
Comportamento quantistico



Questo capitolo è quasi del tutto uguale al cap. 37 del vol. 1.

1.1 Meccanica atomica

La «meccanica quantistica» è la descrizione del comportamento della materia e della luce in tutti i suoi dettagli e, in particolare, di ciò che avviene su scala atomica. Gli oggetti su scala molto piccola non si comportano come nessuna cosa di cui si possa avere diretta esperienza. Non si comportano come onde, non si comportano come particelle, non si comportano come nuvole, né come palle da biliardo, o come pesi attaccati a molle, o come qualsiasi altra cosa che mai possiate aver visto.

Newton pensava che la luce fosse composta da particelle, ma fu poi scoperto che essa si comporta come un'onda. In seguito, tuttavia (all'inizio del ventesimo secolo), fu trovato che in effetti la luce talvolta si comporta da particella. Per fare un altro esempio, una volta si pensava che l'elettrone si comportasse come una particella e si scoprì poi che, sotto molti aspetti, si comporta come un'onda. Cioè, in realtà, non si comporta in nessuno dei due modi. Ora abbiamo lasciato perdere. Diciamo: «*Non è né l'una né l'altra cosa*».

Fortunatamente c'è uno spiraglio: gli elettroni si comportano esattamente come la luce. Il comportamento quantistico degli oggetti atomici (elettroni, protoni, neutroni, fotoni e così via) è lo stesso per tutti, sono tutti «onde-particelle», o qualunque altro nome vi piaccia dare loro. Così ciò che apprendiamo sulle proprietà degli elettroni (che useremo nei nostri esempi) vale anche per tutte le altre «particelle», compresi i fotoni della luce.

Il graduale accumularsi di informazioni sul comportamento atomico e su scala microscopica durante il primo quarto del nostro secolo, che aveva dato qualche indicazione su come in realtà si comportano gli oggetti piccoli, ha generato uno stato di crescente confusione, superato poi nel 1926 e 1927 da Schrödinger, Heisenberg e Born, che sono riusciti a dare una descrizione coerente del comportamento della materia su scala microscopica. In questo capitolo considereremo i principali aspetti di tale descrizione.

Proprio perché il comportamento atomico è così diverso dalla comune esperienza, è assai difficile abituarcisi, ed esso appare strano e misterioso a chiunque, sia al principiante, sia al fisico ormai sperimentato. Perfino gli esperti non lo capiscono nel modo che essi desidererebbero, ed è assai ragionevole che non ci riescano, poiché tutto quanto riguarda la diretta esperienza e l'intuizione umana si riferisce a oggetti grandi. Sappiamo come si comportano gli oggetti grandi, ma quelli su piccola scala fanno altrimenti. Perciò, per apprendere ciò che riguarda questi ultimi, dobbiamo usare metodi più astratti e concettuali, piuttosto che cercare dei legami con la nostra diretta esperienza.

In questo capitolo affronteremo subito l'elemento essenziale di questo misterioso comportamento, in una delle sue forme che più colpiscono. Sceglieremo cioè un fenomeno che è impossibile, *assolutamente* impossibile, spiegare in forma classica, e che contiene in sé il cuore della meccanica quantistica. In effetti, questo fenomeno contiene l'*unico* mistero. Non possiamo eliminare il mistero «spiegando» come avviene. Ci limiteremo a *descrivere* come avviene; e nel far questo avremo descritto le principali caratteristiche della meccanica quantistica.

1.2 Un esperimento con pallottole

Per cercare di capire il comportamento quantistico degli elettroni, li metteremo a confronto, in una particolare situazione sperimentale, con particelle a noi più familiari, come per esempio dei piccoli proiettili, e poi anche con delle onde, per esempio come quelle che si formano sull'acqua. Consideriamo dapprima il comportamento dei proiettili nella situazione sperimentale mostrata schematicamente nella FIGURA 1.1.

C'è una mitragliatrice che spara raffiche di pallottole. Non è una mitragliatrice molto buona, perché sparge le pallottole (casualmente) su una regione angolare piuttosto grande, come è indicato in figura. Di fronte alla mitragliatrice c'è una parete (fatta da una piastra corazzata) in cui sono praticati due fori di dimensioni appena sufficienti a lasciar passare un proiettile. Dietro la parete c'è un tabellone (diciamo una spessa parete di legno) che «assorbe» i proiettili che lo colpiscono. Sul tabellone, di fronte alla parete coi fori, c'è un oggetto, che si potrebbe chiamare un «rilevatore» di pallottole. Potrebbe essere fatto con una scatola riempita di sabbia. Tutti i proiettili che entrano nel rilevatore vengono fermati e accumulati. Quando vogliamo, possiamo vuotare la scatola e contare i proiettili che contiene. Il rilevatore può essere spostato avanti e indietro (in quella che chiameremo la direzione x).

Con questo apparato, possiamo trovare sperimentalmente la risposta alla domanda: «Qual è la probabilità che un proiettile che passa attraverso i fori sulla parete arrivi sul tabellone a una distanza x dal centro?». Prima di tutto, notate che dobbiamo parlare di probabilità, perché non possiamo dire con precisione dove andrà a finire un particolare proiettile. Una pallottola che infili uno dei fori può rimbalzare sulla parete del foro e finire chissà dove. La «probabilità» a cui ci riferiamo, cioè quella che un proiettile giunga al rilevatore, è quella grandezza che misuriamo contando il numero dei proiettili che arrivano sul rilevatore in un certo tempo e poi facendo il rapporto tra questo numero e il numero *totale* di proiettili che urtano il tabellone durante quell'intervallo di tempo. O anche, se si suppone che la mitragliatrice spari sempre con lo stesso ritmo durante le misure, la probabilità che cerchiamo è semplicemente proporzionale al numero di proiettili che arrivano al rilevatore in un certo intervallo di tempo prefissato.

Per quel che ora ci interessa possiamo immaginare un esperimento un po' più idealizzato, in cui i proiettili non siano delle pallottole reali, ma siano *indistruttibili*, cioè non possano spezzarsi in due. Nel nostro esperimento supponiamo che ogni pallottola sia un blocco indivisibile e che nel rilevatore ci siano sempre pallottole intere. Se il ritmo con cui spara la mitragliatrice viene molto diminuito, troviamo che a ogni dato istante al tabellone o non arriva nulla, oppure vi arriva una pallottola, una soltanto ed esattamente una. Inoltre, le dimensioni dei blocchi non dipendono certamente dal ritmo con cui la mitragliatrice spara. Diciamo quindi: «I proiettili arrivano *sempre* a blocchi identici e distinti». Ciò che misuriamo con il nostro rilevatore è la probabilità di arrivo di uno di tali blocchi. E questa probabilità la misuriamo in funzione di x .

Il risultato di queste misure con il nostro apparecchio (l'esperimento non l'abbiamo ancora fatto, quindi noi stiamo in realtà immaginando il risultato) è riportato in grafico nella FIGURA 1.1c.

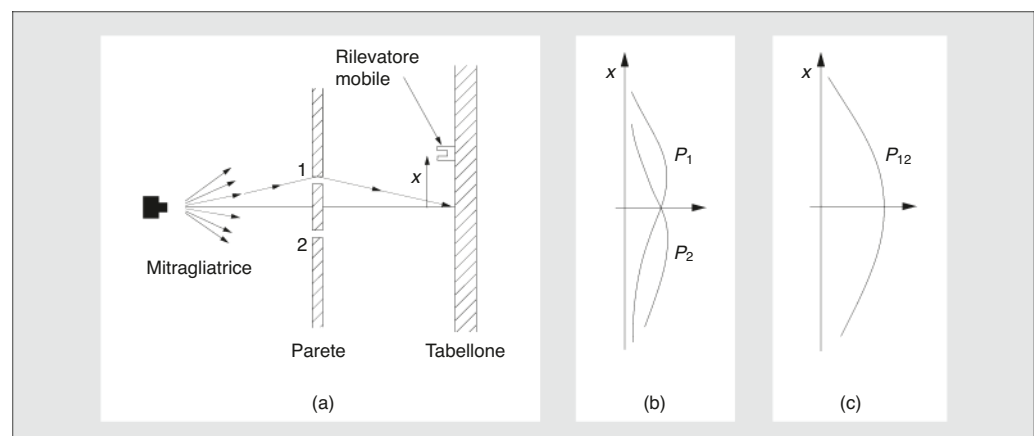


FIGURA 1.1 Esperimento di interferenza con pallottole.
Nella figura (c) si ha:
 $P_{12} = P_1 + P_2$.

Nel grafico la probabilità viene riportata alla destra di x , verticalmente, cosicché l'asse x è in corrispondenza con la sezione dell'apparato. Indichiamo la probabilità con P_{12} perché i proiettili possono provenire sia dal foro 1 sia dal foro 2. Non c'è da meravigliarsi che P_{12} sia grande vicino al centro del grafico, ma diventi piccola quando x è molto grande. Può tuttavia sorprendere che P_{12} abbia il suo valore massimo in $x = 0$. Possiamo capire questo fatto ripetendo il nostro esperimento dopo aver chiuso il foro 2, e un'altra volta ancora chiudendo invece il foro 1. Quando il foro 2 è chiuso i proiettili possono passare solo attraverso il foro 1, e si ottiene la curva segnata con P_1 nella FIGURA 1.1b. Com'era prevedibile il massimo di P_1 si ha per quel valore di x che giace sulla retta congiungente la mitragliatrice e il foro 1. Quando è il foro 1 a essere chiuso, otteniamo la curva P_2 , simmetrica alla precedente, disegnata in figura. P_2 è la distribuzione di probabilità per i proiettili che passano attraverso il foro 2. Dal confronto delle FIGURE 1.1b e 1.1c, si deduce l'importante risultato:

$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad (1.1)$$

Le probabilità vanno semplicemente sommate. L'effetto con entrambi i fori aperti è la somma degli effetti che si hanno quando è aperto solo uno dei fori. Indicheremo questo risultato dicendo che «*non si osserva interferenza*», per ragioni che appariranno chiare in seguito. E ciò basta per i proiettili. Arrivano interi e la loro probabilità di arrivo non presenta interferenza.

1.3 Un esperimento con onde

Vogliamo ora considerare un esperimento con onde prodotte nell'acqua. L'apparato è mostrato schematicamente nella FIGURA 1.2. C'è un contenitore d'acqua, poco profondo. Un piccolo oggetto, indicato come «sorgente di onde», viene fatto muovere su e giù da un motore e produce onde circolari. Alla destra della sorgente abbiamo ancora una parete con due fori, e dietro c'è una seconda parete che, per semplificare le cose, consideriamo un perfetto «assorbitore», di modo che non si produce la riflessione delle onde che vi incidono. Si può ottenere questo risultato costruendo una «spiaggia» di sabbia in leggero declivio. Davanti alla spiaggia mettiamo un rilevatore che può essere spostato avanti e indietro in direzione x , come prima. In questo caso il rilevatore è un congegno che misura l'«intensità» del moto ondoso. Si può pensare a un apparecchio che misuri l'altezza del moto ondoso, con una scala calibrata con i *quadrati* dell'altezza effettiva, cosicché la lettura risulti proporzionale all'intensità dell'onda. Il nostro rilevatore registra quindi un qualcosa che è proporzionale all'energia portata dall'onda o piuttosto all'*energia* che giunge al rilevatore per unità di tempo.

Quel che si può notare per prima cosa, con il nostro apparato, è che l'intensità può avere *qualsiasi* valore. Se la sorgente si muove molto poco, c'è appena un leggero moto ondoso al rilevatore; quando aumenta il moto della sorgente, viene rivelata una maggiore intensità delle onde. L'intensità dell'onda può assumere qualsiasi valore. *Non* si può certo dire che l'intensità dell'onda abbia una struttura in qualche modo «a blocchi».

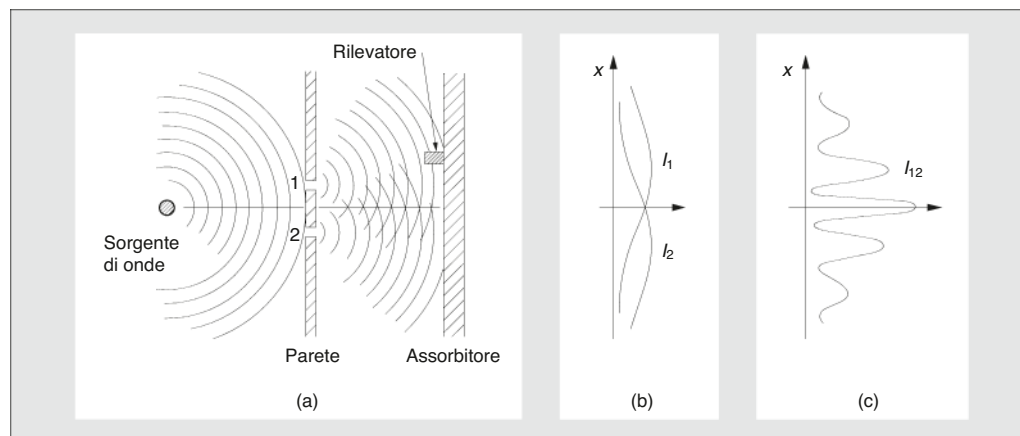


FIGURA 1.2 Esperimento di interferenza con onde d'acqua.

Nella figura (b) si ha:

$$I_1 = |h_1|^2$$

$$I_2 = |h_2|^2.$$

Nella figura (c) si ha:

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2.$$

Misuriamo ora l'intensità dell'onda per vari valori di x (mantenendo costante il moto della sorgente delle onde). Otteniamo la curva, assai interessante, segnata con I_{12} nella FIGURA 1.2c.

Abbiamo già visto come abbiano origine simili curve studiando l'interferenza di onde elettriche nel volume 1. In questo caso osserviamo che l'onda originale viene diffratta attraverso i fori, e che nuove onde circolari si diffondono da ciascun foro. Se chiudiamo un foro alla volta e misuriamo la distribuzione d'intensità sull'assorbitore troviamo le curve d'intensità, piuttosto semplici, che sono riportate nella FIGURA 1.2b. I_1 è l'intensità dell'onda proveniente dal foro 1 (intensità che determiniamo effettuando le misure quando il foro 2 è chiuso) e I_2 è l'intensità proveniente dal foro 2 (quando il foro 1 è chiuso).

L'intensità I_{12} , osservata quando entrambi i fori sono aperti, certamente *non* è la somma di I_1 e I_2 . Diciamo allora che si ha «interferenza» tra le due onde. In certi punti (cioè dove la curva I_{12} ha i suoi massimi) le onde sono «in fase» e i picchi delle onde si sommano, dando luogo a una grande ampiezza e, quindi, a una grande intensità. Diremo che nei punti suddetti si ha un'«interferenza costruttiva» tra le due onde. Si avrà interferenza costruttiva in tutti i punti dove la differenza delle distanze del rivelatore dai due fori è uguale a un numero intero di lunghezze d'onda.

Nei punti in cui le onde arrivano al rivelatore con una differenza di fase di π (cioè dove sono «fuori fase»), il moto ondoso che ne risulterà sarà dato dalla differenza delle due ampiezze. Si ha qui un'«interferenza distruttiva», e l'intensità dell'onda ne risulta diminuita. Si può prevedere che questi piccoli valori d'intensità abbiano luogo nei punti in cui la distanza del rivelatore dal foro 1 differisca dalla distanza dal foro 2 di un numero dispari di mezze lunghezze d'onda. I piccoli valori di I_{12} nella FIGURA 1.2 corrispondono ai punti in cui si ha interferenza distruttiva tra le onde.

Ricorderete che la relazione quantitativa tra I_1 , I_2 e I_{12} può essere espressa come segue: l'altezza istantanea al rivelatore dell'onda proveniente dal foro 1 può essere scritta come (la parte reale di) $h_1 e^{i\omega t}$, dove l'«ampiezza» h_1 è, in generale, un numero complesso. L'intensità è proporzionale all'ampiezza quadratica media, cioè, visto che stiamo usando numeri complessi, al modulo quadrato $|h_1|^2$. Analogamente, per il foro 2, l'altezza è $h_2 e^{i\omega t}$ e l'intensità è proporzionale a $|h_2|^2$. Quando entrambi i fori sono aperti, le altezze singole si sommano dando luogo all'altezza complessiva $(h_1 + h_2)e^{i\omega t}$ e all'intensità $|h_1 + h_2|^2$. Tralasciando la costante di proporzionalità che non interessa per i nostri scopi, le relazioni corrette per *onde che interferiscono* sono

$$\begin{aligned} I_1 &= |h_1|^2 \\ I_2 &= |h_2|^2 \\ I_{12} &= |h_1 + h_2|^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Noterete che il risultato è completamente diverso da quello ottenuto con i proiettili (equazione (1.1)). Se sviluppiamo $|h_1 + h_2|^2$ troviamo che

$$|h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2|h_1||h_2|\cos\delta \quad (1.3)$$

dove δ è la differenza di fase tra h_1 e h_2 . In funzione delle intensità si può scrivere

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta \quad (1.4)$$

L'ultimo termine nella (1.4) è il «termine d'interferenza». E ciò basti per le onde. L'intensità può avere un qualsiasi valore e presenta interferenza.

1.4 Un esperimento con elettroni

Immaginiamo ora di fare un esperimento simile ai precedenti, ma facendo uso di elettroni, com'è mostrato schematicamente nella FIGURA 1.3. C'è un cannone elettronico formato da un filo di tungsteno riscaldato elettricamente e circondato da un involucro metallico provvisto di un foro.

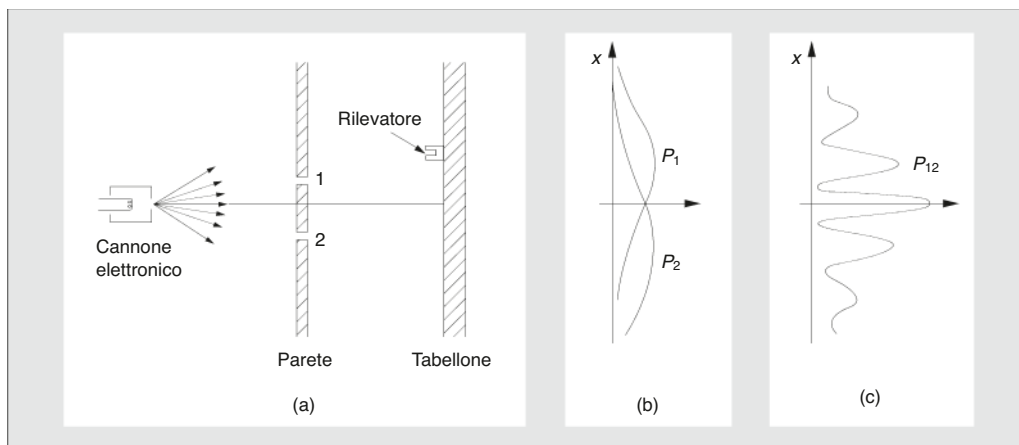


FIGURA 1.3 Esperimento di interferenza con elettroni.

Nella figura (b) si ha:

$$P_1 = |\phi_1|^2$$

$$P_2 = |\phi_2|^2.$$

Nella figura (c) si ha:

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2.$$

Se il filo è mantenuto a una tensione negativa rispetto all'involucro, gli elettroni emessi dal filo verranno accelerati verso le pareti e alcuni di essi usciranno dal foro.

Tutti gli elettroni che escono dal cannone avranno (all'incirca) la stessa energia. Di fronte al cannone vi è di nuovo una parete (per esempio una sottile lastra metallica) in cui sono praticati due fori. Dietro la parete vi è un'altra lastra che ha la funzione di arrestare gli elettroni. Davanti a questa lastra collochiamo un rivelatore mobile. Quest'ultimo potrebbe essere un contatore Geiger o, forse meglio, un moltiplicatore di elettroni collegato con un altoparlante.

Vi avvertiamo subito di non cercare di montare questo esperimento (come invece avreste potuto fare con i due che abbiamo già descritto). Questo esperimento non è mai stato fatto in questo modo. Il guaio sta nel fatto che, per rivelare gli effetti che ci interessano, l'apparato dovrebbe essere costruito su una scala talmente piccola da rendere impossibile la cosa. Noi stiamo quindi compiendo un «esperimento concettuale» e lo abbiamo impostato così perché è facile ragionarci su. Noi sappiamo quali sono i risultati che *si otterrebbero*, perché *sono stati fatti* molti esperimenti in cui la scala e le proporzioni erano state scelte in modo da mettere in luce gli effetti che ora descriveremo.

La prima cosa che notiamo nel nostro esperimento con elettroni è che si sentono dei «click» ben staccati nel rivelatore (cioè nell'altoparlante). E che tutti i «click» sono uguali: *non* ci sono «mezzi click».

Ci accorgiamo anche che i «click» arrivano in modo irregolare. Qualcosa come: click... click-click... click... click... click... click-click... click... ecc., così come avrete certamente udito fare da un contatore Geiger in funzione. Se contiamo i click che arrivano in un tempo sufficientemente lungo – diciamo parecchi minuti – e poi li ricontiamo per un altro periodo di tempo uguale, troviamo che i due numeri ottenuti sono assai vicini. Possiamo dunque parlare di una *frequenza media* con cui i click sono uditi (tanti click per minuto, in media).

Se muoviamo il rivelatore, il *ritmo* con cui arrivano i click risulta più veloce o più lento, ma la grandezza (intensità) di ciascun click è sempre la stessa. Se abbassiamo la temperatura del filo nel cannone elettronico, il ritmo dei click diminuisce, ma il suono di ciascun click rimane lo stesso. Infine, ponendo due diversi rivelatori sullo schermo in fondo, notiamo che il solito click viene emesso da uno *oppure* dall'altro dei due, ma mai contemporaneamente. (Eccetto che una volta tanto, quando due click sono emessi in tempi assai vicini, cosicché il nostro orecchio non ne avverte la separazione.) Concludiamo, perciò, che quel che arriva al rivelatore, qualunque cosa sia, arriva in «granuli». Tutti i «granuli» hanno le stesse dimensioni: i «granuli» arrivano tutti interi e uno alla volta. Diremo quindi: «Gli elettroni arrivano sempre in granuli, tutti identici tra loro».

Così come nel nostro esperimento con i proiettili, si può cercare ora di rispondere sperimentalmente alla domanda: «Qual è la probabilità relativa che un granulo elettronico arrivi sulla lastra di fondo a varie distanze x dal centro?». Come prima, otterremo la probabilità relativa facendo lavorare il cannone elettronico a ritmo costante. La probabilità che un granulo arrivi a un particolare valore di x è proporzionale al ritmo medio dei click, quando il rivelatore è nella posizione x .

Il risultato del nostro esperimento è la curva, assai interessante, segnata con P_{12} nella FIGURA 1.3c. Già! Gli elettroni fanno proprio così.

1.5 Interferenza delle onde elettroniche

Cerchiamo ora di analizzare la curva di FIGURA 1.3 per vedere se riusciamo a capire il comportamento degli elettroni. La prima cosa che vorremmo dire è che, poiché quel che arriva sono dei granuli, ciascun granulo, che in fondo potremmo anche chiamare elettrone, è passato attraverso il foro 1 oppure attraverso il foro 2. Scriviamo tutto ciò sotto forma di una «Proposizione»:

Proposizione A: Ciascun elettrone o attraversa il foro 1 oppure attraversa il foro 2.

Ammettendo la Proposizione A, tutti gli elettroni che arrivano alla lastra di fondo possono venire suddivisi in due classi: (1) quelli che ci sono arrivati passando per il foro 1 e (2) quelli arrivati attraverso il foro 2. Allora la nostra curva deve essere la somma degli effetti degli elettroni venuti dal foro 1 e degli elettroni venuti dal foro 2. Controlliamo quest'idea con un esperimento. Per prima cosa faremo una misura con gli elettroni che vengono dal foro 1. Chiudiamo il foro 2 e contiamo i click al rivelatore. Da questa misura ricaviamo P_1 . Il risultato è mostrato dalla curva segnata con P_1 nella FIGURA 1.3b. Tale risultato è assai ragionevole. In maniera analoga, misuriamo P_2 , distribuzione di probabilità per gli elettroni che provengono dal foro 2. Anche il risultato di tale misura è riportato in figura.

Il risultato P_{12} ottenuto con *entrambi* i fori aperti non è certo la somma di P_1 e P_2 , le probabilità per ciascun foro soltanto. In analogia con il nostro esperimento con le onde diciamo: «C'è interferenza».

$$\text{Per gli elettroni: } P_{12} \neq P_1 + P_2 \quad (1.5)$$

Ma da dove sbuca questa interferenza? Forse si potrebbe dire: «Bene, questo probabilmente significa che *non è vero* che i granuli passano attraverso l'uno o l'altro dei fori 1 e 2, perché, se così fosse, le probabilità si sommerebbero. Forse vanno in modo più complicato. Si dividono a metà e...». Ma no! Non possono farlo, arrivano sempre tutti interi... «Allora, forse qualcuno passa attraverso il foro 1, poi anche attraverso il foro 2 e così via per un po' di volte, oppure fanno qualche altra strada complicata... cosicché, chiudendo il foro 2, abbiamo alterato la probabilità di arrivo sul fondo degli elettroni che *avevano attraversato* il foro 1...» Ma attenti! Vi sono alcuni punti in cui arrivano pochi elettroni quando sono aperti *tutti e due* i fori, ma che ricevono molti elettroni se chiudiamo uno dei fori, cosicché la *chiusura* di un foro *aumenta* il numero di elettroni proveniente dall'altro. Notate, poi, che al centro della curva, P_{12} è maggiore del doppio di $P_1 + P_2$. È come se la chiusura di un foro *diminuisse* il numero di elettroni che escono dall'altro. Sembra assai difficile spiegare *entrambi* questi effetti, proponendo che gli elettroni viaggino per cammini complicati.

Tutto è assai misterioso. E più ci pensate, più misterioso diventa. Si sono rimuginate molte idee per cercare di spiegare la curva P_{12} pensando ai singoli elettroni che se ne vanno in modo complicato attraverso i fori. Ma nessuna di esse ha avuto successo. Nessuna può rendere conto della curva P_{12} a partire da P_1 e P_2 .

Quel che è abbastanza sorprendente è che la *matematica*, che serve per collegare P_1 e P_2 a P_{12} , è estremamente semplice. Perché P_{12} è proprio una curva come I_{12} di FIGURA 1.2, e quel caso era semplice. Quel che succede sulla lastra di fondo può essere descritto da due numeri complessi, che chiameremo ϕ_1 e ϕ_2 (che sono, naturalmente, funzioni di x). Il modulo quadrato di ϕ_1 ci dà l'effetto col solo foro 1 aperto. Cioè, $P_1 = |\phi_1|^2$. Allo stesso modo l'effetto col solo foro 2 aperto è dato da ϕ_2 . Cioè, $P_2 = |\phi_2|^2$. L'effetto combinato dei due fori è perciò

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

La *matematica* è proprio quella che avevamo con le onde! (È difficile vedere come uno possa ottenere un così semplice risultato da un complicato gioco di elettroni che se ne vanno avanti e indietro attraverso la lastra lungo strane traiettorie.)

Conclusione: gli elettroni arrivano in «granuli», come delle particelle, e la loro probabilità di arrivo varia con la distribuzione d'intensità propria di un'onda. È in questo senso che gli elettroni si comportano «talvolta come una particella e talvolta come un'onda».

Tra l'altro, trattando le onde classicamente, avevamo definito l'intensità come la media nel tempo del quadrato dell'ampiezza dell'onda, e avevamo usato i numeri complessi come espediente matematico per semplificarne l'analisi. In meccanica quantistica risulta invece che le ampiezze *devono* essere rappresentate da numeri complessi. Le parti reali non bastano. Questa per il momento è soltanto una nota tecnica, visto che le formule appaiono le stesse.

Poiché la probabilità di arrivo attraverso i due fori si ottiene in modo così semplice, anche se non è uguale a $P_1 + P_2$, questo è in realtà tutto quello che c'è da dire. Ma c'è un gran numero di sottigliezze che sono connesse con questo modo di comportarsi della natura. Ora vi illustreremo alcune di queste sottigliezze. Primo, poiché il numero di elettroni che arriva in un particolare punto *non* è uguale al numero di elettroni che arrivano passando dal foro 1 più quelli che passano dal foro 2, così come avemmo concluso a partire dalla Proposizione A, senza dubbio, dovremmo concludere che la *Proposizione A è falsa*. Non è vero che gli elettroni passano attraverso *l'uno o l'altro* dei fori 1 e 2. Ma questa conclusione deve essere provata da un altro esperimento.

1.6 Osservazione degli elettroni

Faremo ora il seguente esperimento. Aggiungiamo al nostro apparato elettronico una sorgente di luce molto intensa, posta dietro lo schermo a metà tra i due fori, com'è mostrato nella FIGURA 1.4. Sappiamo che le cariche elettriche diffondono la luce. Cosicché quando un elettrone riesce in un modo qualsiasi a oltrepassare lo schermo, prima di raggiungere il rivelatore devierà verso il nostro occhio della luce e potremo *vedere* il cammino dell'elettrone stesso. Per esempio, se l'elettrone passa attraverso il foro 2, seguendo la traiettoria disegnata nella FIGURA 1.4, dovremmo vedere un lampo di luce proveniente dalle vicinanze del punto A in figura. Se l'elettrone passa attraverso il foro 1, ci aspetteremmo di vedere invece un lampo nelle vicinanze del foro superiore. Se dovesse accadere di osservare luce da tutte e due le parti allo stesso tempo, è perché l'elettrone si divide a metà... Ma facciamo l'esperimento!

Ecco ciò che si vede: *ogni volta* che udiamo un «click» dal nostro rivelatore di elettroni (sulla parete di fondo), *vediamo anche* un lampo di luce vicino al foro 1 *oppure* al foro 2, *ma mai* tutti e due insieme! E otteniamo questo stesso risultato indipendentemente dalla posizione del rivelatore. Da quest'esperienza concludiamo che quando osserviamo gli elettroni troviamo che essi passano attraverso l'uno o l'altro dei fori. Sperimentalmente la Proposizione A è necessariamente vera.

Ma allora cosa c'è di sbagliato nel nostro ragionamento *contro* la Proposizione A? Perché P_{12} *non* è uguale a $P_1 + P_2$? Ritorniamo all'esperienza! Ricostruiamo il cammino degli elettroni e scopriamo ciò che fanno. Per ogni posizione (sull'asse x) del rivelatore contiamo gli elettroni che arrivano e registriamo *anche* il foro attraverso il quale sono passati, osservando i lampi di luce. Possiamo procedere in questo modo: ogni volta che udiamo un «click» facciamo un segno

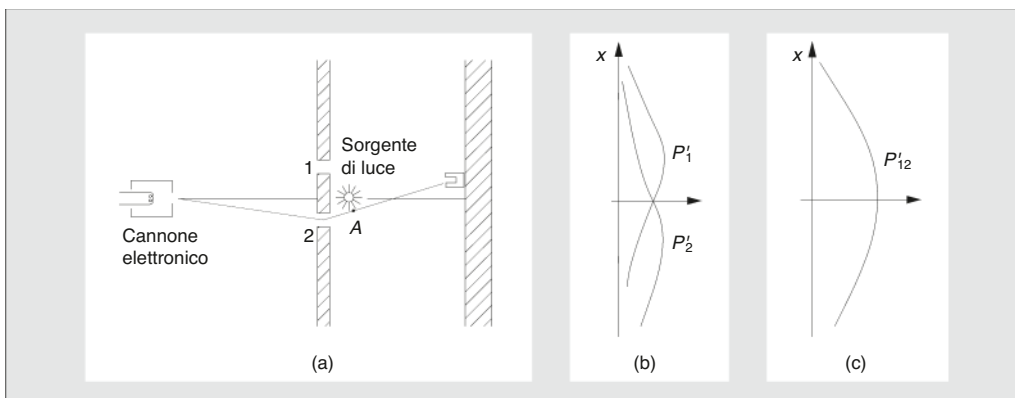


FIGURA 1.4 Un diverso esperimento con elettroni. Nella figura (c) si ha: $P_{12} = P_1 + P_2$.

nella colonna 1 se vediamo il lampo vicino al foro 1, mentre se questo appare in prossimità del foro 2, lo annotiamo nella colonna 2. Tutti gli elettroni che arrivano sono registrati in due classi: quelli che sono giunti attraverso 1 e quelli che sono giunti attraverso 2. Dal numero riportato nella colonna 1 ricaviamo la probabilità P'_1 che un elettrone arrivi al rivelatore attraverso il foro 1; dal numero riportato nella colonna 2 ricaviamo la probabilità P'_2 che un elettrone arrivi al rivelatore attraverso il foro 2. Se ora ripetiamo queste misure per molti valori di x , otteniamo per P'_1 e P'_2 le curve mostrate nella FIGURA 1.4b.

Orbene, ciò non è molto sorprendente! Otteniamo per P'_1 qualcosa di molto simile a ciò che si era ottenuto prima per P_1 chiudendo il foro 2; mentre P'_2 è molto simile a quello che si era ottenuto chiudendo il foro 1. Dunque *non c'è* niente di complicato come il passare attraverso tutti e due i fori. Quando li osserviamo, gli elettroni arrivano proprio come ci aspettavamo che arrivassero. Sia che i fori siano aperti o chiusi, quelli che vediamo arrivare attraverso il foro 1 sono distribuiti nello stesso modo, indipendentemente dalla situazione del foro 2.

Ma un momento! Cosa otteniamo *ora* per la probabilità *totale*, cioè la probabilità che un elettrone arrivi al rivelatore con un cammino qualsiasi? Noi conosciamo già questo risultato. Basta fingere di non avere mai osservato i lampi di luce, e sommare insieme i conteggi del rivelatore che avevamo separato nelle due colonne. *Dobbiamo semplicemente sommare* i numeri. Per la probabilità che un elettrone giunga sulla parete di fondo passando attraverso un foro *qualsiasi*, troviamo

$$P'_{12} = P_1 + P_2$$

Così, pur essendo riusciti a osservare attraverso quale dei fori passano i nostri elettroni, non otteniamo più la vecchia curva d'interferenza P_{12} , ma una nuova, P'_{12} , che non mostra traccia di interferenza! Se si spegne la luce si ritrova P_{12} .

Dobbiamo concludere che la distribuzione degli elettroni sullo schermo *quando li osserviamo* è diversa da quella ottenuta quando non li osserviamo. Che sia l'accensione della sorgente di luce che disturba le cose? Deve essere il fatto che gli elettroni sono molto delicati, e la luce, nell'essere diffusa dagli elettroni, dà loro un colpo che ne fa mutare il movimento. Sappiamo che il campo elettrico della luce, agendo su di una carica, esercita una forza su di essa. Forse ci *dovrebbe* effettivamente essere una differenza nel moto. A ogni modo, la luce esercita una grande influenza sugli elettroni. Tentando di «guardare» gli elettroni ne abbiamo cambiato il movimento. Precisamente, l'urto subito dall'elettrone nel deviare il fotone, ne modifica talmente il moto, da far sì che l'elettrone, che sarebbe andato a finire dove la curva P_{12} ha un massimo, si posi invece dove P_{12} ha un minimo; per questo non vediamo più gli effetti ondulatori d'interferenza.

Voi starete pensando: «Non usare una sorgente così forte! Abbassa la luce! Le onde luminose saranno così più deboli e non disturberanno tanto gli elettroni. Rendendo sempre più fiavole la luce, alla fine le onde saranno certo abbastanza deboli da avere un effetto trascurabile». Benissimo. Proviamo. La prima cosa che si osserva è che i lampi di luce diffusi dagli elettroni al loro passaggio *non* diventano più deboli. *I lampi sono sempre uguali*. L'unica differenza che si ottiene affievolendo la luce è che qualche volta udiamo un «click» del rivelatore, ma non vediamo *alcun lampo*. L'elettrone passa senza essere «visto». Ciò di cui ci stiamo rendendo conto è che *anche* la luce si comporta come gli elettroni; *sapevamo* che era «a onde», ma adesso troviamo che è anche «a corpuscoli». Essa arriva sempre – oppure è diffusa – in grani che chiamiamo «fotoni». Quando diminuiamo l'*intensità* della sorgente luminosa, non cambiamo le *dimensioni* dei fotoni, ma solo il *ritmo* con cui essi sono emessi. *Ciò* spiega perché, quando la nostra sorgente è debole, alcuni elettroni passano senza essere visti. È successo che non c'era un fotone mentre l'elettrone passava.

Questo è un po' scoraggiante. Se è vero che ogni volta che «vediamo» un elettrone, vediamo un lampo delle stesse dimensioni, allora gli elettroni che osserviamo sono *sempre* quelli disturbati. Tuttavia facciamo l'esperimento con una luce debole. Adesso ogni volta che udiamo un conteggio del rivelatore facciamo un segno in una di tre colonne: nella colonna (1) segniamo gli elettroni visti passare attraverso il foro 1, nella colonna (2) quelli visti attraverso il foro 2, e nella colonna (3) quelli che non sono stati visti affatto. Quando elaboriamo i nostri dati (calcolando le probabilità) troviamo questi risultati: quelli «visti attraverso il foro 1» hanno una distribuzione come P'_1 ; quelli «visti attraverso il foro 2» hanno una distribuzione come P'_2 (cosicché quelli «visti attraverso il

foro 1 oppure 2» hanno una distribuzione come P'_{12}); e quelli «non visti affatto» hanno una distribuzione «tipo onda» proprio come P_{12} di FIGURA 1.3! *Se gli elettroni non si vedono, si ha interferenza!*

Ciò è comprensibile. Quando non vediamo un elettrone, nessun fotone lo perturba, mentre quando lo vediamo, un fotone lo ha disturbato. Si ha sempre un'identica alterazione perché i fotoni di luce producono effetti di uguale entità e il risultato della diffusione dei fotoni è sufficiente a cancellare ogni effetto di interferenza.

Non c'è qualche modo di vedere gli elettroni senza disturbarli? Abbiamo imparato in un precedente capitolo che l'impulso trasportato da un «fotone» è inversamente proporzionale alla sua lunghezza d'onda ($p = h/\lambda$). Certamente la spinta che l'elettrone riceve, quando il fotone è diffuso verso il nostro occhio, dipende dall'impulso portato dal fotone. Aha! Se volevamo disturbare l'elettrone solo leggermente non avremmo dovuto abbassare l'intensità della luce, ma la sua frequenza (che è la stessa cosa che aumentare la sua lunghezza d'onda). Usiamo una luce più rossa. Potremmo anche usare luce infrarossa, o onde radio (come il radar), e «guardare» per dove passa l'elettrone con l'aiuto di qualche apparecchio capace di «vedere» luce di queste lunghezze d'onda maggiori. Se usiamo una luce più «delicata» forse riusciremo a non perturbare così tanto gli elettroni.

Rifacciamo l'esperienza con onde più lunghe. Seguiamo a ripetere il nostro esperimento, ogni volta con luce di maggiore lunghezza d'onda. Al principio, nulla sembra cambiare. I risultati sono gli stessi. Poi succede una cosa terribile. Vi ricorderete che quando abbiamo discusso il microscopio, abbiamo rilevato che, a causa della *natura ondulatoria* della luce, vi è una limitazione per la distanza minima di due punti affinché possano essere visti ancora come punti separati. Questa distanza è dell'ordine della lunghezza d'onda della luce. Così adesso, non appena rendiamo la lunghezza d'onda della luce maggiore della distanza dei nostri fori, vediamo un *grosso* lampo sfocato quando la luce è diffusa dagli elettroni. Non possiamo più dire attraverso quale foro è passato l'elettrone! Sappiamo solo che è passato da qualche parte! Ed è proprio con luce di questo colore che troviamo che le spinte ricevute dall'elettrone sono abbastanza piccole da rendere P'_{12} simile a P_{12} , cioè da cominciare a ottenere effetti di interferenza. Ed è solo per lunghezze d'onda molto maggiori della separazione dei due fori (allorché non abbiamo più alcuna possibilità di dire da dove è passato l'elettrone) che l'alterazione dovuta alla luce diviene abbastanza piccola da riottenere la curva P_{12} di FIGURA 1.3.

Con il nostro esperimento troviamo che è impossibile scegliere la luce in modo tale da poter dire attraverso quale foro è passato l'elettrone, e allo stesso tempo non perturbarne la distribuzione. Fu suggerito da Heisenberg che le allora nuove leggi della natura potevano risultare coerenti solo se esisteva una basilare limitazione nelle nostre possibilità sperimentali, non riconosciuta precedentemente. Egli propose, come principio generale, il suo *principio di indeterminazione*, che possiamo enunciare come segue riferendoci al nostro esperimento: «È impossibile costruire un apparato per determinare da quale foro è passato l'elettrone, e che allo stesso tempo non perturbi l'elettrone sufficientemente da distruggere l'interferenza». Se un apparecchio è capace di determinare da quale foro è passato l'elettrone, *non può* essere così delicato da non alterare in modo essenziale la figura d'interferenza. Nessuno ha mai trovato (né immaginato) un modo di sfuggire al principio di indeterminazione. Così noi dobbiamo ammettere che esso rappresenti una caratteristica fondamentale della natura.

L'intera teoria della meccanica quantistica che ora usiamo per descrivere gli atomi, e quindi tutta la materia, dipende dalla correttezza del principio di indeterminazione. Poiché la meccanica quantistica è una teoria che ha avuto così tanti successi, la nostra fiducia nel principio di indeterminazione è rafforzata. Ma se si dovesse scoprire un modo di «demolire» il principio di indeterminazione, la meccanica quantistica darebbe risultati incoerenti e non potrebbe più essere considerata come una valida teoria della natura.

«Ebbene», voi direte, «cosa ne è della Proposizione A? È vero, o *non* è vero, che l'elettrone passa o attraverso il foro 1 oppure attraverso il foro 2?». La sola risposta che si può dare è che l'esperienza c'insegna che per non incorrere in contraddizioni è necessario ragionare in un certo modo particolare. Ciò che dobbiamo dire (per evitare di fare predizioni errate) è quanto segue. Se si guardano i fori o, più precisamente, se si ha un apparato che è capace di determinare se gli elettroni passano attraverso il foro 1 o il foro 2, allora si *può* dire attraverso quale foro è passato

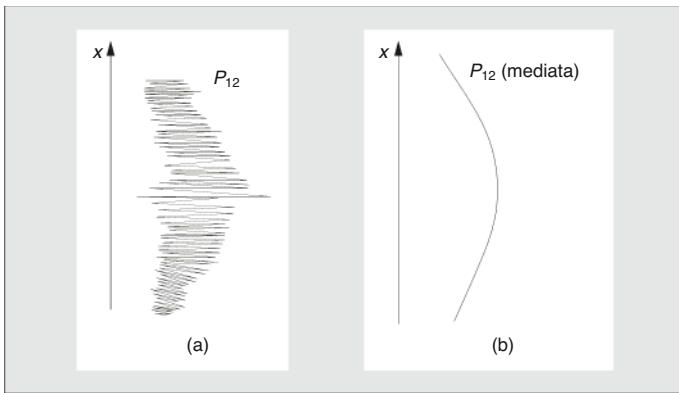


FIGURA 1.5 Figura di interferenza con proiettili: (a) effettiva (schematizzata), (b) osservata.

Perché non abbiamo visto frange d'interferenza in quel caso? Si trova che, per le pallottole, le lunghezze d'onda erano così piccole da rendere le frange d'interferenza molto sottili e fitte. Così fitte, in realtà, da non poter distinguere con alcun rilevatore di dimensioni finite i vari massimi e minimi. Quello che abbiamo osservato era solo una sorta di media, che è la curva classica. In FIGURA 1.5 abbiamo provato a indicare schematicamente ciò che accade con oggetti di grandi dimensioni. La FIGURA 1.5a mostra la distribuzione di probabilità per i proiettili come la si può calcolare dalla meccanica quantistica. Le rapide oscillazioni sono intese a rappresentare lo schema di interferenza che si ottiene per onde di lunghezza d'onda molto piccola. Ogni rilevatore fisicamente realizzabile, tuttavia, media diverse oscillazioni della curva di probabilità, di modo che la misura riproduce la curva continua disegnata nella FIGURA 1.5b.

1.7 Principi base della meccanica quantistica

Scriveremo adesso un sommario delle principali conclusioni dei nostri esperimenti. Porremo, tuttavia, i risultati in una forma che li rende veri per una classe più generale di tali esperienze. Possiamo stendere il nostro sommario più semplicemente se prima definiamo come «esperimento ideale» quello in cui non c'è alcuna influenza esterna imprecisata; cioè non deve esserci alcuna vibrazione o altro di cui non sappiamo tener conto. Per essere del tutto precisi bisognerebbe dire: «un esperimento ideale è un esperimento in cui tutte le condizioni iniziali e finali sono completamente specificate». Ciò che designeremo come un «evento» è, in generale, proprio un insieme particolare di condizioni iniziali e finali. (Per esempio: «un elettrone parte dalla sorgente, raggiunge il rilevatore, e non accade nient'altro».) E veniamo adesso al sommario.

Sommario

- 1 La probabilità di un evento in un esperimento ideale è data dal quadrato del modulo di un numero complesso ϕ che viene detto ampiezza di probabilità:

$$\begin{aligned} P &= \text{probabilità} \\ \phi &= \text{ampiezza di probabilità} \\ P &= |\phi|^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

- 2 Quando un evento può avvenire secondo varie alternative, l'ampiezza di probabilità per l'evento è la somma delle ampiezze di probabilità per le varie alternative considerate separatamente. Si ha perciò interferenza:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ P &= |\phi_1 + \phi_2|^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

ciascun elettrone. *Ma*, quando *non* si prova a determinare da che parte passa l'elettrone, quando non c'è niente nell'esperimento che perturbi l'elettrone, allora *non* si può dire se l'elettrone passa attraverso il foro 1 oppure il foro 2. Se si afferma ciò, e lo si prende come punto di partenza per una qualsiasi deduzione, si faranno degli errori nella propria analisi.

Questa, dal punto di vista logico, è la fune sulla quale dobbiamo camminare se vogliamo descrivere la natura con successo.

Se il moto di tutta la materia – come degli elettroni – deve essere descritto in termini di onde, cosa possiamo dire per i proiettili del nostro primo esperimento?

- 3 Se si effettua un esperimento capace di determinare se una o l'altra delle possibili alternative è effettivamente realizzata, la probabilità per l'evento è la somma delle probabilità per ciascuna delle alternative. Non si ha più interferenza:

$$P = P_1 + P_2 \quad (1.8)$$

Qualcuno potrebbe ancora domandare: «Come funziona tutto ciò? Qual è il meccanismo che sta dietro a questa legge?». Nessuno ha mai trovato un tale meccanismo. Nessuno può «spiegare» niente di più di quanto abbiamo «spiegato» noi. Nessuno vi saprà dare una rappresentazione più approfondita della situazione. Non abbiamo idea di un meccanismo più fondamentale da cui questi risultati possano essere dedotti.

Vogliamo sottolineare una differenza molto importante tra la meccanica classica e quella quantistica. Abbiamo parlato di probabilità che in una data situazione un elettrone arrivi. Abbiamo con ciò voluto implicare che con il nostro dispositivo sperimentale (anche con il migliore possibile) non siamo in grado di predire esattamente ciò che accadrà. Possiamo solo dare delle probabilità! Se ciò è vero, ne segue che la fisica deve rinunciare all'idea di voler prevedere esattamente ciò che accadrà in una data situazione. Sì! La fisica vi ha rinunciato. *Non sappiamo prevedere ciò che accadrà in una data situazione*, anzi adesso crediamo che ciò sia impossibile, e che l'unica cosa che siamo in grado di prevedere è la probabilità di eventi differenti. Si deve riconoscere che questo è un ripiegamento rispetto al nostro antico ideale di comprensione della natura. Può darsi che sia un passo indietro, ma nessuno ha trovato il modo di evitarlo.

Facciamo ora qualche considerazione su una proposta che è stata avanzata più volte per cercare di evitare la descrizione che abbiamo dato: «Forse l'elettrone ha qualche strano meccanismo dentro di sé, qualche variabile interna, che noi ancora non conosciamo. Forse questa è la ragione per cui non possiamo prevedere ciò che avverrà. Se potessimo guardare più da vicino l'elettrone, saremmo in grado di dire dove andrà a finire». Per quel che ne sappiamo, ciò è impossibile. Ci sarebbero ancora delle difficoltà. Supponiamo di essere portati ad assumere che dentro l'elettrone vi sia un qualche meccanismo che determini dove questo andrà a finire. Questo meccanismo deve *anche* fissare per quale foro esso andrà a passare nella sua traiettoria. Ma non dobbiamo dimenticare che ciò che è dentro l'elettrone non può dipendere da ciò che *noi* facciamo, e in particolare dal nostro aprire o chiudere uno dei fori. Perciò, se un elettrone, prima di partire, ha già deciso (a) quale foro userà e (b) dove andrà a finire, dovremmo trovare P_1 per quegli elettroni che hanno scelto il foro 1, P_2 per quelli che hanno scelto il foro 2, e necessariamente la somma $P_1 + P_2$ per quelli che arrivano attraverso i due fori. Non sembrano esistere altre alternative. Ma noi abbiamo verificato sperimentalmente che ciò non è vero. E nessuno è riuscito a immaginare una soluzione per questo enigma. Perciò oggi dobbiamo limitarci a calcolare probabilità. Diciamo «oggi», ma sospettiamo molto fortemente che questo stato di cose ci accompagnerà sempre, che sia impossibile risolvere questo enigma e che questo sia il vero *modo di essere* della natura.

1.8 Il principio di indeterminazione

La formulazione originale di Heisenberg del principio di indeterminazione è la seguente: se eseguendo la misura per un oggetto qualsiasi, si riesce a determinare la componente x del suo impulso con un'incertezza Δp , non si può, contemporaneamente, conoscere la sua coordinata x di posizione con una precisione Δx più accurata di

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p}$$

dove \hbar è un numero ben definito, dato dalla natura. Esso è detto «costante di Planck ridotta» ed è approssimativamente uguale a $1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s. In altre parole, se consideriamo le incertezze nella posizione e nell'impulso, in ogni istante il loro prodotto deve essere maggiore o uguale alla metà della costante di Planck ridotta:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

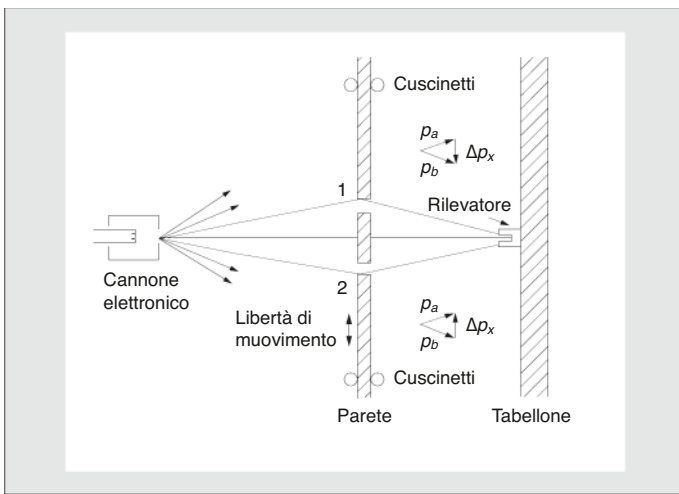


FIGURA 1.6 Esperimento nel quale si misura il rinculo della parete.

dobbiamo aspettare che un elettrone che passa per il foro 1 debba essere deflesso verso il basso dalla lamina per poter arrivare al rivelatore. Poiché la componente verticale dell'impulso dell'elettrone è variata, la lamina deve muoversi in direzione opposta con lo stesso impulso. La lamina riceverà quindi una spinta verso l'alto. Se invece l'elettrone passa attraverso il foro inferiore, la lamina dovrebbe subire una spinta verso il basso. È chiaro che per ogni posizione del rivelatore, l'impulso ricevuto dalla lamina avrà un valore differente a seconda che l'elettrone attraversi il foro 1 o il foro 2. Proprio così! Senza *per nulla* perturbare gli elettroni, ma solo osservando *la lamina*, possiamo determinare il percorso scelto dall'elettrone.

Ma per fare questo occorre conoscere l'impulso dello schermo, prima che l'elettrone lo attraversi. Cosicché, quando misuriamo l'impulso dopo il passaggio dell'elettrone, possiamo ricostruire di quanto è variato l'impulso della lamina. Ma ricordiamoci che, in base al principio di indeterminazione, non possiamo allo stesso tempo conoscere con una precisione arbitraria la posizione della lamina. Ma se non sappiamo esattamente *dove* sia la lamina, non sappiamo neppure dire con precisione dove siano i due fori. Essi saranno in diverse posizioni per ogni elettrone che li attraversa. Questo significa che il centro delle frange di interferenza avrà una posizione differente per i vari elettroni. Le oscillazioni del grafico di interferenza tenderanno ad appiattirsi. Dimosteremo quantitativamente nel prossimo capitolo che, se determiniamo l'impulso della lamina con precisione sufficiente a determinare, mediante l'osservazione del rimbalzo, quale foro è stato attraversato, allora l'incertezza sulla coordinata x della lamina sarà, secondo il principio di indeterminazione, sufficiente a fare oscillare su e giù lungo l'asse x le frange di interferenza osservate con il rivelatore, di un tratto circa uguale alla distanza da un massimo al minimo più prossimo. Un tale movimento, che avviene a caso, è giusto sufficiente a distruggere le oscillazioni del grafico e quindi a far sì che non si osservi più interferenza.

Il principio di indeterminazione «sta a difesa» della meccanica quantistica. Heisenberg riconobbe che, se fosse possibile misurare simultaneamente impulso e posizione con una maggiore accuratezza, la meccanica quantistica crollerebbe. Perciò avanzò l'ipotesi che fosse impossibile. Allora molti si misero a tavolino cercando di inventare maniere di farlo, ma nessuno ha mai trovato un modo di misurare la posizione e l'impulso di un oggetto qualsiasi – uno schermo, un elettrone, una palla da biliardo, o altro – con maggiore precisione. La meccanica quantistica continua la sua pericolosa ma tuttora giustificata esistenza.

Questo è un caso particolare del principio di indeterminazione che è stato formulato precedentemente in forma più generale. La formulazione più generale affermava che non si possono costruire apparecchi in grado di stabilire quale di due alternative è realizzata, senza, allo stesso tempo, distruggere le frange di interferenza.

Mostriamo in un caso particolare che il tipo di relazione data da Heisenberg deve essere valida al fine di evitare di trovarsi nei pasticci. Immaginiamo una modifica dell'esperimento di FIGURA 1.3, in cui lo schermo con i fori è costituito da una lamina montata su cuscinetti in modo da potersi muovere liberamente in su e in giù (in direzione dell'asse x), come è mostrato in FIGURA 1.6. Osservando attentamente il moto della lamina possiamo provare a determinare attraverso quale foro passa un elettrone. Immaginate infatti cosa accade quando il rivelatore è posto in $x = 0$. Ci

Relazione tra il punto di vista ondulatorio e quello corpuscolare

2

Questo capitolo è quasi del tutto uguale al cap. 38 del vol. 1.

2.1 Ampiezze d'onda di probabilità

In questo capitolo discuteremo la relazione tra il punto di vista ondulatorio e quello corpuscolare. Già sappiamo, dal precedente capitolo, che né la rappresentazione ondulatoria né quella corpuscolare sono corrette. A noi piacerebbe sempre poter presentare le cose esattamente, o almeno in forma abbastanza precisa da non doverle poi modificare quando ne sapremo di più: in modo da dover eventualmente fare delle generalizzazioni, ma non dei cambiamenti radicali! Ma i discorsi che si possono fare a proposito del punto di vista ondulatorio e di quello corpuscolare, che sono entrambi approssimativi, sono destinati a subire delle modifiche. Perciò quanto impareremo in questo capitolo non sarà, in un certo senso, del tutto giusto; faremo uso di ragionamenti semi-intuitivi che saranno resi più precisi in seguito. Ma alcune cose dovranno essere modificate un poco quando le inquadreremo correttamente nell'ambito della meccanica quantistica. Procediamo in questo modo perché voi abbiate una prima idea qualitativa di alcuni fenomeni quantistici prima di sviluppare i dettagli matematici della meccanica quantistica stessa. Inoltre, poiché tutte le nostre esperienze sono realizzate con onde e particelle, è più comodo, quando ancora non si conosce completamente il formalismo delle ampiezze quantistiche, procedere con i concetti ondulatori e corpuscolari per arrivare a una certa comprensione di ciò che accade in determinate circostanze. Lungo tutta l'esposizione cercheremo di indicare quali sono i punti deboli, ma la maggior parte di essa è quasi perfettamente corretta; si tratta semplicemente di una questione di interpretazione.

Anzitutto sappiamo che la novità della rappresentazione del mondo in meccanica quantistica, la nuova teoria, consiste nell'assegnare un'ampiezza a ogni evento possibile, e se l'evento riguarda l'arrivo di una particella, allora si può assegnare l'ampiezza relativa alla rivelazione di quella particella in punti diversi e a tempi diversi. La probabilità di trovare la particella è allora proporzionale al modulo quadrato dell'ampiezza. In generale, l'ampiezza di probabilità di rivelare una particella in punti diversi e a tempi diversi varia con la posizione e il tempo.

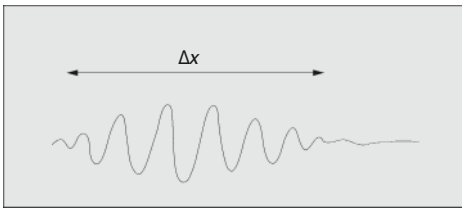
In qualche caso particolare può avvenire che l'ampiezza vari sinusoidalmente nello spazio e nel tempo come $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, dove \mathbf{r} è il vettore di posizione a partire da una data origine. (Non dimenticate che queste ampiezze sono numeri complessi, non reali.) Una tale ampiezza varia con frequenza ω e numero d'onda \mathbf{k} ben definiti. Si trova allora che questo caso corrisponde, nel limite classico, a una situazione in cui avremmo pensato di avere a che fare con una particella di energia E nota e legata alla frequenza dalla relazione

$$E = \hbar\omega \quad (2.1)$$

e di impulso \mathbf{p} anch'esso noto e correlato al numero d'onde da

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (2.2)$$

(Il simbolo \hbar rappresenta il numero h diviso per 2π : $\hbar = h/2\pi$.)

FIGURA 2.1 Pacchetto d'onde di lunghezza Δx .

Questo significa che il concetto di particella ha delle limitazioni. Il concetto di particella, ovvero la sua posizione, il suo impulso ecc., che usiamo così spesso, non è completamente soddisfacente. Per esempio, se l'ampiezza di trovare una particella in punti diversi è data da $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$, il suo modulo quadrato è una costante, e ciò vuol dire che la probabilità di trovare la particella è la stessa in tutti i punti. Questo comporta a sua volta che non possiamo sapere *dove* essa sia – può essere in un punto qualsiasi – e vi è una grande incertezza circa la sua posizione.

D'altro canto, se la posizione di una particella è più o meno ben conosciuta e possiamo prevederla abbastanza accuratamente, allora la probabilità di trovarla in punti diversi deve essere ristretta a una regione limitata, la cui lunghezza indicheremo con Δx . All'esterno di tale regione la probabilità è zero. Ora, questa probabilità è il modulo quadrato di un'ampiezza, e se il modulo quadrato è zero, anche l'ampiezza è zero, cosicché abbiamo un treno d'onde di lunghezza Δx (FIGURA 2.1), mentre la lunghezza d'onda propria del treno (cioè la distanza tra due nodi successivi delle onde) è quella che corrisponde all'impulso della particella.

Qui ci s'imbatte in un fenomeno strano riguardante le onde; una cosa molto semplice che non ha nulla a che fare con la meccanica quantistica in senso stretto. Si tratta di una questione che chiunque lavori con le onde conosce, anche se non conosce la meccanica quantistica: cioè, che *non è possibile definire un'unica lunghezza d'onda per un treno d'onde che sia corto*. Quest'ultimo non può avere una lunghezza d'onda definita; si ha un'ambiguità nella definizione del numero d'onda, dovuta proprio alla lunghezza finita del treno, e quindi un'ambiguità nella definizione dell'impulso.

2.2 Misure di posizione e di impulso

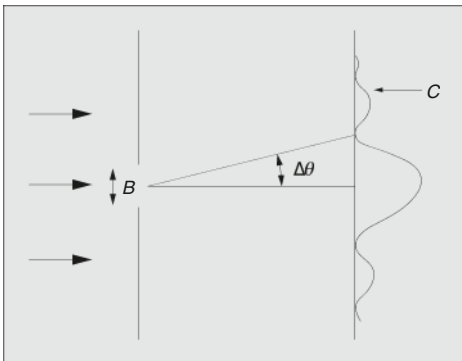


FIGURA 2.2 Diffrazione di particelle che attraversano una fenditura.

Consideriamo due esempi relativi a tale questione – per vedere, se la meccanica quantistica è corretta, quale sia la ragione per la quale vi è una incertezza sulla posizione e (oppure) sull'impulso. Abbiamo già osservato in precedenza che se una cosa del genere non accadesse – se cioè fosse possibile misurare simultaneamente la posizione e l'impulso di un oggetto qualsiasi – si giungerebbe a un paradosso; è una fortuna che tale paradosso non si verifichi, e proprio il fatto che questa indeterminazione venga fuori in modo naturale nella rappresentazione ondulatoria, mostra che tutti i ragionamenti sono mutuamente coerenti.

Ecco ora un esempio che mostra la relazione tra la posizione e l'impulso in una situazione facilmente comprensibile. Supponiamo di avere una fenditura e delle particelle che arrivano da un punto molto lontano con una certa energia, di modo che esse incidano lungo una direzione che possiamo considerare orizzontale (FIGURA 2.2). Ci vogliamo concentrare sulle componenti verticali dell'impulso. In senso classico, tutte queste particelle hanno un impulso orizzontale, diciamo p_0 . Dunque, classicamente, la componente verticale p_y dell'impulso, prima che la particella attraversi il foro, è conosciuta perfettamente. La particella non si muove né verso l'alto né verso il basso, perché proviene da una sorgente lontanissima, e così la componente verticale dell'impulso è ovviamente nulla. Ma supponiamo ora che essa attraversi una fenditura di larghezza B . Dopo che essa ha oltrepassato la fenditura, noi ne conosciamo la posizione verticale, cioè la coordinata y , con considerevole precisione, cioè $B^{(1)}$. Quindi, l'indeterminazione Δy sulla posizione è dell'ordine di $\pm B$. Ma saremmo anche tentati di affermare, poiché sappiamo che l'impulso è perfettamente orizzontale, che Δp_y è zero; ma ciò non è vero. Noi *prima* sapevamo che l'impulso era orizzontale, ma ora non lo sappiamo più. Prima che le particelle attraversassero

⁽¹⁾ Più precisamente, l'errore nella nostra conoscenza di y è $\pm B/2$. Ma a noi qui interessa solo la linea generale del ragionamento, e quindi possiamo tralasciare i fattori 2.

la fenditura, non conoscevamo la loro posizione verticale. Ora che conosciamo la loro posizione verticale, in base al fatto che sono passate attraverso il foro, abbiamo perso l'informazione circa la componente verticale dell'impulso! Perché? Secondo la teoria ondulatoria, vi è uno sparpagliamento, o diffrazione, delle onde dopo aver attraversato la fenditura, proprio come succede per la luce. Quindi c'è una certa probabilità che le particelle uscenti dalla fenditura non vengano fuori perfettamente diritte. Il fascio si allarga per effetto della diffrazione, e la sua apertura, che possiamo definire come l'angolo corrispondente al primo minimo, è una misura dell'indeterminazione angolare nella situazione finale.

Come si allarga il fascio? Dire che si allarga significa che le particelle hanno qualche possibilità di muoversi verso l'alto o il basso, cioè di avere una componente dell'impulso verso l'alto o il basso. Diciamo *possibilità* e *particella* perché possiamo osservare la figura di diffrazione con un rivelatore di particelle, e quando il rivelatore ne segnala una, poniamo in C nella FIGURA 2.2, a esso è giunta l'intera particella, di modo che, dal punto di vista classico, questa deve avere una componente verticale dell'impulso per poter arrivare dalla fenditura fino a C .

Per farci un'idea approssimativa della variazione dell'impulso, osserviamo che la componente verticale dell'impulso p_y è dell'ordine di $p_0 \Delta\theta$, dove p_0 è l'impulso orizzontale. Ma quant'è grande $\Delta\theta$ nella figura di diffrazione? Sappiamo che il primo minimo corrisponde a un angolo $\Delta\theta$ tale che le onde provenienti da un estremo della fenditura debbano percorrere una lunghezza d'onda in più di quelle che provengono dall'altro estremo – abbiamo già studiato questo fatto in precedenza (cap. 30 del vol. 1). Perciò $\Delta\theta \approx \lambda/B$ e, conseguentemente, in questo esperimento $\Delta p_y \approx p_0 \lambda/B$. Notate che se facciamo B più piccolo, cioè se si aumenta la precisione della misura di posizione della particella, la figura di diffrazione si allarga ancora di più. Dunque, più stretta rendiamo la fenditura, più si sparpaglia il fascio, e più aumenta la probabilità di trovare che la particella ha una componente trasversale dell'impulso. Quindi l'indeterminazione nella componente verticale dell'impulso è inversamente proporzionale all'indeterminazione in y . Infatti, vediamo che il prodotto delle due è uguale a $p_0 \lambda$. Ma λ è la lunghezza d'onda e p_0 è l'impulso e, secondo la meccanica quantistica, il prodotto della lunghezza d'onda per l'impulso è uguale alla costante h di Planck. Otteniamo così la regola che il prodotto delle indeterminazioni nella componente verticale dell'impulso e della posizione è dell'ordine di h :

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.3)$$

Non possiamo realizzare un sistema che ci permetta di determinare la posizione verticale di una particella e di predire come essa si muoverà in direzione verticale con precisione maggiore di quella data dalla (2.3). In altre parole, l'incertezza nella componente verticale dell'impulso deve essere maggiore di $\hbar/2\Delta y$, dove Δy è l'indeterminazione nella conoscenza della posizione.

Ogni tanto si sente dire che la meccanica quantistica è tutta sbagliata. Quando la particella è arrivata da sinistra, il suo impulso verticale era zero. E ora che è passata attraverso la fenditura se ne conosce la posizione. Quindi, sia la posizione sia l'impulso sembrano noti con precisione arbitraria. È senz'altro vero che possiamo rivelare una particella, e all'atto della rivelazione determinarne la posizione e quale deve essere stato il suo impulso per farla arrivare là. Questo è vero, ma non è questo ciò a cui si riferisce la relazione di indeterminazione (2.3). L'equazione (2.3) si riferisce alla possibilità di *predizione* in una certa situazione, e non a osservazioni sul *passato*. Non serve a niente dire: «Io conoscevo l'impulso prima che la particella attraversasse la fenditura, e adesso conosco la sua posizione», perché ora si è perduta la conoscenza dell'impulso. Il fatto che essa è passata attraverso la fenditura non ci permette più di prevedere la componente verticale dell'impulso. Noi stiamo parlando di una teoria predittiva, non semplicemente di misure a posteriori. Perciò dobbiamo parlare di ciò che possiamo prevedere.

Esaminiamo ora il problema da un altro punto di vista. Consideriamo un altro esempio dello stesso fenomeno, un po' più quantitativamente. Nel caso precedente abbiamo misurato l'impulso con un metodo classico. Precisamente, abbiamo considerato la direzione, la velocità, gli angoli ecc., e abbiamo così ricavato l'impulso con un'analisi classica. Ma, poiché l'impulso è legato al numero d'onda, esiste in natura anche un altro modo di determinare l'impulso di una particella – un fotone o altro – che non ha un analogo classico, perché sfrutta l'equazione (2.2). Misuriamo la *lunghezza d'onda delle onde*. Proviamo allora a determinare l'impulso in questo modo.

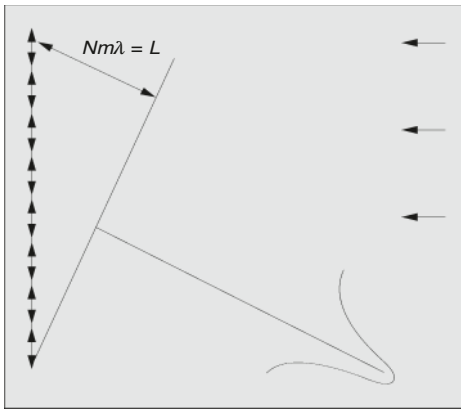


FIGURA 2.3 Determinazione dell'impulso mediante l'uso di un reticolo di diffrazione.

Supponete di avere un reticolo con un grande numero di linee (FIGURA 2.3), e di indirizzare sul reticolo un fascio di particelle. Noi abbiamo spesso discusso questo problema; se le particelle hanno un impulso definito, si ottiene una figura ben definita in una certa direzione, a causa dell'interferenza. E abbiamo anche parlato della precisione con cui si può ricavare quell'impulso, cioè del potere risolutivo di un tale reticolo. Piuttosto che ricavare nuovamente la formula, rimandiamo al cap. 30 del vol. 1, dove abbiamo visto che con un dato reticolo la lunghezza d'onda può essere misurata con un errore relativo dato da $1/Nm$, dove N è il numero di linee del reticolo e m è l'ordine della figura di diffrazione. Cioè

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm} \quad (2.4)$$

Possiamo riscrivere la formula (2.4) nella forma

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L} \quad (2.5)$$

dove L è la distanza mostrata nella FIGURA 2.3. Questa distanza è la differenza tra la distanza totale che la particella, l'onda, o quello che è, deve percorrere se essa è riflessa dal fondo del reticolo e la distanza che deve percorrere se invece è riflessa dalla cima. In altri termini, le onde che formano la figura di diffrazione sono onde provenienti da parti differenti del reticolo. Le prime che arrivano provengono dall'estremo inferiore del reticolo e dal fronte anteriore del treno d'onde, mentre il resto, partito da altri punti del reticolo, proviene da parti successive del treno d'onde, fino a quando non arriva l'ultima, che corrisponde a un punto del treno d'onde a distanza L dal fronte anteriore. Quindi per ottenere una linea netta nel nostro spettro corrispondente a un valore preciso dell'impulso, e con un errore dato dalla (2.4), dobbiamo avere un treno d'onde lungo almeno L . Se il treno d'onde è troppo corto, non viene sfruttato l'intero reticolo. Le onde che formano lo spettro sono quelle riflesse solamente da una porzione molto corta del reticolo e questo non funziona bene e quindi si ottiene una grande imprecisione nell'angolo. Per averne una minore dobbiamo far uso dell'intero reticolo, in modo che almeno in qualche istante l'intero treno d'onde si diffonda simultaneamente da tutte le parti del reticolo. Dunque il treno d'onde deve essere di lunghezza L al fine di ottenere un'impresione nella lunghezza d'onda minore di quella data dalla (2.5). Per inciso,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \Delta\frac{1}{\lambda} = \frac{\Delta k}{2\pi} \quad (2.6)$$

Ne segue che

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.7)$$

dove L è la lunghezza del treno d'onde.

Ciò significa che per un treno d'onde di lunghezza inferiore a L , l'incertezza sul numero d'onde sarà maggiore di $2\pi/L$. O anche, l'incertezza sul numero d'onde moltiplicato per la lunghezza del treno d'onde – che per il momento indicheremo con Δx – sarà maggiore di 2π . L'abbiamo chiamata Δx perché essa rappresenta l'indeterminazione sulla posizione della particella. Se il treno d'onde è di lunghezza finita, allora è entro questi limiti che può trovarsi la particella, con un'indeterminazione Δx . In effetti questa proprietà, che il prodotto della lunghezza del treno d'onde per l'impresione sul numero d'onde associato a esso è almeno 2π , è un fenomeno noto a chiunque studi le onde. Non ha niente a che vedere con la meccanica quantistica. Si tratta semplicemente del fatto che se si ha un treno di lunghezza finita, non sappiamo contare le onde in esso contenute con grande precisione.

Cerchiamo di capire in altro modo la ragione di questo fatto. Supponiamo di avere un treno finito di lunghezza L ; allora, per effetto del modo con cui esso si smorza agli estremi (FIGURA 2.1), il numero di onde nella lunghezza L è incerto di qualcosa come ± 1 . Ma il numero di onde in L è $kL/2\pi$. Dunque il valore di k è incerto, e si ottiene di nuovo il risultato (2.7), il che è solo una proprietà delle onde. Lo stesso fenomeno si riscontra sia che si tratti di onde nello spazio, con k

uguale al numero di radianti al centimetro e L uguale alla lunghezza del treno, sia che si tratti di onde nel tempo con ω uguale al numero di oscillazioni al secondo e T uguale alla «lunghezza» del tempo durante il quale giungono le onde. Cioè, se si ha un treno d'onde che dura solo per un tempo finito T , allora l'indeterminazione nella frequenza è data da

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.8)$$

Abbiamo cercato di sottolineare che queste sono semplicemente proprietà delle onde, e, per esempio, esse sono ben note nella teoria del suono.

Il punto importante è che in meccanica quantistica si interpreta il numero d'onde come una misura dell'impulso della particella, in base alla relazione $p = \hbar k$, di modo che la formula (2.7) ci dice che

$$\Delta p \approx \frac{h}{\Delta x}$$

Questa è dunque una limitazione del concetto classico di impulso. (È naturale che esso debba essere in qualche modo rimaneggiato se vogliamo rappresentare con onde delle particelle!) Ed è bello il fatto che abbiamo trovato una relazione che ci dà una qualche idea del punto in cui i concetti classici vengono a trovarsi in difetto.

2.3 Diffrazione dai cristalli

Consideriamo ora la riflessione delle particelle-onde su un cristallo. Un cristallo è un oggetto massiccio composto di un grande insieme di atomi simili – in seguito introdurremo qualche complicazione – disposti in bell'ordine. Il problema è quello di sistemare i piani cristallini in modo da ottenere un forte picco di diffrazione in una data direzione e per un dato raggio, diciamo, di luce (raggi X), elettroni, neutroni, o qualsiasi altra cosa. Per ottenere un'intensa riflessione, le onde diffuse da tutti gli atomi debbono essere in fase. Non può esserci un uguale numero di onde in fase e fuori fase, altrimenti esse si annullano a vicenda. Il modo di aggiustare le cose è quello di trovare le regioni dove la fase è costante, come abbiamo già spiegato; queste sono i piani che formano angoli uguali con le direzioni iniziale e finale (FIGURA 2.4).

Se consideriamo due piani paralleli, come nella FIGURA 2.4, le onde diffuse dai due piani saranno in fase, purché la differenza dei percorsi per un dato fronte d'onda sia uguale a un numero intero di lunghezze d'onda. Si vede che questa differenza è uguale a $2d \sin \theta$, dove d è la distanza tra i due piani. Perciò, la condizione per una riflessione coerente è

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

Se, per esempio, succede che gli atomi del cristallo giacciono in piani che soddisfano alla condizione (2.9) con $n = 1$, si otterrà una forte riflessione. Se, d'altro canto, ci sono altri atomi della stessa natura (con uguale densità) interposti a metà strada tra i due, allora i piani intermedi diffonderanno anch'essi le onde con uguale intensità e interferiranno con gli altri producendo un effetto totale nullo. Perciò d nella (2.9) va riferita a piani *adiacenti*; non possiamo prendere un piano cinque strati sotto e usare questa formula!

Può essere interessante rilevare che i cristalli reali non sono in generale così semplici come se fossero costituiti da una sola specie di atomi ripetuti con un certo schema. Al contrario, ricorrendo a un analogo in due dimensioni, essi assomigliano molto a una carta da parati, sulla quale una certa figura è ripetuta in lungo e in largo. Per «figura» s'intende, nel caso degli atomi, una struttura – un atomo di calcio, uno di carbonio, tre di ossigeno per il carbonato di calcio, e così via – che può comprendere un numero relativamente grande di atomi. Ma qualunque essa sia, la figura è ripetuta secondo uno schema regolare. Questa figura base viene detta *cella elementare*.

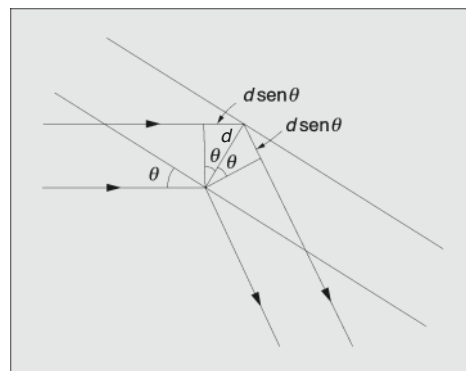


FIGURA 2.4 Diffusione di onde da parte dei piani reticolari di un cristallo.

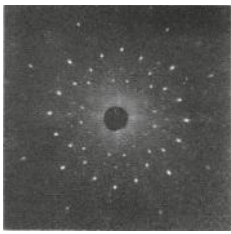


FIGURA 2.5 Figura di diffrazione di raggi X: diffusione da salgemma.

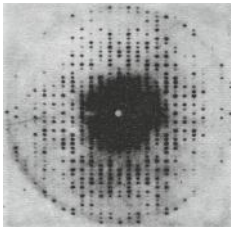


FIGURA 2.6 Figura di diffrazione di raggi X: diffusione da mioglobina.

Lo schema base di ripetizione definisce quello che si chiama il *tipo di reticolo*; il tipo di reticolo può essere subito determinato osservando le figure di diffrazione e rilevandone le proprietà di simmetria. In altre parole, dalla posizione delle figure di diffrazione, *comunque esse siano fatte*, si può determinare il tipo di reticolo; mentre per risalire a cosa ci sia in ognuno degli elementi del reticolo bisogna prendere in considerazione l'*intensità* di diffusione nelle varie direzioni. In *quali* direzioni si abbia la diffrazione è qualcosa che dipende dal tipo di reticolo, mentre *quanto è intensa* la radiazione nelle varie direzioni è determinato da quello che c'è in ogni cella elementare, e in questo modo si ricostruisce la struttura del cristallo.

Le FIGURE 2.5 e 2.6 mostrano due fotografie di figure di diffrazione di raggi X; esse illustrano rispettivamente la diffrazione da salgemma e da mioglobina.

Per inciso, un caso interessante si ha quando la distanza di due piani adiacenti è minore di $\lambda/2$. In tali condizioni la (2.9) non ammette soluzioni per n . Quindi, se λ è maggiore del doppio della distanza tra due piani adiacenti, non compaiono lateralmente figure di diffrazione, ma la luce – o quello che è – passerà diritta attraverso il materiale senza deviare o andare perduta. Così, nel caso della luce, la cui lunghezza d'onda λ è molto maggiore della separazione tra i piani, essa passa senz'altro indisturbata, e non si hanno figure di diffrazione dai piani del cristallo.

Questo fatto ha anche una conseguenza interessante nel caso dei reattori che producono neutroni (i quali sono senza dubbio particelle, a detta di tutti!). Se prendiamo questi neutroni e li facciamo incidere su un lungo blocco di grafite, essi si diffondono e si fanno strada all'interno (FIGURA 2.7). Si diffondono perché sono respinti dagli atomi, ma più precisamente, secondo la teoria ondulatoria, è la diffrazione dai piani cristallini che fa sì che gli atomi li respingano. Quello che si trova è che, se si prende un pezzo molto lungo di grafite, i neutroni che riemergono all'estremo opposto sono tutti di lunghezza d'onda molto grande! Precisamente, se si fa un grafico dell'intensità in funzione della lunghezza d'onda, si ottiene zero tranne che per lunghezze d'onda maggiori di un certo minimo (FIGURA 2.8). In altri termini, in questo modo si possono ottenere neutroni molto lenti. Solo i neutroni più lenti escono; essi non sono diffratti né diffusi dai piani cristallini della grafite, ma la trapassano in linea retta proprio come la luce attraversa il vetro, e non vengono deviati lateralmente all'esterno. Si hanno molte altre dimostrazioni della natura ondulatoria dei neutroni così come di altre particelle.

2.4 Le dimensioni di un atomo

Consideriamo ora un'altra applicazione del principio di indeterminazione, equazione (2.3). Questo esempio non va preso troppo sul serio; l'idea è giusta, ma l'analisi non è condotta molto rigorosamente. L'idea riguarda la determinazione delle dimensioni degli atomi e il fatto che, classicamente, gli elettroni dovrebbero irradiare luce e cadere a spirale fino a posarsi sul nucleo. Ma tutto ciò non può essere corretto dal punto di vista della meccanica quantistica perché allora saremmo in grado di sapere dov'era ciascun elettrone e con quale velocità si muoveva.

Supponiamo di avere un atomo di idrogeno, e di misurare la posizione dell'elettrone; noi non saremo in grado di stabilire esattamente dove esso sia, altrimenti l'indeterminazione sull'impulso risulterebbe infinita. Ogni volta che osserviamo l'elettrone, esso è da qualche parte ma ha un'ampiezza non nulla in punti diversi, di modo che c'è una probabilità non nulla di trovarlo in posti differenti. Questi punti non possono essere tutti nel nucleo; supporremo che ci sia un'indetermi-

FIGURA 2.7 Diffusione di neutroni prodotti in un reattore attraverso un blocco di grafite.

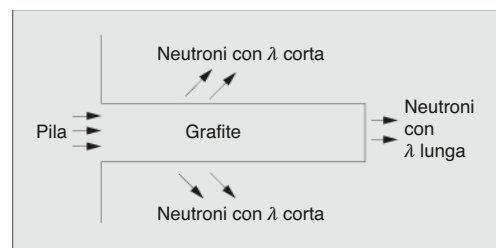
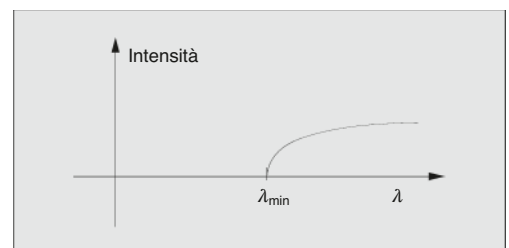


FIGURA 2.8 Intensità dei neutroni uscenti da una barra di grafite in funzione della lunghezza d'onda.



nazione nella posizione di ordine a . Ovvero, la distanza dell'elettrone dal nucleo sia per lo più uguale a circa a . Determineremo a imponendo che l'energia totale dell'atomo sia minima.

L'incertezza sull'impulso, per il principio di indeterminazione, è grosso modo \hbar/a , cosicché se misuriamo l'impulso dell'elettrone in qualche modo, per esempio facendo diffondere dei raggi X su di esso e osservando l'effetto Doppler da un centro diffusore in moto, non ci aspettiamo di trovare sempre zero – l'elettrone non sta fermo – bensì l'impulso deve essere dell'ordine di $p \approx \hbar/a$. Perciò l'energia cinetica sarà circa

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

(In un certo qual modo, questa è una sorta di analisi dimensionale per trovare la dipendenza dell'energia cinetica dalla costante di Planck, da m e dalle dimensioni dell'atomo. Non dobbiamo credere al nostro risultato che a meno di fattori come 2, π ecc. Non abbiamo nemmeno definito con molta precisione a .) Inoltre l'energia potenziale è $-e^2$ fratto la distanza dal centro, diciamo $-e^2/a$, dove, secondo la definizione data nel vol. 1, e^2 è la carica dell'elettrone al quadrato, divisa per $4\pi\epsilon_0$. Ora, il fatto è che, se a decresce, l'energia potenziale diminuisce; ma più piccolo è a , più l'impulso deve essere grande, per il principio d'indeterminazione, e quindi maggiore l'energia cinetica. L'energia totale è

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a} \quad (2.10)$$

Noi non conosciamo a , ma sappiamo che l'atomo cercherà di sistemarsi secondo un compromesso che renda l'energia più piccola possibile. Per rendere E minima, deriviamo rispetto ad a , poniamo la derivata uguale a zero e risolviamo in a . La derivata di E è

$$\frac{dE}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2} \quad (2.11)$$

e ponendo $dE/da = 0$ si ottiene per a il valore

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,528 \text{ \AA} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (2.12)$$

Questa particolare distanza si chiama *raggio di Bohr*, e così abbiamo imparato che le dimensioni dell'atomo sono dell'ordine dell'angstrom, il che è giusto. Tutto ciò è molto bello – in realtà, stupefacente – perché finora non sapevamo come spiegarci teoricamente le dimensioni dell'atomo! Gli atomi, dal punto di vista classico, sono un assurdo, perché gli elettroni dovrebbero cadere a spirale sul nucleo.

Se poniamo il valore (2.12) per a_0 nella (2.10) per trovare l'energia, si ottiene

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6 \text{ eV} \quad (2.13)$$

Qual è il significato di questa energia negativa? Significa che l'elettrone ha un'energia minore quando è nell'atomo che quando è libero. Significa cioè che è legato. Significa che ci vuole una certa energia per cacciarlo fuori; serve un'energia dell'ordine di 13,6 eV per ionizzare un atomo di idrogeno. Non abbiamo ragione di pensare che non ce ne voglia due o tre volte tanta – o la metà – o $(1/\pi)$ volte questa, perché abbiamo usato un ragionamento tanto impreciso. Però, in realtà, abbiamo barato, in quanto abbiamo preso tutte le costanti in modo da far risultare il numero giusto! Questo numero, 13,6 eV, viene definito come 1 *rydberg* di energia; esso rappresenta l'energia di ionizzazione dell'idrogeno.

Finalmente ora si capisce come mai non cadiamo attraverso il pavimento. Quando camminiamo, le nostre scarpe con la loro massa di atomi pestano il pavimento, e tutti i *suoi* atomi. Per poter comprimere gli atomi densamente, bisognerebbe confinare gli elettroni in uno spazio minore, ma, per il principio di indeterminazione, ciò porterebbe a impulsi in media maggiori, quindi a energia maggiore; la resistenza alla compressione da parte degli atomi è un effetto quantistico e non classico. Classicamente, ci si aspetta che, avvicinando tra loro gli elettroni e i protoni,

l'energia diminuisca, e la migliore sistemazione di cariche positive e negative nella fisica classica si ha quando sono tutte una sull'altra. Questo fatto era ben noto ai fisici classici e l'esistenza degli atomi costituiva un mistero. Naturalmente, i fisici del tempo inventarono qualche sistema per trarsi d'impaccio – ma a noi non interessa, visto che ora conosciamo la risposta giusta!

Per inciso, sebbene per il momento non possiamo dare spiegazioni di questo fatto, si trova che, in una situazione in cui ci sono molti elettroni, essi cercano di stare lontani gli uni dagli altri. Se c'è un elettrone in una certa regione di spazio, gli altri se ne tengono al di fuori. Più precisamente, ci sono due stati di spin, e due elettroni possono stare uno sull'altro, il primo con lo spin in un modo, il secondo nell'altro. Ma oltre a questi due non possiamo mettercene altri. Dobbiamo mettere gli altri altrove, e questa è la vera spiegazione della solidità della materia. Se potessimo mettere tutti gli elettroni nello stesso posto, la materia sarebbe ancora più densa di quella che è. È il fatto che gli elettroni non possono stare gli uni sugli altri che rende i tavoli e ogni altra cosa così solida.

2.5 I livelli d'energia

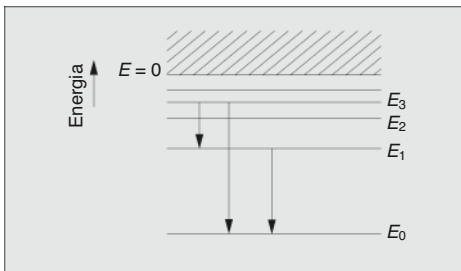


FIGURA 2.9 Diagramma energetico di un atomo che mostra varie transizioni possibili.

Abbiamo parlato dell'atomo nella situazione di minima energia possibile, ma si scopre che l'elettrone può fare ben altro. Può vibrare e oscillare con maggior energia, e quindi ne risultano molti diversi tipi di moto all'interno dell'atomo. Secondo la meccanica quantistica, in condizioni stazionarie, l'atomo può avere solo certe definite energie. Facciamo un grafico (FIGURA 2.9) in cui riportiamo verticalmente le energie, e tracciamo una linea orizzontale in corrispondenza di ogni valore permesso dell'energia. Quando l'elettrone è libero, cioè quando la sua energia è positiva, questa può assumere un valore qualunque; l'elettrone può muoversi con velocità arbitraria. Ma le energie degli stati legati non sono arbitrarie. L'atomo deve avere un'energia pari a uno tra un certo insieme di valori permessi, quelli della FIGURA 2.9.

Indichiamo i valori permessi dell'energia con E_0 , E_1 , E_2 ed E_3 . Se l'atomo si trova inizialmente in uno di questi «stati eccitati», E_1 , E_2 ecc., non vi rimane indefinitamente. Presto o tardi cade in uno stato più basso e irradia energia sotto forma di luce. La frequenza della luce emessa è determinata dalla conservazione dell'energia più il sottinteso quantistico che la frequenza della luce è legata alla sua energia dalla FIGURA 2.1. Di conseguenza, la frequenza della luce che si libera in una transizione dall'energia E_3 all'energia E_1 (per esempio) è

$$\omega_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar} \quad (2.14)$$

Questa, dunque, è una frequenza caratteristica dell'atomo e definisce una linea dello spettro di emissione. Un'altra transizione possibile è quella da E_3 a E_0 . A questa corrisponde un'altra frequenza

$$\omega_{30} = \frac{E_3 - E_0}{\hbar} \quad (2.15)$$

Ancora una diversa possibilità è che l'atomo fosse inizialmente nello stato eccitato E_1 e ritorni poi nello stato fondamentale E_0 , emettendo un fotone di frequenza

$$\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} \quad (2.16)$$

La ragione per cui abbiamo introdotto tre transizioni è quella di sottolineare una relazione interessante. È facile rilevare dalle (2.14), (2.15) e (2.16) che

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10} \quad (2.17)$$

In generale, se troviamo due linee dello spettro, ci possiamo aspettare di trovarne un'altra in corrispondenza della somma delle frequenze (o della differenza), e che tutte le linee possano

essere interpretate in termini di una serie di livelli, in modo che ogni linea corrisponda alla differenza d'energia tra una coppia di livelli. Questa notevole coincidenza nelle frequenze spettrali fu notata prima della scoperta della meccanica quantistica, e si chiama *principio di combinazione di Ritz*. Questo principio è un altro mistero per la meccanica classica. Non vogliamo insistere sul fatto che la meccanica classica si rivela un disastro se applicata agli atomi; ci sembra di averlo già dimostrato molto chiaramente.

Abbiamo in precedenza trattato la meccanica quantistica in termini di ampiezze, che si comportano come onde, con certe frequenze e numeri d'onda. Vediamo ora come viene fuori, partendo dalle ampiezze, che l'atomo ha stati di energia ben definita. Ciò è qualcosa che non si può comprendere da quanto detto finora, ma siamo tutti al corrente del fatto che onde ristrette a una certa zona di spazio hanno frequenze fisse. Per esempio, se un suono è confinato in una canna d'organo, o qualcosa del genere, allora esso può vibrare in tanti modi, ma per ciascuno di questi modi si ha una frequenza ben precisa. Analogamente, un oggetto nel quale siano confinate delle onde ha certe frequenze di risonanza. È perciò una proprietà delle onde costrette in una regione limitata di spazio che esse esistano solo con frequenze definite; un argomento, questo, che in formule tratteremo in dettaglio più avanti; e, poiché esiste una relazione generale tra le frequenze e le energie, non c'è da sorprendersi se troviamo energie ben definite associate agli elettroni legati negli atomi.

2.6 Conseguenze di natura filosofica

Consideriamo brevemente alcune conseguenze di natura filosofica della meccanica quantistica. Come sempre, ci sono due aspetti del problema: da una parte ci sono le questioni filosofiche relative alla fisica, dall'altra parte le estrapolazioni di carattere speculativo ad altri campi. Generalmente quando i concetti filosofici trattati dalla scienza sono trasportati in un altro settore, essi vengono completamente deformati. Per questa ragione, cercheremo, per quanto è possibile, di limitare le nostre considerazioni all'ambito della fisica stessa.

Prima di tutto, l'aspetto più interessante è l'idea del principio di indeterminazione; osservare un fenomeno produce un'influenza sul fenomeno stesso. Si è sempre saputo che fare osservazioni su di un fenomeno lo perturba, ma qui il punto è che questo effetto non può essere trascurato o minimizzato o reso arbitrariamente piccolo modificando l'apparecchiatura. Quando osserviamo un certo fenomeno, non possiamo fare a meno di introdurre un minimo di perturbazione, e *questa influenza è necessaria per la coerenza del nostro punto di vista*.

L'osservatore poteva avere qualche volta importanza nella fisica prequantistica, ma sempre in un senso banale. È stato sollevato il problema: se un albero cade nella foresta e non c'è nessuno a sentirlo, fa rumore lo stesso? Un albero *vero* che cade in una foresta *vera* produce un suono, naturalmente, anche se non c'è nessuno. Anche se nessuno è presente a udirlo, restano altre tracce. Il suono farà oscillare qualche foglia, e, se fossimo abbastanza meticolosi, potremmo trovare da qualche parte che una spina ha strisciato contro una foglia producendo un graffietto, che non sapremmo spiegare in altro modo che supponendo che le foglie siano state poste in vibrazione. Quindi in un certo senso saremmo costretti ad ammettere che un suono si è prodotto. Potremmo domandarci: si è avuta una *sensazione* del suono? No, le sensazioni hanno presumibilmente a che fare con la coscienza. E noi non sappiamo se le formiche sono coscienti e se c'erano formiche nella foresta, o se gli alberi sono coscienti. Lasciamo il problema aperto in questa forma.

Un altro fatto che è stato sottolineato da quando si è sviluppata la meccanica quantistica è che non si deve parlare di cose che non si sanno misurare. (In realtà, anche la teoria della relatività portò a questa conclusione.) Non vi è posto in una teoria per un concetto che non può essere definito con una misura. E poiché un valore preciso dell'impulso di una particella localizzata non può essere definito con una misura, non deve entrare nella teoria. Ma l'idea che questo sia ciò che non funziona nella teoria classica è una *posizione sbagliata*. Rappresenta un'analisi superficiale della situazione. Il solo fatto che non sappiamo *misurare* con precisione la posizione e l'impulso non significa *a priori* che non possiamo parlarne. Significa solo che non siamo *obbligati* a parlarne. La situazione nelle scienze è la seguente: un concetto o un'idea che

non può essere misurato o riferito direttamente all'esperimento può essere utile o meno. Non è necessario che entri nella teoria. In altri termini, paragoniamo la teoria classica dell'universo con la teoria quantistica dell'universo e supponiamo che sia sperimentalmente vero che la posizione e l'impulso possano essere misurati solo in modo impreciso. Il problema è di vedere se i concetti di posizione esatta e di impulso esatto di una particella sono validi o no. La teoria classica accetta questi concetti; la teoria quantistica no. Questo, in se stesso, non significa che la fisica classica sia sbagliata. Quando venne scoperta la nuova meccanica quantistica, quelli che ragionavano secondo gli schemi classici, cioè tutti tranne Heisenberg, Schrödinger e Born, dissero: «Guardate, la vostra teoria non è buona a niente perché non sapete rispondere a certe domande come: qual è l'esatta posizione di una particella? Attraverso quale foro passa?», e altre. La risposta di Heisenberg fu: «Io non sono obbligato a rispondere a queste domande perché voi non potete formularle sperimentalmente». Proprio questo non siamo *tenuti* a fare. Consideriamo due teorie (a) e (b); (a) contiene un concetto che non può essere direttamente controllato ma che è usato nell'analisi, mentre (b) non lo contiene. Se le loro previsioni non vanno d'accordo, non si può affermare che (b) è falsa perché non riesce a spiegare quell'idea che è in (a), perché tale idea è tra quelle cose che non possono essere sottoposte a controllo sperimentale diretto. È sempre bene sapere quali idee non possono essere verificate direttamente, ma non è necessario abbandonarle tutte. Non è vero che possiamo costruire completamente la scienza usando solo quei concetti che sono suscettibili di esperienza diretta.

Nella stessa meccanica quantistica ci sono delle ampiezze di probabilità, dei potenziali e tante entità complicate che non sappiamo misurare direttamente. Il fondamento di una scienza è la sua capacità di fare *previsioni*. Fare previsioni significa predire ciò che accadrà in un'esperienza che non è mai stata fatta. Come si può arrivare a questo? Ammettendo di conoscere la situazione in quel caso, a prescindere dall'esperimento. Dobbiamo fare una estrapolazione degli esperimenti a una regione dove essi non sono stati compiuti. Dobbiamo prendere i nostri concetti ed estenderli a sfere dove essi non sono ancora stati verificati. Se non procediamo così, non riusciamo a ricavare previsioni. Quindi, il fisico classico aveva perfettamente ragione di andare avanti allegramente supponendo che la posizione – che ha ovviamente senso per una palla da baseball – conservasse un significato anche per un elettrone. Non era una stupidaggine. Era un procedimento ragionevole. Oggi diciamo che le leggi della relatività sono valide a tutte le energie, ma un giorno può venir fuori qualcuno a dirci che siamo stati stupidi. Noi non sapremo mai in quali casi siamo «stupidi» fino a che non «rischiamo l'osso del collo», perciò la procedura giusta è quella di rischiarlo. E il solo modo di scoprirci in errore è di aver chiaro *quali* sono le nostre previsioni. È assolutamente necessario fare illazioni.

Abbiamo già fatto qualche osservazione circa l'attenuazione del determinismo in meccanica quantistica. Si tratta del fatto che ora non siamo più in grado di anticipare ciò che avverrà in natura in un data circostanza fisica che è stata realizzata con la massima cura possibile. Se abbiamo un atomo in uno stato eccitato, che quindi sta per emettere un fotone, non sappiamo dire quando lo emetterà. L'atomo ha una certa ampiezza di probabilità di emettere il fotone per ogni istante, e noi possiamo solo prevedere la probabilità di emissione; non possiamo prevedere esattamente il futuro. Questo fatto ha dato origine a ogni sorta di sciocchezze, di questioni sul libero arbitrio e all'idea che il mondo non è deterministico.

Naturalmente dobbiamo sottolineare che la fisica classica è essa stessa indeterminata in un certo senso. Si crede generalmente che questa indeterminazione, cioè il fatto che non sappiamo prevedere il futuro, sia un'importante peculiarità quantistica, e questo viene detto per spiegare il comportamento della mente, la sensazione del libero arbitrio ecc. Ma se il mondo fosse classico – se le leggi della meccanica fossero quelle classiche – non è per niente ovvio che la mente non si troverebbe più o meno nella stessa situazione. È vero, dal punto di vista classico, che se conosciamo la posizione e la velocità di ogni particella nel mondo, o in una scatola piena di gas, potremmo esattamente prevedere ciò che accadrà. E perciò il mondo classico è deterministico. Supponiamo, tuttavia, di avere una possibilità finita di precisione e di non sapere *esattamente* dove si trovi un certo atomo, a meno, diciamo, di una parte su un miliardo. Allora, quando quello si muove e urta un altro atomo, per il fatto che già non conoscevamo la sua posizione che a meno di una parte su un miliardo, ci troviamo di fronte a un errore ancora maggiore sulla sua posizione dopo l'urto. Ovviamente il fenomeno si amplifica alla successiva collisione, cosicché se anche

partiamo con solo un piccolissimo errore, questo s'ingigantisce rapidamente fino a divenire una grandissima incertezza. Tanto per dare un esempio: se l'acqua straripa da una diga e schizza dappertutto. Se ci troviamo nelle vicinanze, di tanto in tanto una goccia ci finisce sul naso. Questo sembra avvenire completamente a caso, eppure tale comportamento dovrebbe essere prevedibile in base a leggi puramente classiche. L'esatta posizione di tutte le gocce dipende da ogni piccola vibrazione dell'acqua prima di urtare la diga. In che modo? Le più piccole irregolarità sono ingrandite nella caduta, in modo che alla fine si ottiene un comportamento completamente a caso. È ovvio che non possiamo in realtà prevedere la posizione delle gocce, a meno di non conoscere il moto dell'acqua in modo *assolutamente esatto*.

Parlando con maggior rigore, data una precisione arbitraria, non importa quanto, si può trovare un tempo abbastanza lungo da non poter più fare delle previsioni valide per un così lungo periodo. Ora il punto è che questo intervallo di tempo non è molto grande. Non è qualche milione di anni se la precisione è di una parte su un miliardo. Infatti, il tempo dipende solo logaritmicamente dall'errore, e se ne ricava che in un tempo molto, molto breve perdiamo ogni informazione. Se si assume una precisione di una parte su un miliardo di miliardi di miliardi – non importa quanti miliardi vogliamo, purché a un certo punto ci fermiamo – ci può capitare di trovare in conseguenza un tempo minore di quello impiegato a formulare la precisione, dopo di che non siamo più in grado di prevedere ciò che avverrà! Non è perciò chiara l'affermazione che dall'apparente libertà e imprevedibilità della mente umana, avremmo dovuto capire che la fisica classica «deterministica» non sarebbe mai riuscita a spiegarla, e in conseguenza accogliere la meccanica quantistica come una liberazione da un universo «completamente meccanicistico». Giacché anche nella meccanica classica si ha in pratica quest'incapacità di fare previsioni.