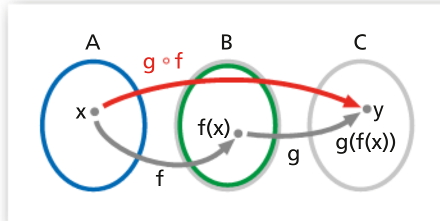
5 Funzioni composte

▶ Esercizi a p. 563

Comporre le funzioni f: $A \to B$ e g: $B \to C$ significa considerare una terza funzione, detta **funzione composta** $g \circ f$, che associa a ogni elemento di A un elemento di C nel seguente modo:

- all'elemento $x \in A$ corrisponde, mediante f, l'elemento $f(x) \in B$;
- all'elemento $f(x) \in B$ corrisponde, mediante g, l'elemento $g\big(f(x)\big) \in C$.



Quindi $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)\ \forall x \in A$.

$g \circ f$ si legge «g composto f».

$g\big(f(x)\big)$ si legge «g di f di x».

Se $C = A$, possiamo considerare sia $g \circ f$ sia $f \circ g$, ma, in generale:

$$g \circ f \neq f \circ g,$$

ossia **la composizione delle funzioni non è commutativa**.

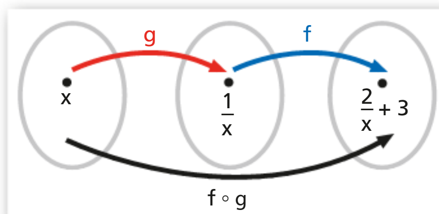
Animazione

Nell'animazione determiniamo $f \circ g$ e $g \circ f$ anche per le funzioni $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^3$.

ESEMPIO

Date le funzioni $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, determiniamo $f \circ g$ e $g \circ f$.

Per determinare $f \circ g$, consideriamo un valore x del dominio di g e applichiamo g a x. Al valore ottenuto, se appartiene al dominio di f, applichiamo f. Associamo a x il valore finale



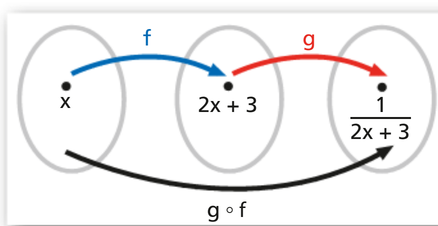
$$x \ \xrightarrow{g}\ \frac{1}{x} \ \xrightarrow{f}\ 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 3 = \frac{2}{x} + 3,$$

quindi: $f\big(g(x)\big) = \dfrac{2}{x} + 3$.

Per determinare $g \circ f$, dobbiamo invece applicare prima f e poi g:

$$x \ \xrightarrow{f}\ 2x + 3 \ \xrightarrow{g}\ \frac{1}{2x + 3},$$

quindi $g\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{2x + 3}$.



Notiamo che $f \circ g \neq g \circ f$.

▶ Date le funzioni $f(x) = 3x$ e $g(x) = x - 5$, determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

Se si compone una funzione f: $A \to B$ con la sua inversa f^{-1}: $B \to A$, si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso.