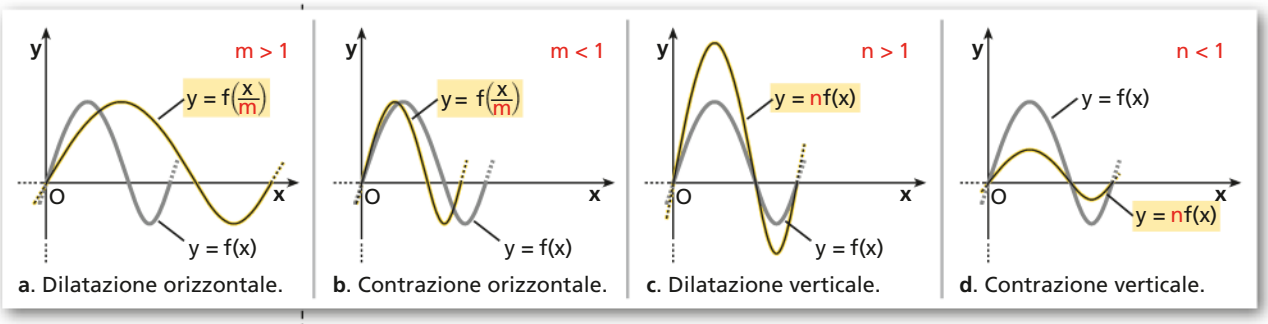
d. Simmetria rispetto all'asse x delle parti del grafico di $y = f(x)$ con $y < 0$.



e. Per $x \geq 0$ il grafico è lo stesso di $y = f(x)$, per $x < 0$ il grafico è il simmetrico rispetto all'asse y di quello che $y = f(x)$ ha per $x > 0$.

TEORIA

Dilatazioni



a. Dilatazione orizzontale. **b**. Contrazione orizzontale. **c**. Dilatazione verticale. **d**. Contrazione verticale.

Animazione

Studiamo i quattro casi della figura sopra, partendo dalla funzione $y = x^2 - 3x$ e utilizzando una figura dinamica in cui possiamo variare m e n.

Listen to it

A **function** from a set A to a set B is said to be:

- an **injection** (or an **injective function**) if it maps distinct objects of set A to distinct objects of set B;
- a **surjection** (or a **surjective function**) if each element of B is the image of at least one element of A;
- a **bijection** (or a **bijective function**) if it is both injective and surjective.

Animazione

Studiamo l'iniettività e la non iniettività delle due funzioni dell'esempio, anche mediante figure dinamiche.

▶ Disegna il grafico di una funzione suriettiva su $\mathbb{R}$ che non sia iniettiva.

2 Proprietà delle funzioni

Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

▶ Esercizi a p. 584

DEFINIZIONE

Una funzione da A a B è:

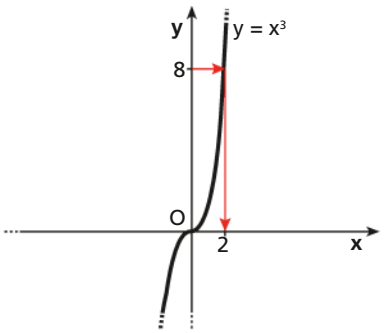
- **iniettiva** se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A;
- **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A;
- **biunivoca** (o biiettiva) se è sia iniettiva sia suriettiva.

Una definizione equivalente di funzione iniettiva è la seguente:

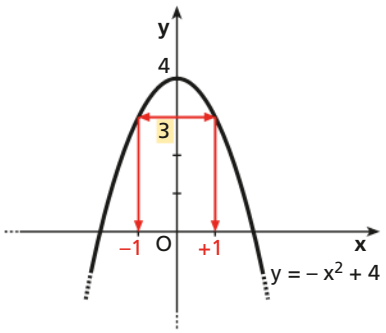
una funzione è *iniettiva* se a elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, ossia

$$x_1 \neq x_2 \quad \rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

ESEMPIO



a. La funzione $y = x^3$ è sia iniettiva sia suriettiva perché a ogni valore scelto sull'asse y corrisponde *un* valore (suriettiva) e *un solo* (iniettiva) valore sull'asse x. La funzione è quindi biunivoca.



b. La funzione $y = -x^2 + 4$ è suriettiva se si considera come insieme B quello degli y tali che $y \leq 4$, ma *non* è iniettiva perché, scelto nel codominio un y diverso da 4, esso è l'immagine di **due** valori distinti di x.

Funzioni crescenti, decrescenti, monotòne

▶ Esercizi a p. 585

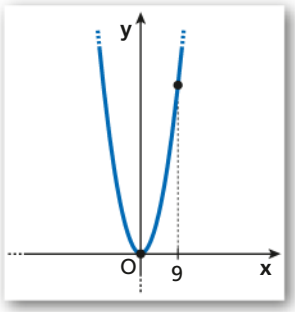
Funzioni crescenti

DEFINIZIONE

$y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una **funzione crescente** in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$.

ESEMPIO

La funzione $y = x^2$ è crescente in senso stretto in $[0; 9]$.



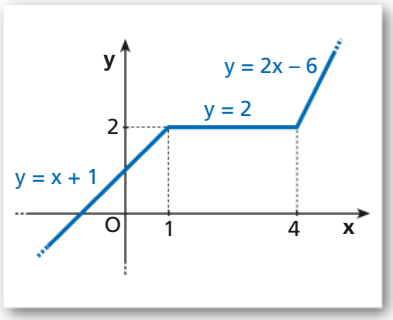
▶ In quale intervallo la funzione $y = x^2 - 2x + 1$ è strettamente crescente?

Se nella definizione sostituiamo la relazione $f(x_1) < f(x_2)$ con $f(x_1) \leq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **crescente in senso lato**, o anche **non decrescente**. Si può anche dire che la funzione è **debolmente crescente**.

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x < 4 \\ 2x - 6 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

è crescente in senso lato in $\mathbb{R}$.



Funzioni decrescenti

DEFINIZIONE

$y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una **funzione decrescente** in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) > f(x_2)$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **decrescente in senso lato**, o anche **non crescente**. In questo caso si può anche dire che la funzione è **debolmente decrescente.**

In seguito, se diremo che una funzione è crescente (o decrescente), senza aggiungere altro, sarà sottinteso che lo è in senso stretto.

Funzioni monotòne

DEFINIZIONE

Una funzione di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è **monotòna** in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se in quell'intervallo è sempre crescente o sempre decrescente in senso stretto. Analoga definizione può essere data per una funzione monotòna in senso lato.

TEORIA

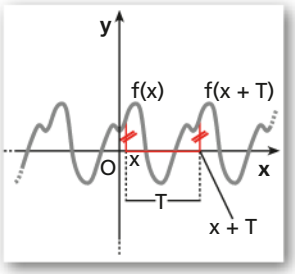
Una funzione f monotòna in senso stretto è sempre iniettiva. Infatti, se f è monotòna in senso stretto, allora per ogni $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$; quindi risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè f è iniettiva.

ESEMPIO
$y = x^2 - 9$ è monotòna in senso stretto nell'intervallo $[3; 5]$ e in tale intervallo è iniettiva. Invece, la stessa funzione non è monotòna in $[1; 5]$, dove non è iniettiva.

▶ Quale delle due funzioni
$y = x^2 - 4x + 4$,
$y = \frac{1}{2}x + 1$
è monotòna?

Funzioni periodiche

▶ Esercizi a p. 586



DEFINIZIONE
$y = f(x)$ è una **funzione periodica** di periodo T, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, si ha:

$$f(x) = f(x + kT).$$

In una funzione periodica il grafico si ripete di periodo in periodo.
Se f è periodica di periodo T, allora non è iniettiva, perché x e $x + kT$ hanno la stessa immagine.
Se una funzione è periodica di periodo T, essa lo è anche di periodo $2T$, $3T$, $4T$, …
Il periodo minore è anche detto **periodo principale** ed è quello che di solito è considerato come periodo della funzione.

▶ Qual è il periodo di $y = 2\cos x$?
E quello di $y = \cos 2x$?

ESEMPIO
$y = \sin x$ e $y = \cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π.

$y = \tan x$ e $y = \cot x$ sono funzioni periodiche di periodo π.

Funzioni pari e funzioni dispari

▶ Esercizi a p. 586

DEFINIZIONE
Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$.
$y = f(x)$ è una **funzione pari** in D se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ per qualunque x appartenente a D.

▶ La funzione
$y = \frac{1}{-x^2 + 4}$
è pari?

ESEMPIO
$y = f(x) = -x^4 + 2x^2$ è pari perché:

$$f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 = -x^4 + 2x^2 = f(x).$$

Animazione

Nell'animazione risolviamo i tre esercizi relativi a funzioni pari e funzioni dispari, quello qui sopra e i due della pagina successiva.

In generale, se una funzione polinomiale ha espressione analitica contenente soltanto potenze della x con *esponente pari*, allora è pari.
Verifica invece che la funzione $y = f(x) = 2x^4 - x$ **non** è pari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, non si ottiene $f(x)$.

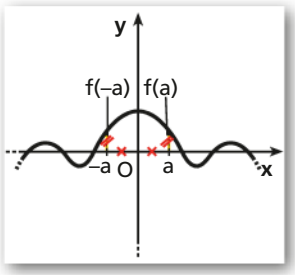
Se una funzione è **pari**, **il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y**. Infatti, se il punto $P(x; y)$ appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto $P'(-x; y)$.

Pertanto, le coordinate di P', pensate come $(x'; y')$, soddisfano le equazioni della simmetria rispetto all'asse y:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

DEFINIZIONE

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, anche $-x \in D$. $y = f(x)$ è una **funzione dispari** in D se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ per qualunque x appartenente a D.



ESEMPIO

$y = f(x) = 4x^5 - x$ è dispari perché:

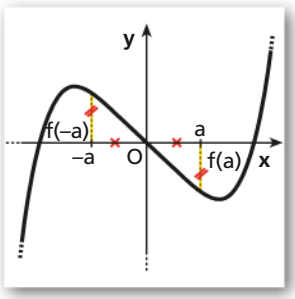
$$f(-x) = 4(-x)^5 - (-x) = -4x^5 + x = -(4x^5 - x) = -f(x).$$

▶ Verifica che la funzione $y = f(x) = x^3 + 1$ **non** è dispari.

Una funzione polinomiale con espressione analitica contenente solo potenze della x con *esponente dispari* è una funzione dispari.

Se una funzione è **dispari**, **il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi**. Infatti, se il punto $P(x; y)$ appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto $P'(-x; -y)$. Pertanto le coordinate di P', pensate come $(x'; y')$, soddisfano le equazioni della simmetria centrale avente come centro l'origine:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}.$$

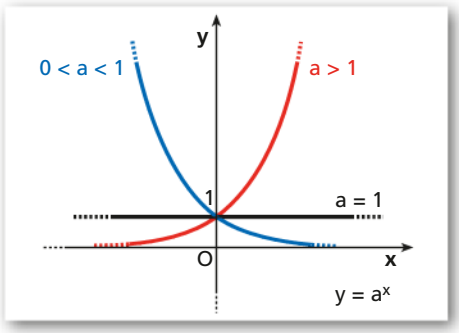


▶ Verifica che $y = f(x) = x^3 - x^2$ non è né pari né dispari.

Una funzione che non sia pari non è necessariamente dispari (e viceversa).

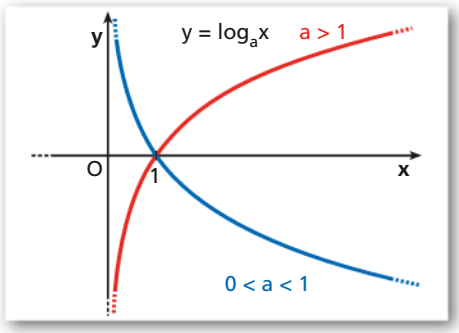
Proprietà delle principali funzioni trascendenti

Funzione esponenziale



- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio**, se $a \neq 1$, $\mathbb{R}^+$, ossia il suo grafico sta tutto «sopra» l'asse x.
- Il grafico **non interseca** l'asse x, **interseca** l'asse y in $(0; 1)$.
- Se $a > 1$, è una funzione sempre **crescente**; se $0 < a < 1$, è sempre **decrescente**; se $a = 1$, è **costante** e vale 1.

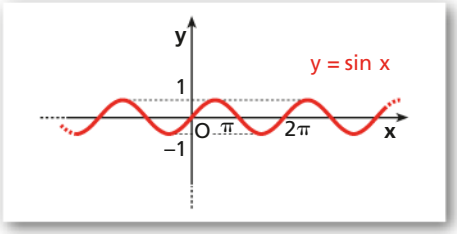
Funzione logaritmica



- Ha come **dominio** $\mathbb{R}^+$, come **codominio** $\mathbb{R}$.
- Il grafico **interseca** l'asse x in $(1; 0)$, **non interseca** l'asse y.
- Se $a > 1$, è una funzione sempre **crescente**; se $0 < a < 1$, è sempre **decrescente**.

TEORIA

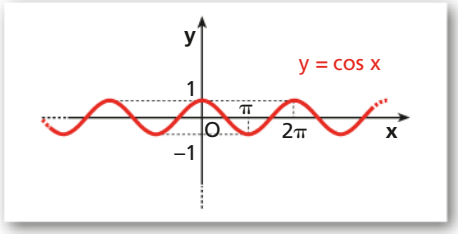
Funzione seno



- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio** $[-1; 1]$.
- È una funzione **dispari**: $\sin(-x) = -\sin x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π: $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Animazione

Funzione coseno

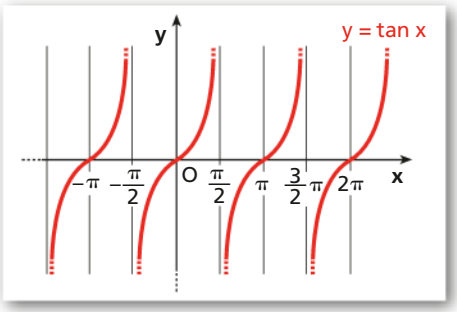


- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio** $[-1; 1]$.
- È una funzione **pari**: $\cos(-x) = \cos x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π: $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$.

Animazione

Ti riproponiamo due animazioni con le quali abbiamo esaminato, mediante figure dinamiche, le caratteristiche delle funzioni seno e coseno, quando abbiamo studiato le funzioni goniometriche.

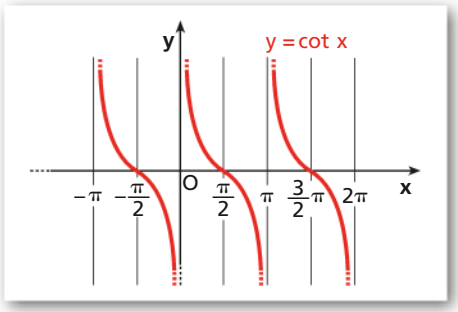
Funzione tangente



- Ha come **dominio** l'insieme $\mathbb{R}$ privato dei valori $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e come **codominio** l'insieme $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari**: $\tan(-x) = -\tan x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π: $\tan x = \tan(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Animazione

Funzione cotangente



- Ha come **dominio** l'insieme $\mathbb{R}$ privato dei valori $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e come **codominio** l'insieme $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari**: $\cot(-x) = -\cot x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π: $\cot x = \cot(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **decrescente** in $]0 + k\pi; \pi + k\pi[$.

Animazione

In queste animazioni puoi osservare in modo dinamico tutte le caratteristiche delle funzioni tangente e cotangente.

TEORIA

3 Funzione inversa

▶ Esercizi a p. 588

DEFINIZIONE

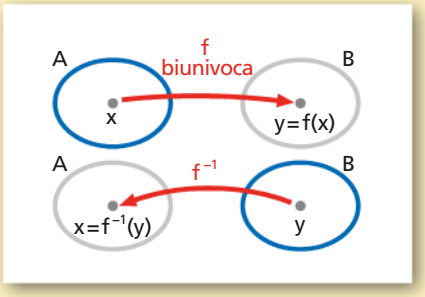
Data la funzione biunivoca

$y = f(x)$ da A a B,

la **funzione inversa** di f è la funzione biunivoca

$x = f^{-1}(y)$ da B ad A

che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$.



Se una funzione ammette inversa, si dice che è **invertibile**.

Se una funzione $f(x)$ non è biunivoca in A, è possibile effettuare una **restrizione D' del dominio** in cui sia biunivoca. Infatti, per l'invertibilità è sufficiente scegliere in A un sottoinsieme D' in modo che $f(x)$ sia iniettiva in D', perché $f(x)$ è senz'altro suriettiva se come insieme B di arrivo consideriamo l'immagine di $f(x)$.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^2$ ha come dominio $\mathbb{R}$ e non è biunivoca, ma per renderla biunivoca dobbiamo considerare come dominio un insieme più ristretto, quello dei numeri reali positivi o nulli, cioè prendiamo $x \geq 0$. Con la restrizione del dominio operata possiamo considerare la sua funzione inversa,

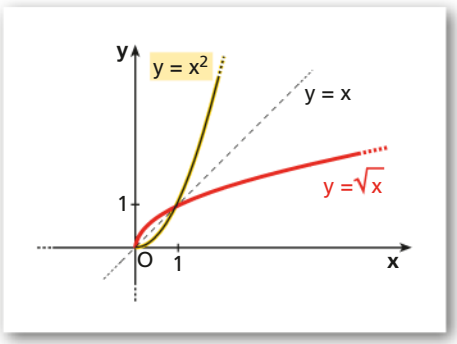
$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y},$$

definita associando a un numero quel valore che, elevato al quadrato, dà il numero stesso.

Per esempio,

$$f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3,$$

perché $9 = f(3) = 3^2$.



Per rappresentare la funzione f^{-1} insieme alla funzione f, scambiamo le variabili nell'espressione della funzione inversa, considerando:

$$y = \sqrt{x}.$$

Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Sfruttando questa proprietà, conoscendo anche soltanto il grafico di una funzione possiamo disegnare il grafico della sua inversa.

Le funzioni monotòne in senso stretto sono biunivoche se si considera come insieme di arrivo la loro immagine.

Quindi esse ammettono sempre la funzione inversa.

Listen to it

Given a bijective function f from A to B, its **inverse function** f^{-1} is the bijective function from B to A which associates to each y in B the value x in A such that $y = f(x)$.

▶ Restringi il dominio della funzione

$y = 9 - x^2$

in modo che sia invertibile e determina la funzione inversa.

Animazione

TEORIA

MATEMATICA INTORNO A NOI

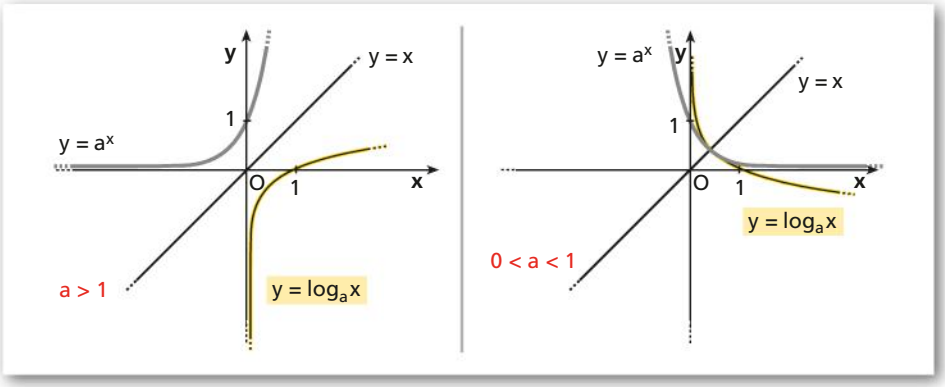
Il prezzo giusto Ogni volta che acquistiamo un prodotto o un servizio, paghiamo in cambio una certa cifra di denaro.

▶ Chi stabilisce qual è il prezzo «giusto»?

La risposta

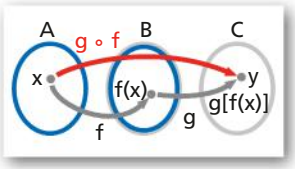
Funzione esponenziale e funzione logaritmica

La funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa). Sono entrambe funzioni strettamente monotòne e quindi biunivoche.



4 Funzione composta

▶ Esercizi a p. 591



Date le funzioni f e g, indichiamo con $g \circ f$ (si legge «g composto f») oppure con $y = g[f(x)]$ la **funzione composta** che si ottiene associando a ogni elemento x del dominio di f, che abbia immagine $f(x)$ appartenente al dominio di g, il valore y immagine di $f(x)$ mediante g.

Per comporre le due funzioni, occorre che l'immagine di x mediante la prima funzione, cioè $f(x)$, sia un valore per il quale si può determinare l'immagine tramite la seconda funzione. Quindi il dominio di $y = g[f(x)]$ è costituito da tutti gli x del dominio di f tali che $f(x)$ appartiene al dominio di g.

In generale, **la composizione delle funzioni non è commutativa**: $g \circ f \neq f \circ g$.

ESEMPIO

Consideriamo le funzioni f e g, da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.
La funzione composta $g \circ f$ è:

$$y = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Invece $f \circ g$ è:

$$y = f[g(x)] = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Per esempio, $g[f(5)] = g(25) = 26$, mentre $f[g(5)] = f(6) = 36$.

▶ Date le seguenti funzioni f e g, determina $f \circ g$ e $g \circ f$:

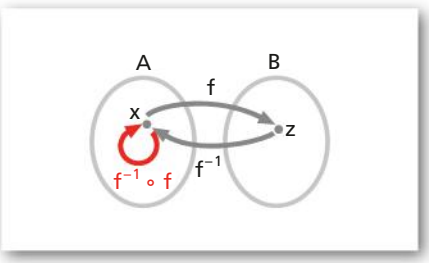
a. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$;

b. $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^3$.

Animazione

Se si compone la funzione f con la sua inversa f^{-1}, si ottiene la **funzione identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso:

$$f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x.$$



IN SINTESI
Funzioni e loro proprietà

Funzioni reali di variabile reale

- Una **funzione** da A a B è una relazione che a *ogni* elemento di A associa *uno e un solo* elemento di B.
- Il **dominio** della funzione è l'insieme A, il **codominio** è il sottoinsieme di B costituito dalle immagini degli elementi di A, che è anche chiamato **immagine** di A.
- **Funzioni reali di variabile reale**: sono rappresentate in genere da un'**espressione analitica**, ossia un'equazione del tipo $y = f(x)$. y è la **variabile dipendente** e x la **variabile indipendente**.
- **Dominio naturale**: è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che può essere preso come dominio. È costituito da tutti i valori per i quali ha significato l'espressione analitica che definisce la funzione.
- Se l'espressione analitica che descrive una funzione contiene soltanto operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice, la funzione è **algebrica**.
  Una funzione algebrica può essere:
  - **razionale intera**, o **polinomiale**, se è espressa mediante un polinomio nella variabile indipendente;
  - **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi in x;
  - **irrazionale** se la variabile indipendente compare sotto il segno di radice.
- Se una funzione non è algebrica, è **trascendente**.

Proprietà delle funzioni

- Una funzione da A a B è:
  - **iniettiva** se due qualunque elementi *distinti* di A hanno immagini distinte in B;
  - **suriettiva** se *tutti* gli elementi di B sono immagini di almeno un elemento di A;
  - **biiettiva** (o biunivoca) se è iniettiva e suriettiva.
- Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, è:
  - **crescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$;
  - **decrescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.
- Una funzione, di dominio D, è **monotòna** in un intervallo $I \subseteq D$ se in esso è sempre crescente o sempre decrescente.
- Una funzione $y = f(x)$ è **periodica** di periodo T se: $f(x) = f(x + kT)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, con $T > 0$.
- $y = f(x)$, definita in $D \subseteq \mathbb{R}$, è:
  pari se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$; **dispari** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Funzione inversa

Una funzione f ammette la **funzione inversa** f^{-1} se e solo se è biunivoca.

$a = f^{-1}(b) \quad \leftrightarrow \quad b = f(a)$.

Funzione composta

Date le funzioni f e g, la **funzione composta** $g \circ f$ associa a ogni x del dominio di f che ha immagine $f(x)$ nel dominio di g il valore $y = g[f(x)]$.

In generale, $g \circ f \neq f \circ g$.

ESERCIZI

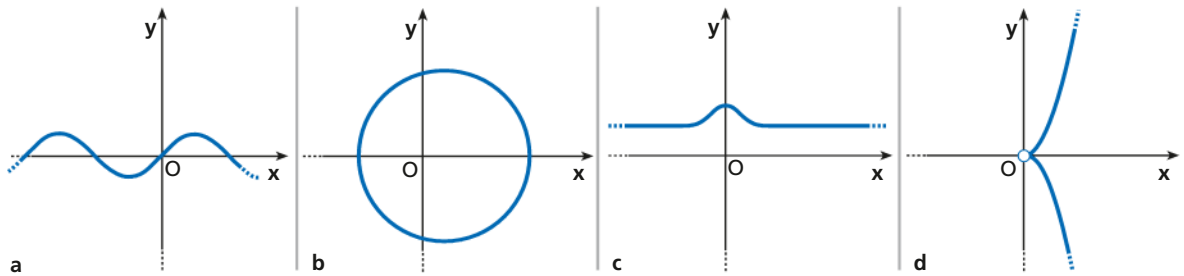
CAPITOLO 12
ESERCIZI

1 Funzioni reali di variabile reale

▶ Teoria a p. 560

Definizione di funzione

1 LEGGI IL GRAFICO Quali dei seguenti grafici rappresentano una funzione?



2 Indica il motivo per cui ciascuna delle seguenti scritture non può rappresentare una funzione.

a. $y = 1 - \ln(-\sqrt{x})$

b. $x^2 + y^2 = 9$

c. $x = 6$

d. $y = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

e. $x + |y| = 0$

f. $x^2 = 4$

3 AL VOLO Quale delle due scritture rappresenta una funzione?

$x^2 = y^3 + 1$ $\quad$ $x = y^2 - 4$

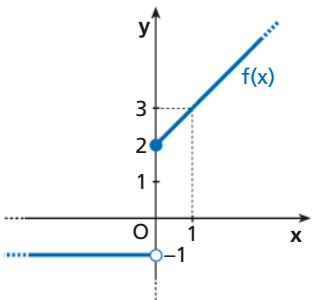
LEGGI IL GRAFICO

4 Dal grafico deduci:

a. il dominio e l'immagine della funzione;

b. $f(-4), f(0), f(3), f\left(\frac{1}{2}\right)$;

c. l'espressione analitica di $f(x)$.

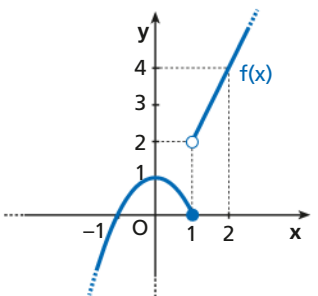


5 Osservando il grafico della figura determina:

a. il dominio e l'immagine della funzione;

b. l'espressione analitica di $f(x)$ che, per $x \leq 1$, è rappresentata da un arco di parabola con vertice sull'asse y;

c. $f(1), f(2), f(-1), f(0), f(-2), f(3)$.



COMPLETA le uguaglianze per ogni funzione assegnata.

6 ●○ $f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$; $\square = f(-1)$, $4 = f(\square)$, $\square = f(0)$, $3 = f(\square)$.

7 ●○ $f(x) = 2^{x-1} + 2$; $\dfrac{5}{2} = f(\square)$, $3 = f(\square)$, $\square = f(3)$, $\square = f(-2)$.

8 ●○ $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\dfrac{1}{2} = f(\square)$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = f(\square)$, $\square = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\square = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

9 ●○ $f(x) = 2\ln x - 1$; $\square = f(1)$, $\square = f(e)$, $-3 = f(\square)$, $3 = f(\square)$.

Per ogni funzione calcola, se esistono, i valori indicati a fianco.

10 ●○ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$; $f(0)$, $f(-1)$, $f(4)$, $f(1)$, $f(1-x)$.

11 ●○ $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{\ln x}}$; $f(4)$, $f(1)$, $f(e)$, $f(x+4)$.

12 ●● $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$; $f(-x)$, $f(3x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$, $f^2(x)$.

13 ●● $f(x) = \sqrt{x-1}$; $f(2)$, $-f(-x)$, $f(x^2+1)$, $f(x+1)$.

14 ●○ Trova i valori di a e b per la funzione $f(x) = \dfrac{ax^2-2}{x+b}$ in modo che $f(-1) = -\dfrac{4}{5}$ e $f(0) = -\dfrac{1}{3}$.

$[a = -2, b = 6]$

15 ●○ Scrivi le seguenti funzioni in forma esplicita.

a. $x^2 - 2xy + 1 = 0$ **c.** $y\sin x + y - 1 = 0$ **e.** $2^y + 1 - x = 0$

b. $x + 2\ln y - 5 = 0$ **d.** $2xy + y - x - 1 = 0$ **f.** $xy^3 - 4 = 0$

16 ●○ Scrivi le seguenti funzioni in forma implicita.

a. $y = \dfrac{x-1}{x+4}$ **b.** $y = \dfrac{\ln x - 1}{x}$ **c.** $y = \dfrac{e^x+1}{e^x}$

Esplicita le seguenti equazioni rispetto alla variabile *y* e indica le condizioni di esistenza di *y*.

17 ●○ $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

18 ●○ $3x^2 - 4y^2 + x - y = 0$

---

19 ●○ **YOU & MATHS** For each function in the first row, select the adjective that best describes it.

a. $y = \dfrac{3}{4}$ **b.** $y = \log_3 2x$ **c.** $y = 4^x$ **d.** $y = \dfrac{1}{5}\tan x$

1. trigonometric **2.** exponential **3.** logarithmic **4.** constant

Determina il grado delle seguenti funzioni algebriche.

20 ●○ $y = \dfrac{x^2-4x}{x^2}$

21 ●○ $y = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^3}$

22 ●○ $x^2y + x^2 - 1 = 0$

---

23 ●○ Traccia i grafici corrispondenti alle seguenti equazioni:

a. $y = x - 1$; **b.** $x^2 + y^2 - 4x = 0$; **c.** $y = x^2 - 2x$; **d.** $x^2 - y^2 = 9$.

Quali di queste equazioni rappresentano una funzione?

24 ●○ Disegna il grafico della seguente funzione.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x > 2 \\ x^2 - 4 & \text{se } x \le 2 \end{cases}$$

Deduci dal grafico l'immagine di $f(x)$ e calcola $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

ESERCIZI

25 Disegna il grafico della seguente funzione.

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se } x < -1 \\ 2^{x-1} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

Indica l'immagine di $f(x)$ e calcola $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$. Trova poi per quali valori di x si ha $f(x) = 8$ e $f(x) = -4$.

26 Indica, tra le seguenti funzioni, quali sono razionali (intere o fratte), irrazionali, trascendenti.

$y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x-1}$, $y = \tan x + 2$, $y = \dfrac{x^4+1}{x-3}$, $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$, $y = \dfrac{1}{x+\sin x}$.

27 Disegna il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < -2 \\ x^2+2x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Determina l'immagine di $f(x)$ e calcola $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$. Trova poi per quali valori di x si ha $f(x) = -1$.

28 Disegna il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|+1 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Trova l'immagine di $f(x)$ e calcola $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Determina per quali valori di x si ha $f(x) = -3$ e $f(x) = 2$.

REALTÀ E MODELLI

29 **Taxi in… funzione!** Alice chiama un taxi per andare in aeroporto.

a. Descrivi con una funzione come varia la tariffa del taxi in base ai kilometri percorsi.

b. Quanto spenderà Alice, che si trova a 18 km dall'aeroporto?

c. Determina dominio e codominio della funzione trovata e traccia il suo grafico.

[b) € 23,50]

tariffe feriali diurne:

€ 3,00	diritto di chiamata
1,20 €/km	per i primi 4 km
1,15 €/km	dal quarto al decimo kilometro
1,10 €/km	dal decimo kilometro in poi

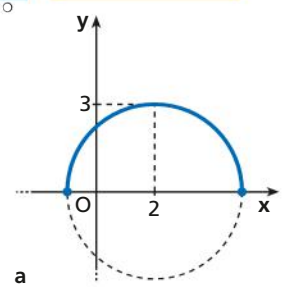
30 **Tra domanda e offerta** Un consulente analizza il modello di marketing di una piccola azienda agricola che vende pomodori. Il consulente trova che la domanda di pomodori sul mercato segue la funzione $q_1 = \dfrac{600}{p}$, mentre l'offerta è descritta dalla funzione $q_2 = 2p - 40$. In questi modelli, p è il prezzo al quintale dei pomodori.

a. Rappresenta le due funzioni, esplicitando dominio e codominio.

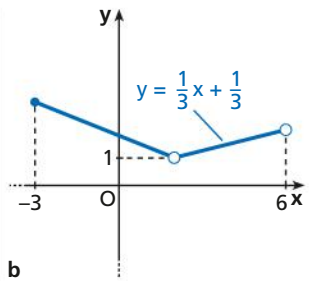
b. Calcola il prezzo di equilibrio, che porta domanda e offerta ad assumere lo stesso valore. [b) $p = 30$ €/q]

Dominio di una funzione

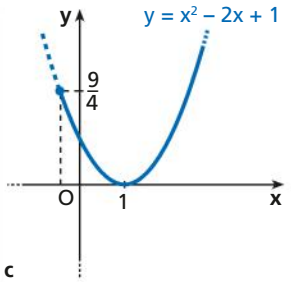
31 LEGGI IL GRAFICO Indica il dominio delle seguenti funzioni.



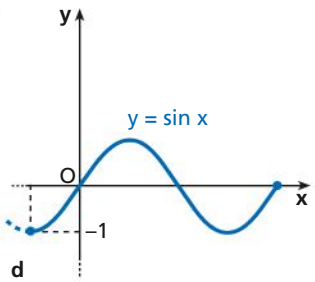
a



b



c



d

32 **ASSOCIA** ogni funzione al proprio dominio.

a. $y = \dfrac{2}{x^2 - x}$ **b.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **c.** $y = x^2 - 1$ **d.** $y = \dfrac{1}{x + |x|}$ **e.** $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$

1. $\mathbb{R}$ **2.** $x \neq 0$ **3.** $x \neq 0 \wedge x \neq 1$ **4.** $x > 1$ **5.** $x > 0$

Funzioni algebriche

33 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 9x}$; **b.** $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2 - 6x + 5}}$.

a. L'espressione ha significato solo se il denominatore è non nullo:

$x^3 - 9x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 9) \neq 0.$

Dominio: $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 3 \ \wedge \ x \neq -3$.

b. L'indice della radice è pari, quindi y esiste soltanto se:

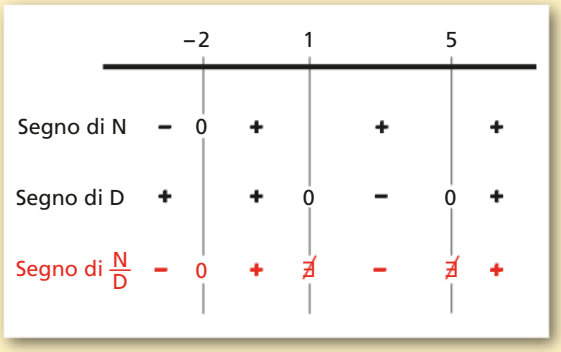
$$\frac{x+2}{x^2 - 6x + 5} \geq 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$x + 2 > 0$ per $x > -2$;

$x^2 - 6x + 5 > 0$ per $x < 1 \vee x > 5$.

Compiliamo il quadro dei segni.



Dominio: $-2 \leq x < 1 \ \vee \ x > 5$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

34 **AL VOLO**

$y = \dfrac{1}{4x}$; $y = 2x^3 - x$; $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$; $y = \sqrt{x+6}$.

35 $y = x^3 - 4x$ $[\mathbb{R}]$

36 $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 2}$ $[x \neq -2]$

37 $y = \sqrt{3}\,x^2 - 1$ $[\mathbb{R}]$

38 $y = x^2 - \dfrac{1}{2x}$ $[x \neq 0]$

39 $y = \dfrac{x-1}{x^2(x+8)}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq -8]$

40 $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$ $[x \neq 2]$

41 $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ $[x \neq -3]$

42 $y = \dfrac{|x|}{x^2 + 2}$ $[\mathbb{R}]$

43 $y = \dfrac{x-5}{x^2 - 25}$ $[x \neq \pm 5]$

44 $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 4x}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 4]$

45 $y = \dfrac{x}{2x^2 - 5x - 3}$ $\left[x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 3\right]$

46 $y = \dfrac{1}{(2x^2 - 4x)(x+5)}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -5]$

47 $y = \dfrac{2x - 1}{x^3 + 4x^2 - 2x - 8}$ $[x \neq \pm\sqrt{2} \wedge x \neq -4]$

48 $y = \dfrac{1}{|x-2| + 2}$ $[\mathbb{R}]$

49 $y = \dfrac{2x}{x^2 - x^3 + 4x - 4}$ $[x \neq \pm 2 \wedge x \neq 1]$

50 $y = \dfrac{5}{\left(2 - \frac{1}{x}\right)(4 - x^2)}$ $\left[x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq \pm 2\right]$

51 $y = \dfrac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 1]$

ESERCIZI

52 $y = \dfrac{1-4x}{x^3-2x^2-9x+18}$ $[x \neq 2 \wedge x \neq \pm 3]$

53 $y = \dfrac{2+x}{x-|x|}$ $[x < 0]$

54 $y = \dfrac{x}{x^3-3x^2+2x-6}$ $[x \neq 3]$

55 $y = \dfrac{x-3}{x^4-3x^2+2}$ $[x \neq \pm\sqrt{2} \wedge x \neq \pm 1]$

56 $y = \dfrac{x-1}{x^2-4|x|}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq \pm 4]$

57 $y = \dfrac{x+5}{x^3+x^2-2x}$ $[x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1]$

58 $y = \dfrac{1}{|x-1|-3}$ $[x \neq -2 \wedge x \neq 4]$

59 $y = \dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-4x-12}$ $[x \neq -3 \wedge x \neq \pm 2]$

60 $y = \dfrac{4x}{4x^2-4x-3}$ $\left[x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{3}{2}\right]$

61 $y = \dfrac{3+x}{(9-x^2)(x^2+2x+3)}$ $[x \neq \pm 3]$

62 $y = \dfrac{1}{x^3-4x^2+4x}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 2]$

63 $y = \sqrt{x^2+4} + \dfrac{1}{x+3}$ $[x \neq -3]$

64 $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{4-x}$ $\left[\frac{1}{2} \leq x \leq 4\right]$

65 $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}}$ $[\mathbb{R}]$

66 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ $[x < 0 \vee x \geq 1]$

67 $y = \sqrt{4x-x^2}$ $[0 \leq x \leq 4]$

68 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{4x^2-3x}$ $\left[x > 0 \wedge x \neq \frac{3}{4}\right]$

69 $y = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{2x-1}}$ $\left[\frac{1}{2} < x \leq 4\right]$

70 $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{3x-5}}$ $\left[x < \frac{5}{3} \vee x \geq 3\right]$

71 $y = \sqrt{13x-4-3x^2}$ $\left[\frac{1}{3} \leq x \leq 4\right]$

72 $y = \dfrac{2}{\sqrt{1-3x}} + \sqrt{1-x^2}$ $\left[-1 \leq x < \frac{1}{3}\right]$

73 $y = \sqrt{\dfrac{6+x}{9x-x^2}}$ $[x \leq -6 \vee 0 < x < 9]$

74 $y = \dfrac{\sqrt{x+6}}{x^2}$ $[x \geq -6 \wedge x \neq 0]$

75 $y = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 2]$

76 $y = \sqrt{\dfrac{-2x}{x^2+4x+4}}$ $[x \leq 0 \wedge x \neq -2]$

77 $y = \sqrt{\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}}$ $\left[-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

78 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$ $[-1 \leq x < 0 \vee x \geq 1]$

79 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x^2-5x+4}}$ $[x \leq 0 \vee 1 < x < 4 \vee x > 4]$

80 $y = \sqrt{|x|-1}$ $[x \leq -1 \vee x \geq 1]$

81 $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ $[x \leq 0 \vee x > 1]$

82 $y = \dfrac{\sqrt{1-x^5}}{x^2-x}$ $[x < 1 \wedge x \neq 0]$

83 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2+2x}}$ $\left[x < 0 \vee \frac{1}{2} < x \leq 1 \vee x > 2\right]$

84 $y = \dfrac{x\sqrt{x^2-6x+8}}{x^2}$ $[x \leq 2 \wedge x \neq 0 \vee x \geq 4]$

85 $y = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^2-2x-8}}$ $[x \neq -2 \wedge x \neq 4]$

86 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-2}}$ $[x \geq \sqrt{2} \wedge x \neq 2]$

87 $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}} + \dfrac{2}{x-4}$ $[x \neq 2 \wedge x \neq 4]$

88 $y = \dfrac{\sqrt{x^4(x+2)}}{|x+1|+x+1}$ $[x > -1]$

89 $y = \sqrt{\dfrac{|x|}{x-1}} + \sqrt{x^2-9}$ $[x \geq 3]$

90 $y = \sqrt{\dfrac{2x^2-x-1}{6x+3}}$ $[x \geq 1]$

91 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $[1 < x < 2 \vee x > 3]$

92 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{|x-1|+|x^2-x|}$ $[x \geq 0 \wedge x \neq 1]$

93 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2(x+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}$ $[x > -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1]$

94 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-3}} + \sqrt{1-\sqrt{x}}$ $[0 \leq x \leq 1]$

95 $y = \dfrac{\sqrt{x^4-x^2-2}}{2x\sqrt{x^2+4}}$ $[x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}]$

96 $y = \sqrt{1-\sqrt{|x+2x^2|}}$ $\left[-1 \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$

97 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}-2x}$ $[x \geq -3 \wedge x \neq 1]$

98 $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{-x}}$ $[x \leq -1]$

99 YOU & MATHS Determine the domain of the following functions:

a. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; **b.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-6}}$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam)

[a) $-2 \le x \le 2$; b) $x \ne 6$]

Funzioni trascendenti con esponenziali e logaritmi

100 TEST Solo una delle seguenti funzioni non ha dominio $\mathbb{R}$. Quale?

A $y = 2^{x-4}$ C $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^4 + 4x^2}}$ E $y = \dfrac{1}{e^{x-1}}$

B $y = \ln(x^2 + 1)$ D $y = \sqrt[3]{x-1}$

101 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo il dominio di:

a. $y = e^{\frac{1}{x^4 - x^2}}$; **b.** $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$.

a. L'esponente di e può essere qualsiasi numero reale. L'unica condizione che dobbiamo porre riguarda dunque l'esistenza della frazione: il denominatore deve essere non nullo.

$x^4 - x^2 \ne 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x^2 - 1) \ne 0$

Dominio: $x \ne 0 \ \wedge \ x \ne 1 \ \wedge \ x \ne -1$.

b. Per l'esistenza di $\ln x$ deve essere $x > 0$.

Per l'esistenza della frazione deve essere: $\ln x - 1 \ne 0 \rightarrow \ln x \ne \ln e \rightarrow x \ne e$.

Quindi:

Dominio: $x > 0 \ \wedge \ x \ne e$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

102 $y = e^{\sqrt{x}}$ [$x \ge 0$]

103 $y = \ln \sqrt{x}$ [$x > 0$]

104 $y = \ln(x^2 + 1)$ [$\mathbb{R}$]

105 $y = \ln(1 + 2x + x^2)$ [$x \ne -1$]

106 $y = e^{\frac{1}{x}}$ [$x \ne 0$]

107 $y = \dfrac{1}{e^{2x}}$ [$\mathbb{R}$]

108 $y = \ln(x + 8)$ [$x > -8$]

109 $y = \dfrac{\ln^2 x}{1 - \ln x}$ [$x > 0 \ \wedge \ x \ne e$]

110 $y = \ln(\ln x)$ [$x > 1$]

111 $y = \sqrt{-\ln x}$ [$0 < x \le 1$]

112 $y = 4^{\ln x^2}$ [$x \ne 0$]

113 $y = \ln(x^2 - 4x - 12)$ [$x < -2 \vee x > 6$]

114 $y = \ln(x^2 - 4)$ [$x < -2 \ \vee \ x > 2$]

115 $y = (1 - 2x)\, e^{-2x}$ [$\mathbb{R}$]

116 $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-5}}$ [$x > 5$]

117 $y = \dfrac{1}{\ln x + 1}$ $\left[x > 0 \wedge x \ne \dfrac{1}{e}\right]$

118 $y = 2^{\sqrt{\frac{x}{x-3}}}$ [$x \le 0 \ \vee \ x > 3$]

119 $y = 3^{\sqrt{x^2 - 4}} + \dfrac{1}{6 + x}$ [$x \le -2 \ \vee \ x \ge 2 \ \wedge \ x \ne -6$]

120 $y = \dfrac{1}{2\ln x - 2}$ [$x > 0 \wedge x \ne e$]

121 $y = \sqrt{\ln(x + 3)}$ [$x \ge -2$]

122 $y = \dfrac{1}{e^{x+2} - 1}$ [$x \ne -2$]

ESERCIZI

123 $y = \dfrac{\sqrt{2^x - 1}}{2x}$ $[x > 0]$

124 $y = \ln[\ln(x-2)]$ $[x > 3]$

125 $y = \sqrt{\ln x} + \sqrt{4 - x}$ $[1 \le x \le 4]$

126 $y = \ln(2x - \sqrt{x})$ $\left[x > \frac{1}{4}\right]$

127 $y = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$ $[x > -1 \wedge x \neq 0]$

128 $y = \dfrac{1}{2^{x+4} - 2}$ $[x \neq -3]$

129 $y = \dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+1}}$ $[x > -1 \ \wedge \ x \neq 0]$

130 $y = \sqrt{-\ln x} + \sqrt{2x - 1}$ $\left[\frac{1}{2} \le x \le 1\right]$

131 $y = \dfrac{\ln(e^x - 1)}{|x-1|}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1]$

132 $y = \dfrac{\ln(x-4)}{\ln x - 4}$ $[x > 4 \ \wedge \ x \neq e^4]$

133 $y = \sqrt{2^x - 4^x}$ $[x \le 0]$

134 $y = \ln\dfrac{x+1}{x-3}$ $[x < -1 \ \vee \ x > 3]$

135 $y = \ln\dfrac{3-x}{1-x^2}$ $[-1 < x < 1 \ \vee \ x > 3]$

136 $y = \ln(x^2 - 9) + \ln x$ $[x > 3]$

137 $y = x \ln|x|$ $[x \neq 0]$

138 $y = \dfrac{1}{\ln(2^x - 1)}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1]$

139 $y = \ln\dfrac{1}{x^2 - 4} + \ln(x^3 - x)$ $[x > 2]$

140 $y = \dfrac{1}{e^{-x}\ln x}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1]$

141 $y = \log_{\frac{1}{2}}[\log_2(4 - x^2)]$ $[-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}]$

142 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4} + \ln(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 7x + 10}$ $[(x \le -2 \vee x > 3) \wedge x \neq 5]$

143 $y = \sqrt{\ln x} + \sqrt{e^x}$ $[x \ge 1]$

144 $y = \sqrt{\ln\sqrt{x}} + \sqrt{(x-2)e^x}$ $[x \ge 2]$

145 $y = \dfrac{1}{9^{x^2} - 3}$ $\left[x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Funzioni trascendenti goniometriche

146 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo il dominio di $y = \dfrac{\tan x - 1}{2\sin x - 1}$.

Per l'esistenza di $\tan x$: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Per l'esistenza della frazione:

$$2\sin x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \sin x \neq \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

Quindi il dominio è $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

147 $y = \dfrac{1}{2\sin x}$ $[x \neq k\pi]$

148 $y = \dfrac{1}{2\cos x - 1}$ $\left[x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

149 $y = 1 - \sqrt{2\sin x - 1}$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

150 $y = \dfrac{1}{\tan x - 1}$ $\left[x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

151 $y = \tan 2x$ $\left[x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

152 $y = \dfrac{1}{\cos x - 2}$ $[\mathbb{R}]$

153 $y = \sqrt{\sin x}$ $[2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi]$

154 $y = \ln(2 + \sin x)$ $[\mathbb{R}]$

155 $y = e^{\sqrt{\sin^2 x}}$ $[\mathbb{R}]$

156 $y = \sin x + x^2 - 2x$ $[\mathbb{R}]$

Riepilogo: Dominio di una funzione

157 **FAI UN ESEMPIO** di funzione razionale fratta che abbia dominio:

a. $D=[1;2]$; **b.** $x\neq 1\wedge x\neq 2$.

158 **FAI UN ESEMPIO** di funzione irrazionale che abbia dominio:

a. $x\geq 0$; **b.** $x<-2\vee x>1$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

159 $y=\dfrac{1}{\ln^2 x-2\ln x+1}$ $[x>0\wedge x\neq e]$

160 $y=\sqrt{\dfrac{x^2-15x-16}{6-x}}$ $[x\leq -1\vee 6<x\leq 16]$

161 $y=\ln(2-\sqrt{4-x})$ $[0<x\leq 4]$

162 $y=\ln[\ln(x-3)]$ $[x>4]$

163 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{x+4}$ $[x<-4\vee x\geq 3]$

164 $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-4x}}$ $[-3\leq x<0]$

165 $y=\ln(1-\sqrt{1-2x})$ $\left[0<x\leq \frac{1}{2}\right]$

166 $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ $\left[x\neq -1\wedge x\neq -\frac{1}{2}\wedge x\neq 0\right]$

167 $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{3-x}} & \text{se } x\leq 0\\ 2^{\frac{1}{x-4}} & \text{se } x>0\end{cases}$ $[x\neq 4]$

168 $y=\ln\dfrac{|x|}{|x-3|-5}$ $[x<-2\vee x>8]$

169 $y=\sqrt{|x^2-3x+4|-2}$ $[x\leq 1\vee x\geq 2]$

170 $y=\sqrt{3^x+3\cdot 3^{-x}-3}$ $[\mathbb{R}]$

171 $y=\dfrac{1}{\log_3^2 x+3\log_3 x}$ $\left[x>0\wedge x\neq \frac{1}{27}\wedge x\neq 1\right]$

172 $y=\dfrac{1}{2x^3-x^2-x}$ $\left[x\neq -\frac{1}{2}\wedge x\neq 0\wedge x\neq 1\right]$

173 $y=\ln(x^2-|x|)$ $[x<-1\vee x>1]$

174 $y=\dfrac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}}{\log_2(1-x)}$ $[0<x<1]$

175 $y=\sqrt{\dfrac{x^3-x^2}{x+1}}$ $[x<-1\vee x\geq 1\vee x=0]$

176 $y=\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{1+2x}\right|-1}$ $\left[-2\leq x\leq 0\wedge x\neq -\frac{1}{2}\right]$

177 $y=\sqrt{\ln(x^2-2x)-\ln x}$ $[x\geq 3]$

178 $y=\dfrac{\ln(x^2-5x)}{\ln(7-x)}$ $[x<0\vee 5<x<7\wedge x\neq 6]$

Trova per quali valori di *k* le seguenti funzioni hanno dominio $\mathbb{R}$.

179 **AL VOLO** $y=\dfrac{1}{x+k}$

180 $y=\dfrac{1}{x^2-4x+k+1}$ $[k>3]$

181 $y=\sqrt{kx^2-2x+k}$ $[k>1]$

182 $y=\sqrt{x^2+k-4}$ $[k\geq 4]$

---

183 **EUREKA!** Determina il dominio della funzione $y=\sqrt[n]{\dfrac{x}{x-3}}$ al variare di n.

[n dispari: $x\neq 3$; n pari: $x\leq 0\vee x>3$]

Determina per quale valore di *a* le funzioni hanno il dominio indicato.

184 $y=\dfrac{1}{x^2+ax-8}$ D: $x\neq -2\wedge x\neq 4$ $[a=-2]$

185 $y=\ln(a-2x)$ D: $x<-6$ $[a=-12]$

186 $y=e^{\frac{1}{x^2-a}}$ D: $\mathbb{R}$ $[a<0]$

ESERCIZI

Funzioni uguali

Tra le seguenti coppie di equazioni indica quali rappresentano la stessa funzione.

187 $y = \ln\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}\ln x$.

188 $y = \ln(x-3)^2$, $y = 2\ln(x-3)$.

189 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$, $y = 1$.

190 $y = \frac{\sin x}{\sin x} + 1$, $y = 2$.

191 $y = \sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}$, $y = \sqrt{x(2-x)}$.

192 $y = \frac{x^3}{x^2}$, $y = x$.

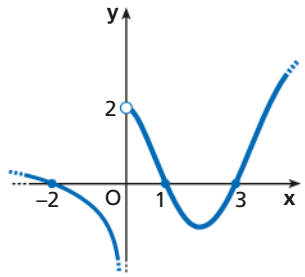
193 $y = \frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt[3]{x}}$, $y = \sqrt[3]{x-2}$.

194 $y = x^2 + 4$, $y = |-x^2 - 4|$.

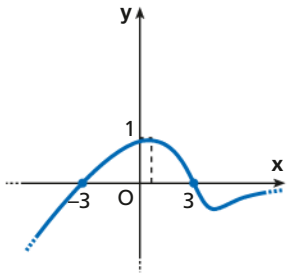
Zeri e segno di una funzione

LEGGI IL GRAFICO Osservando i seguenti grafici, indica il dominio e l'immagine di ciascuna funzione. Indica inoltre gli zeri e per quali valori di x ogni funzione è positiva o negativa.

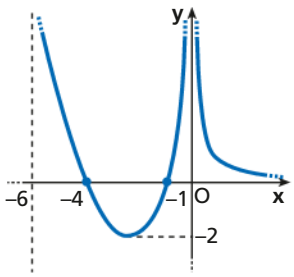
195



196



197



198 **ESERCIZIO GUIDA** Studiamo il segno della seguente funzione nel suo dominio, troviamo gli zeri e rappresentiamo nel piano cartesiano le zone in cui si trova il grafico:

$$y = f(x) = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{x+2}}.$$

- Determiniamo il dominio D:

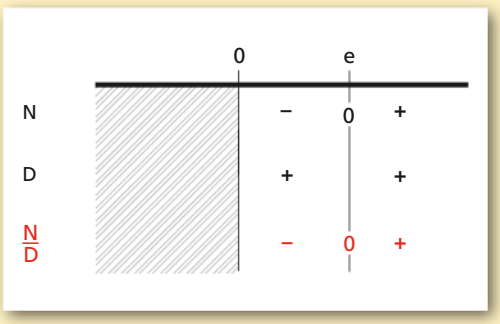
$$\begin{cases} x > 0 & \text{esistenza di } \ln x \\ x \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 & \text{esistenza della frazione} \\ x + 2 \geq 0 & \text{esistenza del radicale} \end{cases} \quad \rightarrow \quad D\colon x > 0.$$

- Studiamo il segno della funzione:

$N > 0$: $\ln x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \ln x > 1 \quad \rightarrow \quad \ln x > \ln e \quad \rightarrow \quad x > e$;

$D > 0$: $x\sqrt{x+2} > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0$.

Compiliamo il quadro dei segni, ricordando che la funzione $y = f(x)$ esiste soltanto per $x > 0$.

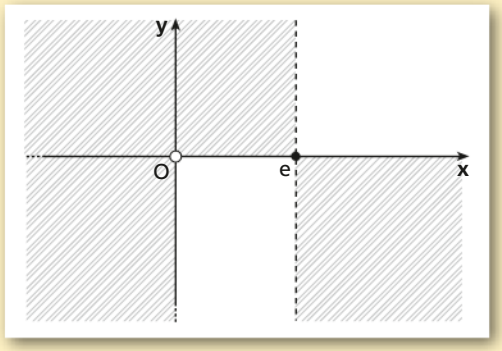


$f(x) > 0$ per $x > e$;

$f(x) < 0$ per $0 < x < e$;

$f(x) = 0$ per $x = e$.

Il grafico della funzione si trova nelle zone non cancellate nel grafico e interseca l'asse x nel punto $(e; 0)$.



199 AL VOLO Indica il dominio e il segno delle seguenti funzioni.

$y = (x+2)^4$ $\quad y = -(x-3)^{-2}$ $\quad y = e^{x^2}$ $\quad y = \left(\frac{1}{e}\right)^{-3x}$

Studia il segno delle seguenti funzioni nel loro dominio e trova eventuali punti di intersezione del grafico con gli assi (nei risultati non li indichiamo). Rappresenta nel piano cartesiano le zone in cui si trova il grafico.

200 $y = \dfrac{x-4}{x(1-x)^2}$ $\quad [D: x \neq 0 \wedge x \neq 1;\ y > 0: x < 0 \vee x > 4]$

201 $y = \dfrac{2-|x|}{\sqrt{x-1}}$ $\quad [D: x > 1;\ y > 0: 1 < x < 2]$

202 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^3}}$ $\quad [D: x \geq 2;\ y > 0: x > 2]$

203 $y = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x}$ $\quad [D: x \neq 0 \wedge x \neq 3;\ y > 0: x < 0 \vee 1 < x < 3 \vee x > 4]$

204 $y = \dfrac{x^2-4}{9x^2-x^3}$ $\quad [D: x \neq 0 \wedge x \neq 9;\ y > 0: x < -2 \vee 2 < x < 9]$

205 $y = \dfrac{x+3}{(x^2-1)(-x^2+4)}$ $\quad [D: x \neq \pm 1 \wedge x \neq \pm 2;\ y > 0: x < -3 \vee -2 < x < -1 \vee 1 < x < 2]$

206 $y = \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{|x|+|x^2-4x|}$ $\quad [D: -5 \leq x \leq 5 \wedge x \neq 0;\ y > 0: -5 < x < 5 \wedge x \neq 0]$

207 $y = x\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$ $\quad [D: 0 < x \leq 1;\ y > 0: 0 < x < 1]$

208 $y = \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x}$ $\quad [D: x \neq 0;\ y > 0: x < 0 \vee 0 < x < 2 \vee x > 3]$

209 $y = (x^3-1)\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}}$ $\quad [D: x \neq 1;\ y > 0: x > 1]$

210 $y = \dfrac{2^x}{2^x-2}$ $\quad [D: x \neq 1;\ y > 0: x > 1]$

211 $y = \ln\dfrac{x-1}{x-4}$ $\quad [D: x < 1 \vee x > 4;\ y > 0: x > 4]$

212 $y = \dfrac{\ln x}{|x-1|-2}$ $\quad [D: x > 0 \wedge x \neq 3;\ y > 0: 0 < x < 1 \vee x > 3]$

213 $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln(x-2)}$ $\quad [D: x > 2 \wedge x \neq 3;\ y > 0: x > 3]$

ESERCIZI

214 $y = \dfrac{e^{2x-1}-1}{e^x-1}$ $\left[D: x \neq 0;\ y > 0: x < 0 \vee x > \frac{1}{2}\right]$

215 $y = \dfrac{\ln x}{\ln(x-1)}$ $[D: x > 1 \wedge x \neq 2;\ y > 0: x > 2]$

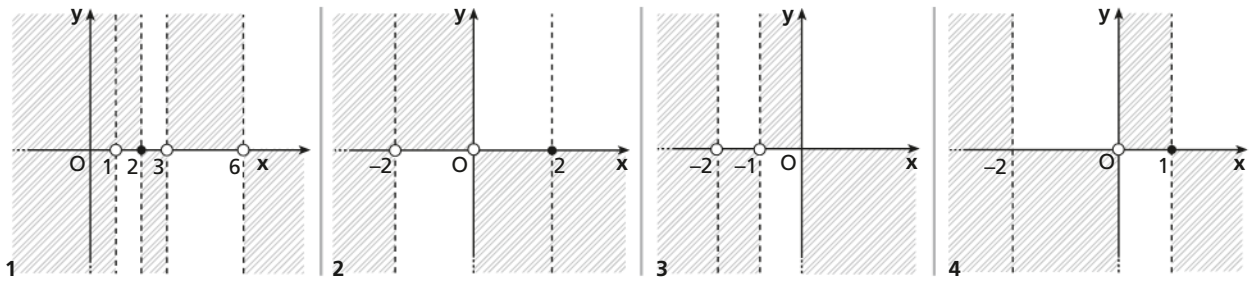
216 $y = \sqrt{\dfrac{1-4x^2}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$ $\left[D: 0 < x \leq \frac{1}{2} \vee x > 1;\ y > 0: 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

217 $y = \dfrac{\sqrt{\log_2 x}}{1-\log_2 x}$ $[D: x \geq 1 \wedge x \neq 2;\ y > 0: 1 < x < 2]$

218 $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)}{\log_3(x-1)}$ $[D: x > 3;\ y > 0: 3 < x < 4]$

219 **ASSOCIA** a ogni funzione la figura che indica la zona in cui si trova il grafico.

a. $y = \dfrac{e^{\sqrt{x+2}}}{x} \cdot (x-1)$ **b.** $y = \dfrac{4x^2-16x+16}{x\sqrt{x+2}}$ **c.** $y = \dfrac{x}{\ln\sqrt{x+2}}$ **d.** $y = \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-9x+18}$



MATEMATICA AL COMPUTER

Intersezioni Con Wiris determiniamo le intersezioni con gli assi cartesiani del grafico della funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge $y = 12x^4 - 20x^3 - 231x^2 - 145x + 132$; tracciamo il grafico, dove evidenziamo le intersezioni trovate.

Risoluzione – 8 esercizi in più

Grafici delle funzioni e trasformazioni geometriche

Traccia il grafico di $f(x)$ e poi esegui le trasformazioni indicate a fianco; scrivi infine le equazioni delle curve trasformate.

220 $f(x) = -2x + 4$
- traslazione di vettore $\vec{v}(-2; 1)$
- simmetria rispetto all'asse y

221 $f(x) = x^2 - 2x$
- simmetria rispetto al punto $(0; 1)$
- simmetria rispetto alla retta $y = 3$

222 $f(x) = 2^x$
- simmetria rispetto alla retta $x = 2$
- traslazione di vettore $\vec{v}(-4; 1)$

223 $f(x) = \ln x$
- traslazione di vettore $\vec{v}(-3; -1)$
- simmetria rispetto all'asse x

224 $f(x) = \cos x$
- dilatazione verticale con $n = 2$
- traslazione di vettore $\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$

Disegna il grafico di $f(x)$ e rappresenta nello stesso piano cartesiano le funzioni indicate a fianco, dopo aver individuato quali trasformazioni geometriche devono essere applicate.

225 $f(x) = 2^x$; $y = -2^x + 2$; $y = 2^{x-2} - 1$.

226 $f(x) = \sin x$; $y = \sin 2x$; $y = 2\sin x$.

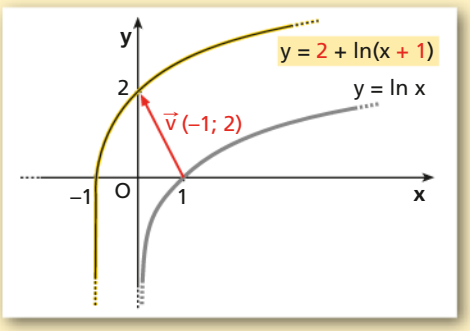
227 $f(x) = \ln x$; $y = \ln(-x)$; $y = -\ln(x)$.

228 YOU & MATHS Graph the function $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x < 0 \\ e^x + 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam)

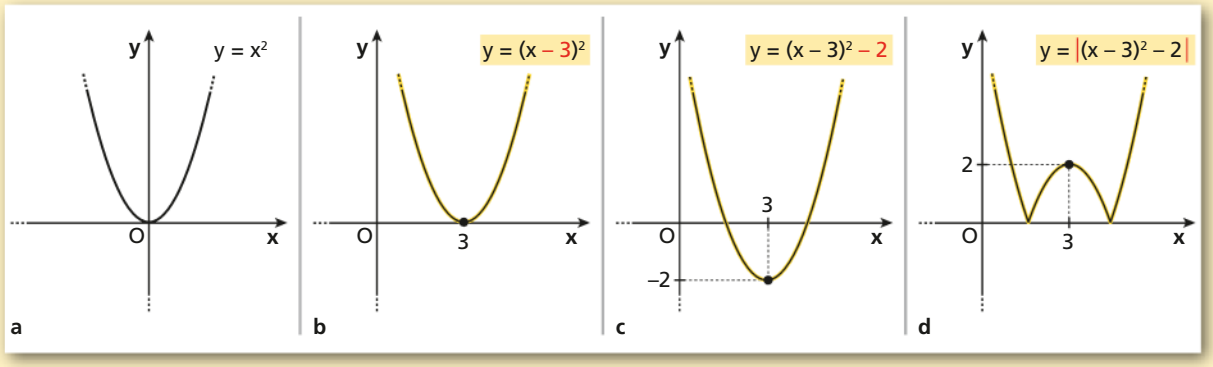
229 ESERCIZIO GUIDA Disegniamo il grafico delle funzioni: **a.** $y = 2 + \ln(x+1)$; **b.** $y = |(x-3)^2 - 2|$.

a. Tracciato il grafico di $y = f(x) = \ln x$, otteniamo quello di $y = 2 + f(x+1) = 2 + \ln(x+1)$, con una traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 2)$.



b. Tracciato il grafico di $y = f(x) = x^2$ (figura **a**), applichiamo in sequenza le trasformazioni geometriche.
Otteniamo il grafico di $y = f(x-3) = (x-3)^2$ applicando una traslazione di vettore $\vec{v}(3; 0)$ (figura **b**).
Otteniamo poi quello di $y = f(x-3) - 2 = (x-3)^2 - 2$ applicando una traslazione di vettore $\vec{v_2}(0; -2)$ (figura **c**).

Ricaviamo infine il grafico di $f(x) = |(x-3)^2 - 2|$ applicando una simmetria rispetto all'asse x al grafico precedente, cioè al grafico di $y = (x-3)^2 - 2$, nell'intervallo in cui $y < 0$ (figura **d**). Per $y \geq 0$ il grafico rimane invariato.



Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

230 $y = |x+3|$; $y = |x^2 + 5x|$.

231 $y = 2|x| - 1$; $y = 2^x - 1$.

232 $y = |x^3| - 1$; $y = \frac{1}{2}e^x - 1$.

233 $y = -\ln(x-2)$; $y = -2^x + 2$.

234 $y = -e^{|x|}$; $y = e^{x-1} + 4$.

235 $y = (x+4)^2 - 2$; $y = 1 - \sin x$.

236 $y = -3^{-x}$; $y = |3^x - 9|$.

237 $y = -2\ln(-x)$; $y = -|\ln x| + 1$.

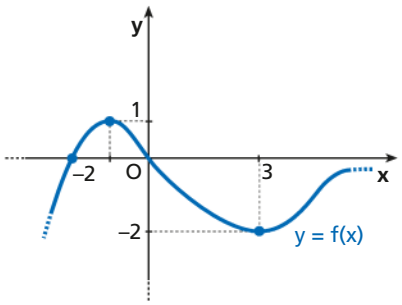
ESERCIZI

238 Disegna il grafico della funzione $y = f(x) = \log_2 x$. Successivamente traccia i grafici di

$y = -f(x)$, $y = f(x + 2)$, $y = f(x) + 2$, $y = f(-x)$.

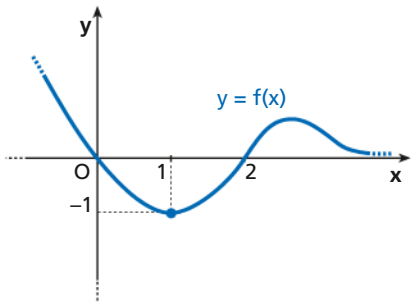
239 Data la funzione $y = f(x)$ rappresentata nel grafico della figura seguente, disegna i grafici delle funzioni:

$y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = -f(x) - 2$, $y = f(-x)$.



240 In figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$. Disegna i grafici delle funzioni:

$y = f(x - 1)$, $y = f(-x) + 3$, $y = -|f(x)|$.



241 Disegna il grafico di $f(x) = 2^{x-1}$ e dimostra che $f(-x) \cdot f(x) = f(-1)$.

242 Disegna il grafico di $f(x) = \ln x + 1$ e poi traccia i grafici di $-f(-x)$, $f(x - 4)$, $f(x - 1) - 1$.

243 Determina la funzione $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, il cui grafico passa per $A(-1; -1)$, per $B(-2; 0)$ e per l'origine O degli assi, e rappresentala graficamente. Utilizzando il grafico di $f(x)$ disegna i grafici di

$y = f(-x) + 1$, $y = -2f(-x)$, $y = |f(x)| - 2$.

$[y = x^2 + 2x]$

244 Disegna il grafico di $f(x) = -\cos x$ e poi quello delle funzioni $2f(2x)$, $-f(x) - 2$, $\dfrac{f(x)}{|f(x)|} - 2$.

245 YOU & MATHS Determine the domain and the image of $f(x) = \frac{1}{4}\sin 2x$, then sketch its graph.

TUTOR matematica Allenati con **15 esercizi interattivi** con feedback "hai sbagliato, perché…"
su.zanichelli.it/tutor3 risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con tutor

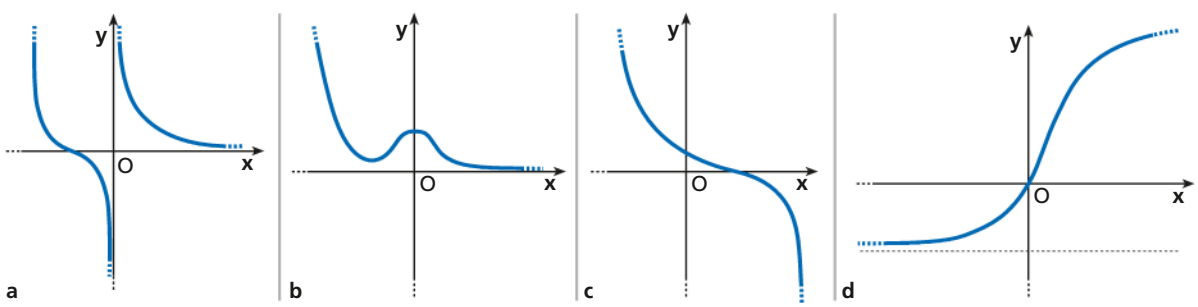
2 Proprietà delle funzioni

Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

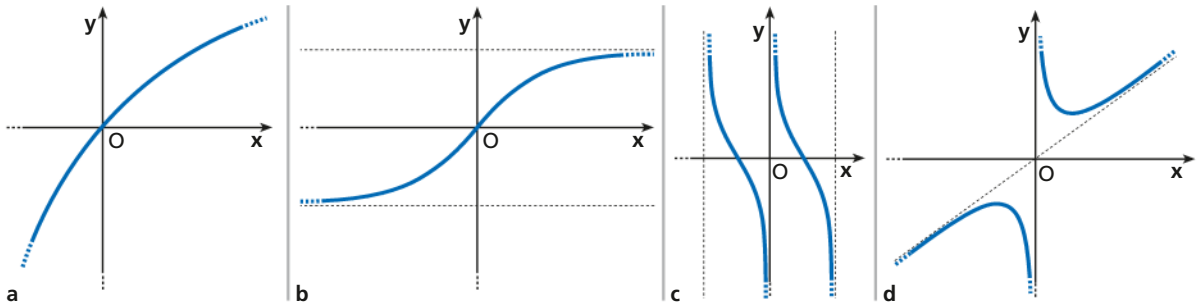
▶ Teoria a p. 564

LEGGI IL GRAFICO Ogni grafico rappresenta una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Indica se è una funzione iniettiva, suriettiva o biunivoca.

246



247



248 **AL VOLO** Quali delle seguenti funzioni sono iniettive su $\mathbb{R}$?

a. $y = |x|$ **b.** $y = x^2$ **c.** $y =$ **d.** $y = 1 + x$

249 **a.** Determina il dominio e il codominio e studia il segno della funzione $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } |x| < 1 \\ |x-2| & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$.

b. Calcola $f(-1), f(3), f\left(\frac{1}{2}\right)$ e determina le controimmagini di 0 e $-\frac{2}{5}$.

c. Rappresenta il grafico di $f(x)$ e conferma graficamente i risultati trovati.

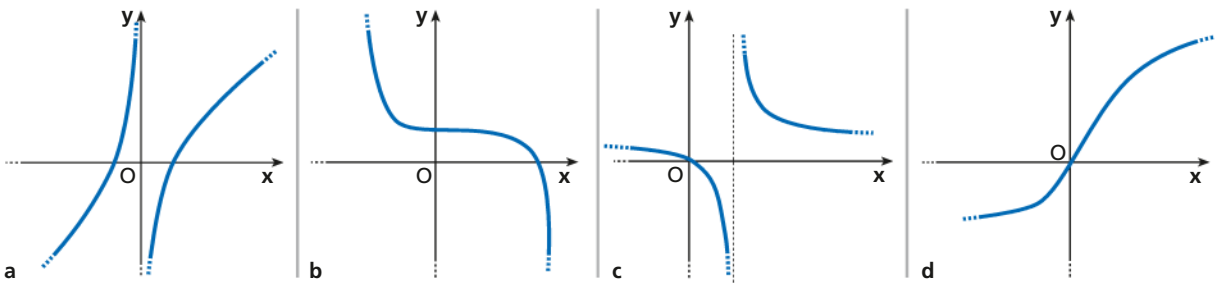
d. $f(x)$ è una corrispondenza biunivoca?

[a) D: $\mathbb{R}$, C: $y > -1$; $f(x) > 0$ per $x < 0 \vee 1 < x < 2 \vee x > 2$; b) $3, 1, -\frac{1}{2}, 0 \vee 2, \frac{2}{5}$; d) no]

Funzioni crescenti, decrescenti, monotòne

▶ Teoria a p. 565

250 **LEGGI IL GRAFICO** Per ogni grafico studia gli intervalli di monotonia precisando in quali intervalli la funzione rappresentata è sempre crescente o decrescente e se lo è in senso stretto o in senso lato.



251 **VERO O FALSO?**

a. La funzione $y = \tan x$ è crescente in $[0; \pi]$. V F

b. La funzione $y = \ln x - 3$ è sempre decrescente. V F

c. Una funzione biunivoca è sempre monotòna. V F

d. La funzione $y = 3^{-x-1}$ è crescente. V F

252 **YOU & MATHS** Is $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6$ an increasing function?

253 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Siano f e g due funzioni definite sullo stesso dominio, entrambe crescenti in senso stretto. Cosa puoi dire sulla monotonia di $f + g$? E se f è crescente e g decrescente in senso stretto, cosa si può dire sulla monotonia di $f - g$?

Dopo aver rappresentato le seguenti funzioni, indica in quali intervalli sono crescenti e in quali decrescenti.

254 $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ 7 - x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

[cresc. per $x < 2$; decr. per $x > 2$]

ESERCIZI

255 $y = \begin{cases} \sin x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\tan x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ $\left[\text{cresc. per } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\text{; decr. per } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi\right]$

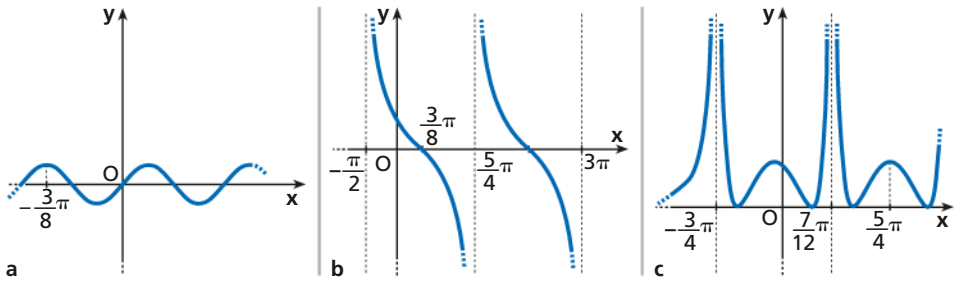
256 $y = x^2 - 3x - 10$ $\left[\text{decr. per } x < \frac{3}{2}\text{; cresc. per } x > \frac{3}{2}\right]$

257 $y = \begin{cases} -\ln(x+1) & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$ [decr. per $-1 < x < 0$; cresc. in senso lato per $x \ge 0$]

Funzioni periodiche

▶ Teoria a p. 566

258 LEGGI IL GRAFICO Indica il periodo delle seguenti funzioni periodiche.



Periodo delle funzioni goniometriche

259 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo il periodo di: **a.** $y = \cos\frac{2}{5}x$; **b.** $y = \tan 4x$.

Se $f(x)$ è una funzione di periodo T_1, allora $f(mx)$ è periodica di periodo $T = \frac{T_1}{m}$.

a. Il periodo della funzione $y = \cos x$ è 2π, quindi il periodo cercato è $T = \frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$.

b. Il periodo della funzione $y = \tan x$ è π, quindi il periodo cercato è $T = \frac{\pi}{4}$.

Trova il periodo delle seguenti funzioni.

260 $y = \sin\frac{2}{3}x$ $[3\pi]$

261 $y = \sin x + \cos\frac{x}{2}$ $[4\pi]$

262 $y = \tan 5x$ $\left[\frac{\pi}{5}\right]$

263 $y = \tan x + \sin x$ $[2\pi]$

264 $y = 2\cos 2x + \sin x$ $[2\pi]$

265 $y = \frac{1}{\cos 4x}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

266 YOU & MATHS Give an example of a periodic function with period 4π.

Funzioni pari e funzioni dispari

▶ Teoria a p. 566

267 FAI UN ESEMPIO Che cosa significa che una funzione è pari? Di quali proprietà gode il suo grafico? Completa le tue risposte con un esempio.

268 **VERO O FALSO?**

a. Una funzione che non è dispari è pari. V F

b. Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse x. V F

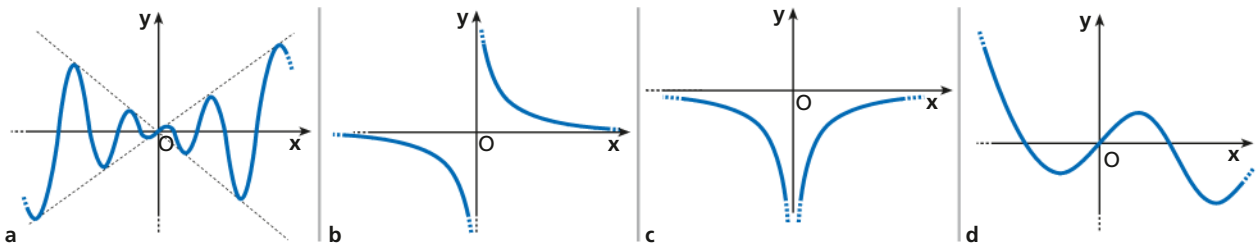
c. Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'asse y. V F

d. Se una funzione $f(x)$ è pari, allora $-f(x)$ è dispari. V F

269 **FAI UN ESEMPIO** Dimostra che, date due funzioni f e g, entrambe dispari, allora $f+g$ è dispari e $f \cdot g$ è pari, e fai un esempio.

270 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Date due funzioni f e g, una pari e l'altra dispari, cosa puoi dire del quoziente $\frac{f}{g}$?

271 **LEGGI IL GRAFICO** I seguenti grafici rappresentano alcune funzioni. Indica quali di esse sono pari, quali dispari e quali né pari né dispari, motivando la risposta.



272 **ESERCIZIO GUIDA** Stabiliamo se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

a. $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{-2|x|}$; **b.** $f(x)=\sqrt[3]{x}+6x^3$.

a. Determiniamo il dominio. La funzione è fratta:

$-2|x| \neq 0 \quad \rightarrow \quad D: x \neq 0$.

Preso un generico x nel dominio:

$$f(-x)=\frac{(-x)^4-(-x)^2}{-2|-x|}=\frac{x^4-x^2}{-2|x|}=f(x) \quad \rightarrow \quad f \text{ è pari.}$$

f è pari se $f(-x) = f(x)$

f è dispari se $f(-x) = -f(x)$

b. Il dominio è $\mathbb{R}$.

$$f(-x)=\sqrt[3]{-x}+6(-x)^3=-\sqrt[3]{x}-6x^3=-f(x) \quad \rightarrow \quad f \text{ è dispari.}$$

Verifica che le seguenti funzioni sono pari.

273 $y=\dfrac{1+x^2}{4-x^2}$; $y=\dfrac{x^2-2}{3x^4}$.

274 $y=\left|\dfrac{3x}{x^2-1}\right|$; $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{2-x^2}$.

Verifica che le seguenti funzioni sono dispari.

275 $y=\dfrac{3}{x^3}+2x^3$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$.

276 $y=x\sqrt{5-x^2}$; $y=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari.

277 $y=3x^3+2x-1$

278 $y=x^2-|5x|$

279 $y=x\cdot\dfrac{|2x|}{3}$

280 $y=\dfrac{\sqrt{7-x^2}}{x}$

281 $y=\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

282 $y=2\sqrt{x+1}-x$

283 $y=\sqrt{x^2+9}-x^4$

284 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

285 $y=3x-\sqrt[3]{x}$

ESERCIZI

286 ●○ $y = \dfrac{|x|}{1+\sqrt{x^2-1}}$

287 ●○ $y = \dfrac{2x}{2^x + 2^{-x}}$

288 ●○ $y = \dfrac{x^4+2}{x}$

289 ●○ $y = \dfrac{3}{\sqrt{3-x^2}}$

290 ●○ $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{5+x^2}}$

291 ●○ $y = x\sqrt{x^2-1}$

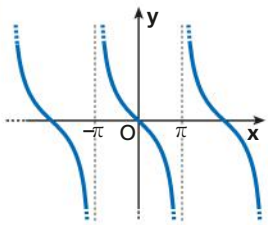
292 ●● $y = \ln|x| + 1$

293 ●● $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{x}$

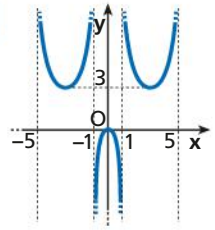
294 ●● $y = \dfrac{|x| + x^2}{2x}$

LEGGI IL GRAFICO Per ognuna delle funzioni rappresentate nei seguenti grafici indica:
a. il dominio; **b.** l'immagine; **c.** se è pari o dispari; **d.** se è monotòna.

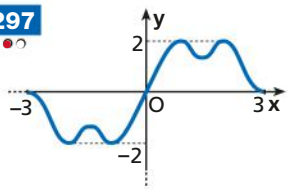
295 ●○



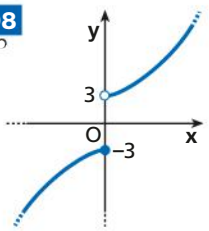
296 ●○



297 ●○



298 ●○



REALTÀ E MODELLI

299 ●○

Corrente che scalda La quantità Q di calore prodotta ogni secondo dalla lavatrice di Ernesto per scaldare l'acqua è funzione dell'intensità di corrente i secondo la legge: $Q(i) = 42i^2$.

a. Traccia il grafico di $Q(i)$ considerando un'opportuna restrizione del dominio.

b. È una funzione iniettiva? È monotòna? È pari?

300 ●● **L'orologio** Considera un orologio analogico (a lancette) e costruisci la seguente funzione: la variabile indipendente h corrisponde all'ora (dall'ora 1 all'ora 24), la variabile dipendente è l'angolo (in gradi) che la lancetta delle ore forma con la posizione verticale delle 12.

a. Determina l'espressione analitica della funzione e rappresentala nel piano cartesiano.

b. Costruisci una funzione analoga considerando la lancetta dei minuti nell'arco di un'ora; rappresentala analiticamente e nel piano cartesiano.

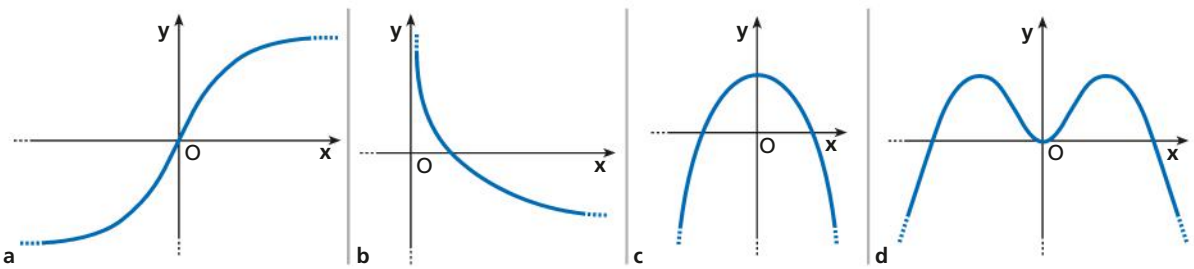
c. Quale delle due funzioni è iniettiva? Quale è crescente in senso stretto in tutto il suo dominio?

$$\left[\text{a) } f(h) = \begin{cases} 30h & 1 \le h \le 12,\ h \in \mathbb{N} \\ 30(h-12) & 12 < h \le 24,\ h \in \mathbb{N} \end{cases}\text{; b) } g(m) = 6m, \text{ con } 0 \le m < 60,\ m \in \mathbb{N}\right]$$

3 Funzione inversa

▶ Teoria a p. 569

301 ●○ **LEGGI IL GRAFICO** Per ognuna delle funzioni rappresentate, considera un'eventuale restrizione del dominio in modo che la funzione ammetta la funzione inversa e disegnane il grafico.



302 ●○ Indica quali delle seguenti funzioni sono invertibili e spiega perché, utilizzando eventualmente il loro grafico.

a. $y = 2x - 5$; **b.** $y = \frac{4}{x} + 1$; **c.** $y = \sqrt{x+5}$; **d.** $y = \ln(x-2)$.

303 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo l'espressione analitica della funzione inversa di:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

La funzione $y = \frac{1}{1+e^x}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Determiniamo la relazione inversa $f^{-1}(y)$ ricavando x,

$$1 + e^x = \frac{1}{y} \rightarrow e^x = \frac{1}{y} - 1 \rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right),$$

e notiamo che è una funzione perché a ogni valore di y corrisponde un solo valore di x, pertanto la funzione è invertibile.
Poiché y è ora variabile indipendente, scriviamo la funzione inversa scambiando x con y:

$$y = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Il dominio della funzione inversa, che coincide con il codominio di $f(x)$, si ottiene risolvendo la disequazione $\frac{1}{x} - 1 > 0$. Esso risulta essere l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

Determina l'espressione analitica della funzione inversa delle seguenti funzioni, verificando che sono invertibili.

304 ●○ $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$ $\left[f^{-1}(x) = 3x + 12\right]$

305 ●○ $f(x) = -5x + 1$ $\left[f^{-1}(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\right]$

306 ●○ $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x}\right]$

307 ●○ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{2x^2}\right]$

308 ●○ $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ $\left[f^{-1}(x) = x^3 + 3\right]$

309 ●○ $f(x) = 2 - x^3$ $\left[f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2-x}\right]$

310 ●○ $f(x) = \sqrt{2x-4}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{x^2+4}{2}\right]$

311 ●○ $f(x) = 2 + e^x$ $\left[f^{-1}(x) = \ln(x-2)\right]$

312 ●○ $f(x) = \log_2(1+x)$ $\left[f^{-1}(x) = 2^x - 1\right]$

313 ●● $f(x) = 2^{x+3} + 4$ $\left[f^{-1}(x) = \log_2(x-4) - 3\right]$

314 ●● $f(x) = -e^{-2x} - 1$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{\ln(-x-1)}{-2}\right]$

315 ●● $f(x) = 1 - 2\ln(x-2)$ $\left[f^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{1-x}{2}}\right]$

316 ●● $f(x) = \ln\frac{1}{x}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x}\right]$

317 ●● $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\ln x}\right]$

318 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo l'espressione analitica della funzione inversa di $f(x) = 4x - x^2$ dopo aver effettuato un'opportuna restrizione del dominio in modo che $f(x)$ sia biunivoca e rappresentiamo la funzione inversa.

Il grafico di $f(x) = 4x - x^2$ è quello di una parabola rivolta verso il basso che ha il vertice in $V(2; 4)$ e che interseca l'asse in $x = 0$ e $x = 4$.

$f(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$, ma non è biunivoca.

Nell'intervallo $]-\infty; 2]$, invece, risulta biunivoca e la sua immagine è l'intervallo $]-\infty; 4]$.

ESERCIZI

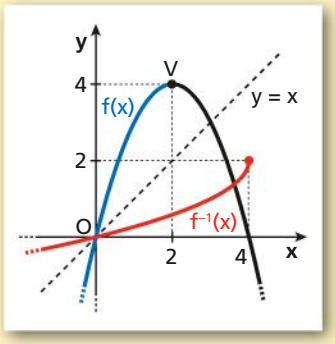
Determiniamo la funzione inversa ricavando x:

$$y = 4x - x^2 \rightarrow x^2 - 4x + y = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - y}\,.$$

Scegliamo $x = 2 - \sqrt{4 - y}$, perché deve essere $x \leq 2$, e nell'espressione scambiamo x con y per poter rappresentare la funzione inversa nello stesso piano cartesiano di $f(x)$:

$$y = 2 - \sqrt{4 - x}\,.$$

La funzione inversa è definita per $x \leq 4$ e otteniamo il suo grafico tracciando il simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



In un diagramma cartesiano disegna le seguenti funzioni e le loro inverse, dopo aver considerato, se necessario, opportune restrizioni del dominio, tali che le funzioni siano biunivoche. Scrivi l'espressione analitica della funzione inversa.

319 $y = -4x^2 + 8x$

320 $y = -2x - 2$

321 $y = \ln x - 2$

322 $y = |2^x - 2|$

323 $y = -x^2 + 9$

324 $y = -2\ln x + 3$

325 $y = \begin{cases} 4x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 2^x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

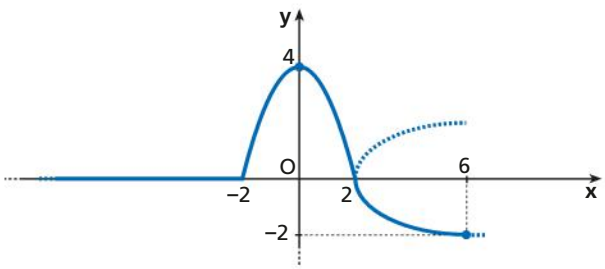
326 $y = e^{-x} - 1$

327 $y = x^2 - 6x + 5$

---

328 Data la funzione $f(x) = \ln\dfrac{1}{x - 3}$, trova il dominio, traccia il grafico utilizzando le trasformazioni geometriche, determina l'espressione della funzione inversa e traccia il relativo grafico. $[x > 3;\ f^{-1}(x) = e^{-x} + 3]$

329 **LEGGI IL GRAFICO** Il grafico in figura rappresenta una funzione $f(x)$ che è l'unione di una retta per $x \leq -2$, di un arco di parabola per $-2 < x \leq 2$ e di un altro arco di parabola per $x > 2$. Dopo aver trovato l'equazione di f, spiega perché è invertibile nell'intervallo $[0; +\infty[$ e calcola l'equazione della funzione inversa.



$$\left[f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & -2 < x \leq 2 \\ -\sqrt{x - 2} & x > 2 \end{cases};\ f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ \sqrt{4 - x} & 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \right]$$

330 **REALTÀ E MODELLI** **Test tra le nuvole** Arianna e Lucia, appassionate di meteorologia, decidono di lanciare una piccola sonda a motore, programmata per salire in verticale con un andamento della quota espresso da $h(t) = \dfrac{t^2}{3000} + 2t$ (t è il tempo in secondi trascorso dal lancio), per effettuare alcune misurazioni.
Arianna afferma che non è necessario che a bordo ci sia un orologio o un cronometro, perché t si può ricavare sfruttando l'altimetro.
Ha ragione? Giustifica la tua risposta.

4 Funzione composta

▶ Teoria a p. 570

331 **ESERCIZIO GUIDA** Date le funzioni $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 2x$, determiniamo $f \circ g$ e $g \circ f$.

- Per effettuare la composizione $f \circ g$ si deve applicare prima la funzione g e al risultato applicare la f, e ciò è possibile solo se il codominio di g è contenuto nel dominio di f.
  La funzione f è definita per $x > 0$, per cui occorre che:

  $g(x) = x^2 - 2x > 0$, cioè $x < 0 \vee x > 2$.

  Quindi $f \circ g$ è definita sull'insieme $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.
  Per determinare la sua espressione, applichiamo alla variabile x la funzione g, per ottenere $z = g(x)$, e a z la funzione f, per ottenere $y = f(z)$:

  $z = x^2 - 2x$ e $y = \ln z = \ln(x^2 - 2x)$.

  La funzione $f \circ g:]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\to \mathbb{R}$ è $y = \ln(x^2 - 2x)$.
- Poiché la funzione g è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, la composizione $g \circ f$ si può sempre effettuare e il dominio della funzione $g \circ f$ coincide con quello di f, cioè $]0; +\infty[$. Per determinare $g \circ f$, applichiamo alla variabile x la funzione f, per ottenere $z = f(x)$, e a z la funzione g, per ottenere $y = g(z)$:

  $z = \ln x$ e $y = z^2 - 2z = \ln^2 x - 2 \ln x$.

  La funzione $g \circ f:]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ è $y = \ln^2 x - 2 \ln x$.

Date le seguenti funzioni f e g, determina $f \circ g$ e $g \circ f$ negli opportuni domini.

332 $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = 8x^3 - 8$. $\left[f \circ g = 2\sqrt[3]{x^3 - 1};\ g \circ f = 8x - 8\right]$

333 $f(x) = \frac{1}{4x^2}$; $g(x) = 4x^2$. $\left[f \circ g = \frac{1}{64x^4};\ g \circ f = \frac{1}{4x^4}\right]$

334 $f(x) = 2^x$; $g(x) = \sqrt{x} - 2$. $\left[f \circ g = 2^{\sqrt{x}-2};\ g \circ f = \sqrt{2^x} - 2\right]$

335 $f(x) = \ln 2x$; $g(x) = e^{-x}$. $\left[f \circ g = -x + \ln 2;\ g \circ f = \frac{1}{2x}\right]$

336 $f(x) = \sin 2x$; $g(x) = \sqrt{x} - 1$. $\left[f \circ g = \sin(2\sqrt{x} - 2);\ g \circ f = \sqrt{\sin 2x} - 1\right]$

337 Considera le funzioni $f(x) = \sqrt{x} + 3$ e $g(x) = \ln x + 1$. Verifica che $f \circ g \neq g \circ f$. Calcola poi $f \circ f^{-1}$ e $(f \circ g)^{-1}$.
$\left[f \circ f^{-1} = x;\ (f \circ g)^{-1} = e^{(x-3)^2 - 1}\right]$

338 Date le funzioni $f(x) = e^{x^2}$ e $g(x) = x + 2$, determina $h(x) = (f \circ g)(x)$ e risolvi la disequazione $h(x) \leq 1$. $[x = -2]$

339 Date le funzioni $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x - 3$, trova $f(x+1)$ e $g(x-1)$ e risolvi l'equazione:
$f[g(x)] = f(x+1) - g(x-1)$. $[x = 3]$

340 Date le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = x^2$:
a. determina $h = f \circ g$;
b. risolvi la disequazione $h(x) \leq f(2x)$.
$\left[\text{a) } f \circ g = \frac{x^2+1}{x^2};\ \text{b) } x \geq 2\right]$

341 Data $f(x) = \frac{ax+1}{x+b}$, trova a e b in modo che $f(1) = -2$ e $f(4) = \frac{5}{2}$. Verifica che f è invertibile, trova f^{-1} e verifica che $f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$. Determina poi la restrizione del dominio D' tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$.
$\left[a = 1;\ b = -2;\ f^{-1} = \frac{2x+1}{x-1};\ D' = \mathbb{R} - \{1, 2\}\right]$

342 Sono date le funzioni $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $g(x) = 2e^x$, $h(x) = \ln\sqrt{x}$. Determina $f \circ (g \circ h)$ e calcola $f \circ (g \circ h)(3)$. $\left[f \circ (g \circ h) = 2\sqrt{x+1};\ 4\right]$

ESERCIZI

343 Considera $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \frac{1}{2x+2}$.

a. Per quali x si ha $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

b. Risolvi l'equazione $(f \circ g)(x) + f(x) = -1$.

$\left[\text{a) } \nexists x \in \mathbb{R}\text{; b) } x = -\frac{1}{2} \vee x = 0\right]$

344 RIFLETTI SULLA TEORIA Se due funzioni f e g sono entrambe dispari, cosa puoi dire della loro composizione?

Problemi REALTÀ E MODELLI

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

Praline sopraffine

Valentino vuole preparare dei cioccolatini da regalare alla sua fidanzata. Ha degli stampini sferici di raggio 2 cm; la ricetta prevede che il volume di latte da utilizzare sia $\frac{1}{25}$ del volume totale dell'impasto.

Scrivi la funzione che fornisce a Valentino la quantità di latte in funzione del numero di cioccolatini che vuole preparare.

► **Esplicitiamo le funzioni che descrivono il problema.**

Chiamiamo V_L il volume di latte, V_T il volume totale dell'impasto. Allora $V_L = \frac{1}{25} V_T$.

Ricordiamo inoltre che la formula per ricavare il volume di una sfera a partire dal raggio è $V_S = \frac{4}{3} r^3 \pi$, quindi ciascuno dei cioccolatini di Valentino avrà un volume $V = \frac{4}{3} 2^3 \pi \text{ cm}^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$. Il volume totale dell'impasto per fare n cioccolatini sarà perciò $V_T = n \cdot \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$.

► **Scriviamo la funzione che lega n a V_L.**

Componendo le funzioni trovate al punto precedente otteniamo $V_L(n) = \frac{1}{25} V_T = \frac{1}{25}\left(n \cdot \frac{32}{3} \pi\right) = \frac{32\pi}{75} n \text{ cm}^3$.

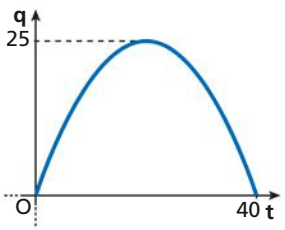
345 **I signori degli anelli** La misura italiana di un anello è data da un numero intero compreso tra 1 e 33. Damiano e Ilaria osservano che approssimativamente la misura I dell'anello si ottiene prendendo il numero intero che più si avvicina al valore ottenuto dalla funzione $I = \frac{29}{25} d^2 + \frac{137}{5} d - \frac{73}{2}$, dove d è il diametro del dito in cm. La misura USA, che indichiamo con U, si ottiene da quella italiana I con la relazione $U = \frac{3}{8} I + \frac{3}{2}$ (anche questa relazione è approssimata e per la misura consideriamo solo valori interi).

a. Sai esprimere la misura americana in funzione del diametro del dito?

b. Il dito di Damiano ha il diametro di 2,1 cm, quello di Ilaria di 1,5 cm. Quali sono le misure (italiana e americana) dei loro anelli?

$\left[\text{a) } U = \frac{87}{200} d^2 + \frac{411}{40} d - \frac{195}{16}\text{; b) } I_{\text{Damiano}} = 26, U_{\text{Damiano}} = 11, I_{\text{Ilaria}} = 7, U_{\text{Ilaria}} = 4\right]$

346 **Fiumi di agrumi** L'azienda agricola di Ingrid ed Emanuele vende marmellata di arance. La produttività q in kg di un albero di arance in funzione della sua età t in anni ha l'andamento della parabola in figura; il numero di barattoli di marmellata ottenuti è descritto invece dalla funzione $n = \frac{4}{25} q$.



a. Scrivi la funzione che esprime il numero di barattoli ottenuti da un albero in funzione della sua età.

b. Se Ingrid ed Emanuele hanno 300 alberi piantati tutti nello stesso momento, quale funzione descrive il numero di barattoli di marmellata che ottengono in funzione dell'età delle loro piante?

$\left[\text{a) } n(t) = -\frac{1}{100} t^2 + \frac{2}{5} t\text{; b) } n(t) = -3t^2 + 120t\right]$

TUTOR matematica Allenati con **15 esercizi interattivi** con feedback "hai sbagliato, perché…"
su.zanichelli.it/tutor3 risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con tutor

VERIFICA DELLE COMPETENZE ALLENAMENTO

ARGOMENTARE

1 ●○ Una funzione non crescente è sicuramente decrescente?
Giustifica la risposta e fai un esempio.

2 ●○ Una funzione pari può essere strettamente monotòna? Fai un esempio a sostegno della tua risposta e individua quale, tra le seguenti funzioni, è una funzione strettamente monotòna:

a. $y = x^2$; **c.** $y = x^3$;

b. $y = |\sin x|$; **d.** $y = |x|$.

3 ●○ Scrivi la definizione di funzione pari e fai un esempio. Una delle seguenti funzioni è pari, l'altra no. Spiega perché utilizzando la definizione.

a. $y = x^2 + 1$; **b.** $y = \sqrt{x+1}$.

4 ●○ Perché, se una funzione è iniettiva nel suo dominio, puoi trovare la sua inversa senza preoccuparti della suriettività?

5 ●● La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva? Fai un esempio a sostegno della tua risposta.

6 ●● Dimostra che, se una funzione f con dominio $\mathbb{R}$ è tale che $f(a+b) = f(a) + f(b)$, con a e b reali qualsiasi, il suo grafico passa per l'origine.
Quale delle funzioni $y = 7x$ e $y = x + 1$ gode della proprietà?

7 ●● La funzione $g(x) = \sqrt{\ln x}$ può essere l'inversa di una funzione f biunivoca su $\mathbb{R}$? Giustifica la risposta.

UTILIZZARE TECNICHE E PROCEDURE DI CALCOLO

TEST

8 ●○ Soltanto una delle seguenti funzioni è dispari. Quale?

A $y = \ln|x| + 5$ D $y = \sin 2x + x^2$

B $y = x^3 + x^2$ E $y = e^x + e^{-x}$

C $y = \sqrt[3]{x}$

9 ●○ La funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2| & \text{se } x \le 0 \\ -x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è crescente nell'intervallo:

A $]-\infty; -\sqrt{2}[$. D $]0; \sqrt{2}[$.

B $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$. E $]-\sqrt{2}; +\infty[$.

C $]-\sqrt{2}; 0[$.

10 ●○ VERO O FALSO?

a. La funzione $y = x^3 - \frac{2}{x} + 1$ è dispari. V F

b. Il periodo della funzione $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$ è $T = \frac{2}{3}\pi$. V F

c. La funzione $y = \frac{1}{\ln(x-1)}$ ha dominio $x > 1$. V F

d. Se $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, allora $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$. V F

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

11 ●○ $y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 1]$

12 ●○ $y = \frac{1}{(x-3)(2x-1)}$ $\left[x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq 3\right]$

13 ●○ $y = \frac{4x^2 - 1}{4x^2}$ $[x \neq 0]$

14 ●○ $y = \frac{1}{3x^2 - x - 2}$ $\left[x \neq -\frac{2}{3} \wedge x \neq 1\right]$

15 ●○ $y = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x-3}$ $\left[x \geq \frac{3}{4}\right]$

16 ●○ $y = \frac{2}{x^3 - 25x} + \sqrt{x-1}$ $[x \geq 1 \wedge x \neq 5]$

17 ●○ $y = \frac{x}{x^4 - 7x^2 + 12}$ $[x \neq \pm 2 \wedge x \neq \pm\sqrt{3}]$

18 ●○ $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ $[x < 0 \vee x > 2]$

VERIFICA DELLE COMPETENZE

19 $y = \dfrac{2x + 7x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$ $[x \neq 2]$

20 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}}$ $[x < -5 \vee x \geq 1]$

21 $y = \dfrac{\sqrt{(x-4)^2}}{x^2 - 5x + 6}$ $[x \neq 2 \wedge x \neq 3]$

22 $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{3x^2 - 5x - 2}}$ $\left[-\frac{1}{3} < x < 2 \vee x \geq 5\right]$

23 $y = \ln(2x^2 - 5x - 7)$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{7}{2}\right]$

24 $y = \ln(x^2 - 1) + \sqrt{x-1}$ $[x > 1]$

25 $y = \dfrac{\ln(2x-4)}{x^2 - 4x + 3}$ $[x > 2 \wedge x \neq 3]$

26 $y = \dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{|x|}$ $[-1 \leq x \leq 1 \wedge x \neq 0]$

27 $y = \dfrac{\ln(x+1)}{4^x - 8}$ $\left[x > -1 \wedge x \neq \frac{3}{2}\right]$

28 $y = \dfrac{1}{2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2}$ $[x \neq \pm 1]$

29 $y = \sqrt{e^{\frac{x-1}{x}} - 1}$ $[x < 0 \vee x \geq 1]$

30 $y = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $[x > 0]$

31 $y = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}$ $\left[2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

32 $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ $[x \leq 1 \vee x \geq 3]$

33 $y = \sqrt{2^{2x} - 2^x - 2} - \sqrt{2 - 2^x}$ $[x = 1]$

34 $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln(x^2 - 3)}$ $[x > \sqrt{3} \wedge x \neq 2]$

35 $y = \ln(2x + 9) - \sqrt{\ln(5x - 3)}$ $\left[x \geq \frac{4}{5}\right]$

36 $y = \sqrt{\dfrac{\ln(7x-3) - 1}{x+1}}$ $\left[x \geq \frac{e+3}{7}\right]$

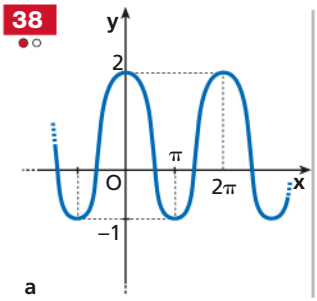
37 $y = \ln\left(\ln\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$ $\left[\frac{3}{2} < x < 4\right]$

ANALIZZARE E INTERPRETARE DATI E GRAFICI

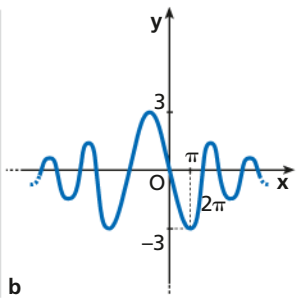
LEGGI IL GRAFICO **Per ognuna delle funzioni rappresentate nelle figure seguenti indica:**

a. il dominio; **b.** l'immagine; **c.** se è pari o dispari; **d.** se è monotòna; **e.** se è invertibile.

38

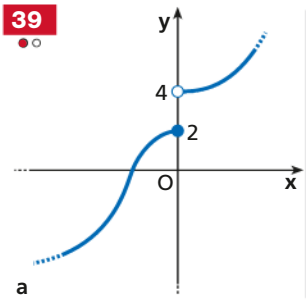


a

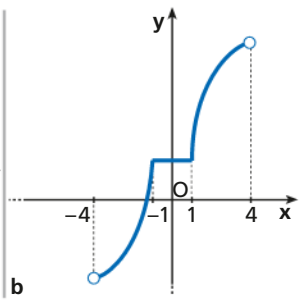


b

39



a



b

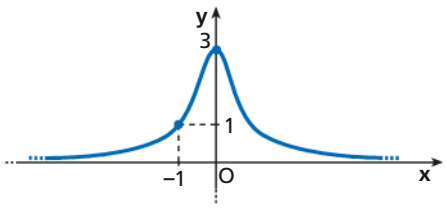
40 Disegna il grafico delle seguenti funzioni applicando le trasformazioni geometriche:

$y = |4 - x^2| + 2$; $y = |2\sin(-x)|$; $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$; $y = e^{x+4}$; $y = |\ln(x-2)|$.

41 Disegnato il grafico della funzione $y = \sqrt{x}$, rappresenta graficamente le funzioni $y = \sqrt{|x|}$, $y = 1 - \sqrt{x}$ e $y = |\sqrt{x} - 2|$. Per ciascuna indica il dominio, il codominio e il segno. Quale di esse è pari? Quale è dispari? Quale ammette inversa?

42 **LEGGI IL GRAFICO** L'equazione del grafico della funzione in figura è del tipo

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$



a. Trova a, b, c.

b. Indica il dominio e il codominio di $f(x)$.

c. Considera la restrizione della funzione per $x > 0$, trova l'espressione analitica della funzione inversa e disegnane il grafico.

$\left[\text{a) } a = \frac{2}{3}, b = 0, c = \frac{1}{3}\text{; b) } D\text{: } \mathbb{R}, C\text{: } 0 < y < 3\text{; c) } f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3}{2x} - \frac{1}{2}}\right]$

RISOLVERE PROBLEMI

43 Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$,

a. determina il dominio;

b. studia il segno;

c. calcola, se possibile, i seguenti valori:

$f(0)$, $f(-1)$, $f(4)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1-x)$.

[a) $D: x > 0$; b) $y > 0$ per $x > 1$;

c) non esiste; non esiste; $\frac{15}{2}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{1-x}}$]

44 Data la funzione $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{\ln x}}$,

a. determina il dominio;

b. studia il segno;

c. calcola, se possibile, i seguenti valori:

$f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(e)$, $f(x+4)$.

[a) $D: x > 1$; b) $y > 0$ per $x > 4$;

c) non esiste; non esiste; $e - 4$; $\frac{x}{\sqrt{\ln(x+4)}}$]

45 Date le funzioni $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^3 - 1$, determina $f \circ g$ e $g \circ f$. [$f \circ g = \ln(x^3 - 1)$; $g \circ f = \ln^3 x - 1$]

COSTRUIRE E UTILIZZARE MODELLI

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

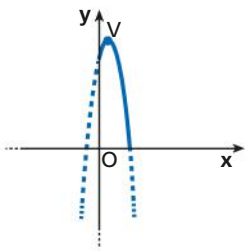
Un lancio adeguato

Una grande industria di biscotti programma la campagna pubblicitaria televisiva per il lancio di una nuova linea. I minuti dedicati agli spot in funzione dei giorni x trascorsi dall'inizio della campagna pubblicitaria seguono l'andamento della funzione $f(x) = -\frac{5}{12}x^2 + 10x + \frac{800}{3}$; il giorno in cui sarà messo in vendita il prodotto ci sarà il maggior tempo dedicato agli spot.

- Disegna il grafico di f e trova dominio e codominio, giustificandoli alla luce del modello che stai analizzando.
- Dopo quanti giorni dall'inizio della campagna sarà messo in vendita il prodotto? Dopo quanti giorni si concluderà la campagna?
- L'azienda decide di dedicare alla campagna 5 giorni in meno, anticipando l'immissione sul mercato ma mantenendo gli stessi minuti di pubblicità nei giorni precedenti e successivi. Che trasformazione devi applicare al grafico di f per descrivere la campagna? Scrivi l'equazione che descrive il nuovo modello.

► **Analizziamo f e gli adattamenti che subisce per descrivere il fenomeno.**

Il grafico di $f(x)$ è una parabola che assume il valore massimo nel vertice V di ordinata $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{980}{3}$.



Il dominio naturale di f è $\mathbb{R}$.

Nel nostro caso, però, x sono i giorni trascorsi e $f(x)$ i minuti al giorno dedicati allo spot, quindi ha senso considerare solo valori positivi o nulli per x e $f(x)$.
Pertanto, il dominio D è l'insieme dei valori di x tali che $x \geq 0 \wedge f(x) > 0$.

Risolvendo l'equazione $-\frac{5}{12}x^2 + 10x + \frac{800}{3} = 0$ troviamo l'intersezione (40; 0) con il semiasse positivo delle x.

Quindi D: $0 \leq x \leq 40$ e il codominio è $0 \leq y \leq \frac{980}{3}$.

VERIFICA DELLE COMPETENZE

► **Troviamo il giorno del lancio e la durata della campagna.**

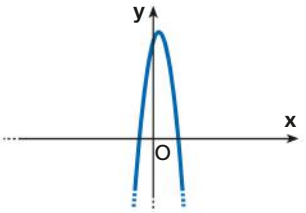
Il giorno del lancio corrisponde all'ascissa del vertice (quando $f(x)$ assume il valore massimo):

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 12.$$

La campagna si concluderà in corrispondenza dello zero che ha ascissa positiva. Risolviamo quindi l'equazione

$$-\frac{5}{12}x^2 + 10x + \frac{800}{3} = 0 \rightarrow 5x^2 - 120x - 3200 = 0 \rightarrow x^2 - 24x - 640 = 0 \rightarrow x = 12 \pm 28 \begin{cases} -16, & \text{non accettabile} \\ 40. \end{cases}$$

La campagna durerà quindi 40 giorni.

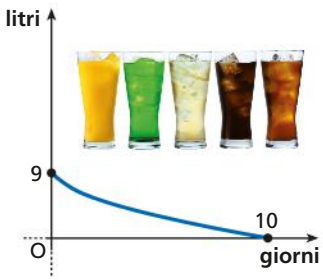


► **Cerchiamo il nuovo modello per descrivere la campagna.**

L'adattamento richiesto dall'azienda corrisponde a una traslazione di vettore $\vec{v}(-5; 0)$. Il grafico diventa quindi quello a lato, e l'equazione è

$$y = -\frac{5}{12}(x+5)^2 + 10(x+5) + \frac{800}{3} = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{35}{6}x + \frac{1225}{4}.$$

46 ●● **Bibita alla spina** Nel bar di Giulio all'inizio di un mese viene rifornito il contenitore di una bibita alla spina. Osservando il calo al passare dei giorni, Giulio vede che in 10 giorni il recipiente si svuota seguendo, in modo approssimato, l'andamento della funzione in figura, di equazione $y = a - \frac{18x}{bx+10}$, dove y è il contenuto in litri e x il tempo in giorni.



a. Trova a e b.

b. Se all'inizio del mese successivo vengono introdotti 6 litri di bibita in più, con un consumo giornaliero identico, in quanti giorni si svuoterà il contenitore?

c. Quanti litri è necessario introdurre all'inizio del mese per avere a disposizione la bibita per 30 giorni?

[a) $a = 9$; $b = 1$; b) 50; c) 13,5]

47 ●● **La concentrazione è fondamentale!** In un laboratorio si studia l'andamento di una reazione chimica che a partire dai reagenti A e B porta a ottenere il prodotto C.
La concentrazione dei reagenti nel tempo varia secondo le formule $C_A(t) = \frac{1}{4}e^{-t}$ e $C_B(t) = \frac{3}{4}e^{-t}$.

a. Disegna i grafici delle due funzioni. Sono funzioni monotòne?

b. Se $C_C(t)$ è la concentrazione del prodotto C al tempo t, secondo il principio di conservazione della massa di Lavoisier si ha

$$C_A(0) + C_B(0) + C_C(0) = C_A(t) + C_B(t) + C_C(t), \forall t \geq 0.$$

Se $C_C(0) = 0$, ricava l'equazione di $C_C(t)$ e disegna il suo grafico.

c. La funzione che ottieni è monotòna? Giustifica i risultati ottenuti riflettendo sul fenomeno che descrivono.

[b) $C_C(t) = 1 - e^{-t}$]

48 ●● **La diffusione dell'influenza** Un modello matematico prevede che il virus dell'influenza si diffonda all'interno di una popolazione di P persone con una velocità y (numero di nuovi casi giorno per giorno) proporzionale sia al numero x di persone che già hanno contratto la malattia, sia al numero di quelle che non sono state infettate.

a. Scrivi la legge della velocità di diffusione del virus in funzione di x.

b. Calcola il valore della costante di proporzionalità nell'ipotesi che, su un campione di 100 000 persone, 1750 siano ammalate il giovedì e, il venerdì, ci siano 370 nuovi casi.

c. Stima il numero di nuovi casi di infezione al sabato.

d. Mostra che (nell'ipotesi che la popolazione resti costante nel tempo) la velocità massima di diffusione si ha quando il numero di persone potenzialmente infette corrisponde alla metà della popolazione stessa. Il risultato appena trovato è valido in generale per P qualsiasi? [a) $y = kx(P - x)$; b) $k = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$; c) 457]

VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE

1 ora

PROVA A

1 Trova il dominio delle seguenti funzioni.

a. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3x - 4}$ **b.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + 5x^2 + 6x}}$ **c.** $y = \dfrac{x}{x \ln(x+2)}$

2 Determina dominio, zeri e segno della funzione $y = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 + 4x + 3}$. Evidenzia nel piano cartesiano le zone in cui la funzione è positiva.

3 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.

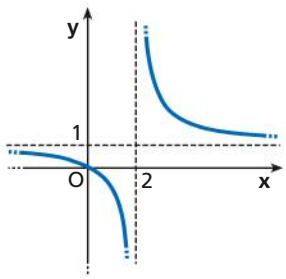
a. $y = 3x^3 - 2x$ è una funzione pari.

b. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$ è una funzione dispari.

c. $y = e^{-x+3}$ è una funzione crescente.

4 Spiega perché la funzione $y = \sqrt{x - 1}$ è invertibile. Determina la funzione inversa e disegna il suo grafico.

5 Considera la funzione $f(x)$ della figura.



a. Determina il dominio, l'immagine e indica se è monotòna, pari o dispari.

b. Se l'equazione è del tipo $f(x) = \dfrac{x + a}{x + b}$, trova a e b.

c. Indica se è invertibile e trova la funzione inversa algebricamente e graficamente.

6 Disegna i grafici delle seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche.

a. $y = -\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$ **b.** $y = -\sqrt{x - 5}$ **c.** $y = \log_2(x - 1)$

PROVA B

La crema di bellezza Un'azienda che produce cosmetici deve stabilire il prezzo di una nuova crema di bellezza. La funzione che individua il numero di confezioni di crema richieste ogni mese a un dato prezzo è $q = 240 - 0,1p^2$ (funzione della domanda).

a. Scrivi la funzione che determina il prezzo corrispondente al numero di confezioni richieste, indicando dominio e codominio.

b. Quante confezioni al mese potrebbe vendere l'azienda se il prezzo fosse quello suggerito dalla clientela, cioè non più di 26 euro?

c. Per vendere almeno 190 confezioni al mese, quale dovrebbe essere il prezzo massimo per ogni confezione?

TUTOR matematica
Allenati con **15 esercizi interattivi** con feedback "hai sbagliato, perché…"
su.zanichelli.it/tutor3 risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con tutor