Elettromagnetismo

1

1.1 Le forze elettriche

Ripasso: vol. 1, cap. 12, *Caratteristiche della forza*

Pensate a una forza simile alla gravitazione, che vari essenzialmente come l'inverso del quadrato della distanza, ma che sia all'incirca un *miliardo di miliardi di miliardi di miliardi* di volte più forte. E con un'altra differenza: ci sono due specie di «materia», che possiamo chiamare positiva e negativa; ciascuna specie respinge la materia della stessa specie e attrae quella della specie opposta, a differenza della gravità, in cui si ha soltanto attrazione. Che cosa succederebbe?

Dei corpuscoli positivi si respingerebbero fra loro con forze enormi e si spargerebbero in tutte le direzioni. Lo stesso farebbero dei corpuscoli negativi. Ma un miscuglio composto ugualmente di corpuscoli positivi e negativi si comporterebbe in modo del tutto diverso: i corpuscoli di segno opposto sarebbero costretti ad avvicinarsi sotto l'azione di enormi forze attrattive e il risultato finale sarebbe che le formidabili forze si compenserebbero quasi perfettamente col formarsi di una mescolanza fine e compatta di corpuscoli positivi e negativi. Fra due frazioni separate di una tale mescolanza non ci sarebbe praticamente alcuna attrazione né repulsione.

Una tale forza esiste: è la forza elettrica e tutta la materia è una miscela di protoni positivi ed elettroni negativi che si attirano e si respingono con questa gran forza. Tuttavia la compensazione è così perfetta che stando accanto a un'altra persona voi non risentite alcuna forza. Eppure se ci fosse anche un piccolo difetto nella compensazione ve ne accorgereste subito. Se vi trovaste a un metro di distanza da un altro e ambedue aveste l'*uno per cento* in più di elettroni che di protoni, la forza di repulsione sarebbe incredibile. Quanto grande? Sufficiente per sollevare l'Empire State Building? No! Per sollevare il monte Everest? No! La repulsione sarebbe abbastanza grande per sollevare un «peso» uguale a quello dell'intera Terra!

Con tali enormi forze così perfettamente bilanciate in quella intima miscela che è la materia, non è difficile capire come mai questa, tendendo a mantenere le sue cariche positive e negative nel più perfetto equilibrio, possa mostrare una grande rigidità e tenacia. L'Empire State Building, per esempio, compie per effetto del vento oscillazioni di soli 2,5 metri perché le forze elettriche mantengono ogni protone ed elettrone più o meno al suo posto. D'altra parte, se guardiamo alla materia a una scala abbastanza piccola da considerare soltanto pochi atomi per volta, qualunque minuta porzione di materia in generale non conterrà un ugual numero di cariche positive e negative e perciò ci saranno intense forze elettriche residue. Anche quando in due piccole porzioni vicine i numeri di cariche positive e negative si uguagliano, ci possono essere ancora intense forze elettriche, perché le forze fra le singole cariche variano come l'inverso del quadrato della distanza. Si può avere una forza complessiva non nulla se una delle cariche negative di una delle due porzioni è più vicina alle cariche positive che a quelle negative dell'altra porzione. Le forze attrattive possono in tal caso essere più grandi di quelle repulsive e quindi si può avere una complessiva attrazione fra due piccole porzioni, anche se queste sono prive di cariche non compensate. Le forze che tengono insieme ciascun atomo e le forze chimiche che tengono uniti gli atomi nelle molecole sono realmente forze elettriche che agiscono in regioni dove l'equilibrio delle cariche non è perfetto e dove le distanze sono molto piccole.

Naturalmente sapete che negli atomi i protoni si trovano nel nucleo e gli elettroni ne stanno fuori. Potreste chiedervi: «se le forze elettriche sono tanto formidabili, perché protoni ed elettroni non finiscono tutti gli uni sugli altri? Se la loro mescolanza ha da essere intima, perché non

Lettere greche minuscole e alcune maiuscole di uso corrente

α		alfa
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ	Θ	theta
ι		iota
κ		kappa
λ	Λ	lambda
μ		mu
ν		nu
ξ	Ξ	xi (ksi)
o		omicron
π	Π	pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
υ	Υ	upsilon
ϕ	Φ	phi
χ		chi (khi)
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

è ancora più intima?». La risposta si trova negli effetti quantistici. Se cerchiamo di confinare gli elettroni di un atomo in una regione molto vicina ai protoni, allora, in base al principio di indeterminazione, essi devono possedere una quantità di moto quadratica media che è tanto più grande quanto più cerchiamo di confinarli. È questo moto, imposto dalle leggi della meccanica quantistica, che impedisce all'attrazione elettrica di avvicinare le cariche oltre un certo limite.

C'è un altro problema: «Che cosa fa sì che il nucleo rimanga unito?». In un nucleo ci sono diversi protoni, che sono tutti positivi. Perché la mutua repulsione non li costringe a separarsi? Il fatto è che nei nuclei ci sono oltre alle forze elettriche delle forze non elettriche, chiamate forze nucleari, che sono più grandi delle forze elettriche e quindi sono capaci di tenere insieme i protoni nonostante la repulsione elettrica. Le forze nucleari, tuttavia, hanno un raggio d'azione piccolo: la loro intensità decresce molto più rapidamente che $1/r^2$. E questo ha un'importante conseguenza. Se un nucleo contiene troppi protoni, diventa troppo grosso e non riesce più a stare unito. Un esempio è dato dall'uranio, con 92 protoni. Le forze nucleari agiscono principalmente fra ogni protone (o neutrone) e il suo vicino più prossimo, mentre le forze elettriche agiscono anche a distanze più grandi, creando una repulsione fra ogni protone e tutti gli altri protoni del nucleo. Più ci sono protoni in un nucleo e più forte è la repulsione elettrica, finché, come nel caso dell'uranio, l'equilibrio è così delicato che il nucleo è quasi pronto a disgregarsi per effetto della forza elettrica repulsiva. Se un simile nucleo viene «picchiato» leggermente (come si può fare inviandogli contro un neutrone lento) esso si rompe in due pezzi, ciascuno carico positivamente, e questi pezzi sono scagliati lontano l'uno dall'altro dalla mutua repulsione elettrica. L'energia che così si libera è l'energia della bomba atomica. Di solito questa energia viene chiamata «nucleare», ma in realtà è un'energia «elettrica» che si libera quando le forze elettriche hanno superato le forze attrattive nucleari.

Possiamo infine domandare che cos'è che tiene insieme un elettrone carico negativamente (giacché esso non possiede forze nucleari). Dato che un elettrone è fatto tutto della medesima specie di sostanza, ogni sua parte dovrebbe respingere le altre parti: perché dunque non si disgrega? Ma avrà poi delle «parti» l'elettrone? Forse dovremmo dire che l'elettrone è soltanto un punto e che le forze elettriche agiscono solo fra cariche puntiformi *diverse*, così che l'elettrone non agisce su se stesso. Forse. Tutto quello che possiamo dire è che il problema di che cosa tiene insieme gli elettroni ha prodotto molte difficoltà nei tentativi di costruire una teoria completa dell'elettromagnetismo. Il problema non ha mai avuto soluzione. Sarà divertente discutere questo soggetto un po' più da vicino in qualche capitolo successivo.

Come si è visto, ci dobbiamo aspettare che ciò che determina la struttura dettagliata dei materiali e quindi le loro proprietà sia una combinazione di forze elettriche ed effetti quanto-meccanici. Alcuni materiali sono duri, altri sono teneri. Alcuni sono «conduttori» dell'elettricità perché i loro elettroni sono liberi di muoversi nel loro seno; altri sono «isolanti» perché i loro elettroni sono legati strettamente ai singoli atomi. Vedremo più tardi come vengono fuori alcune di queste proprietà, ma questo è un argomento molto complicato e perciò cominceremo a considerare le sole forze elettriche, in circostanze semplici. Cominceremo, cioè, col trattare soltanto le leggi dell'elettricità, includendo il magnetismo, che è in realtà una parte del medesimo argomento di studio.

Si è detto che la forza elettrica, a somiglianza della forza gravitazionale, decresce come l'inverso del quadrato della distanza fra le cariche. Questa relazione si chiama legge di Coulomb. Non è però esattamente verificata quando le cariche sono in movimento: le forze elettriche dipendono anche dal moto delle cariche, in una maniera complicata. Una parte della forza fra cariche in movimento la chiameremo forza *magnetica*. È realmente un particolare aspetto di un effetto elettrico: questa è la ragione per cui l'argomento di cui ci occupiamo si chiama «elettromagnetismo».

C'è un principio generale importante che rende possibile trattare le forze elettromagnetiche in modo relativamente semplice. Sappiamo dall'esperienza che la forza che agisce su una data carica dipende soltanto da posizione, velocità ed entità della carica, indipendentemente da quante altre cariche possano essere presenti e dai loro moti. Possiamo scrivere per la forza $\boldsymbol{F}$ sulla carica q che si muove con la velocità v la formula

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{1.1}$$

$\boldsymbol{E}$ si chiama *campo elettrico* e $\boldsymbol{B}$ *campo magnetico* nel punto dove si trova la carica. La cosa importante è che questi due vettori riassumono l'effetto delle forze elettriche dovute a tutte le altre cariche dell'universo. I valori dipendono dal *punto* dove la carica si trova e possono cambiare col *tempo*. Inoltre, se sostituiamo la carica con un'altra, la forza sulla nuova carica risulta semplicemente proporzionale alla sua entità fintanto che tutte le rimanenti cariche dell'universo non cambiano le loro posizioni o i loro moti. (In realtà, naturalmente, ogni carica esercita forze su tutte le altre cariche presenti nelle vicinanze e può far sì che queste si spostino; perciò in certi casi i campi *possono* cambiare quando si sostituisce una carica con un'altra).

Sappiamo dal vol. 1 come si ricava il moto di una particella conoscendo la forza che agisce su di essa. Si può combinare l'equazione del moto con l'equazione (1.1) ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{1.2}$$

In questo modo, possiamo determinare il moto, se $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ sono dati. Bisogna quindi conoscere come i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ sono prodotti.

Uno dei più importanti princìpi semplificatori riguardante il modo in cui i campi vengono prodotti è il seguente: supponiamo che un certo numero di cariche in moto in una certa maniera produca un campo $\boldsymbol{E}_1$ e che un altro sistema di cariche produca un campo $\boldsymbol{E}_2$, quando agiscono separatamente. Se i due sistemi di cariche sono presenti nello stesso tempo (conservando le stesse posizioni e gli stessi movimenti che avevano quando si consideravano separatamente) allora il campo prodotto è semplicemente la somma

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \tag{1.3}$$

Questo fatto è chiamato *principio di sovrapposizione dei campi*. Esso vale anche per i campi magnetici.

Questo principio significa che se conosciamo le leggi per il campo elettrico e quello magnetico prodotti da una *singola* carica che si muove in modo arbitrario, allora tutte le leggi dell'elettrodinamica sono complete. Se vogliamo conoscere la forza sulla carica A ci occorre soltanto calcolare i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ prodotti dalle varie cariche B, C, D ecc., e poi sommare gli $\boldsymbol{E}$ e i $\boldsymbol{B}$ di tutte le cariche per trovare i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ complessivi e per mezzo di questi le forze che agiscono sulla carica A. Se fosse risultato che il campo prodotto da una singola carica è semplice, questa sarebbe stata la maniera più chiara di descrivere le leggi dell'elettrodinamica. Abbiamo già dato una descrizione di tale legge (cap. 28 del vol. 1) ed essa, purtroppo, è piuttosto complicata.

Si trova perciò che la forma nella quale le leggi dell'elettrodinamica sono più semplici non è quella che ci si potrebbe aspettare. Il dare una formula per la forza che una carica esercita su un'altra *non* è la via più semplice. È vero che quando le cariche sono immobili la forza è data dalla legge di Coulomb, che è semplice, ma quando si muovono, le relazioni risultano complicate, fra l'altro, da ritardi di tempo e da effetti di accelerazione. In conclusione, non è desiderabile presentare l'elettrodinamica soltanto per mezzo della legge di forza fra cariche: è più conveniente considerare un altro punto di vista, un punto di vista secondo il quale le leggi dell'elettrodinamica appaiono trattabili nel modo più facile.

1.2 Campi elettrici e magnetici

Per prima cosa dobbiamo ampliare alquanto le nostre idee sui vettori elettrico e magnetico, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$. Abbiamo definito questi vettori per mezzo delle forze che sono subite da una carica. Ora vogliamo parlare dei campi elettrici e magnetici *in un punto*, anche quando non ci sono cariche. Intendiamo in effetti affermare che, dato che ci sono delle forze che «agiscono sulla» carica, deve esistere tuttavia «qualcosa» anche quando la carica è rimossa. Se una carica posta nel punto (x, y, z) al tempo t subisce la forza $\boldsymbol{F}$ data dall'equazione (1.1), noi associamo i vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ al *punto* dello spazio (x, y, z). Possiamo pensare che $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ e $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$ diano le forze che

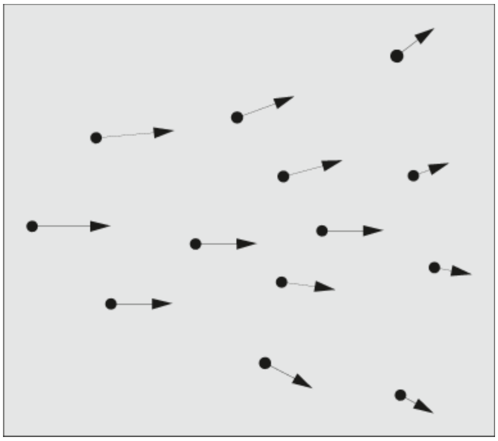

FIGURA **1.1** Un campo vettoriale si può rappresentare tracciando un sistema di frecce le cui grandezze e direzioni indicano i valori del campo vettoriale nei punti dai quali le frecce sono spiccate.

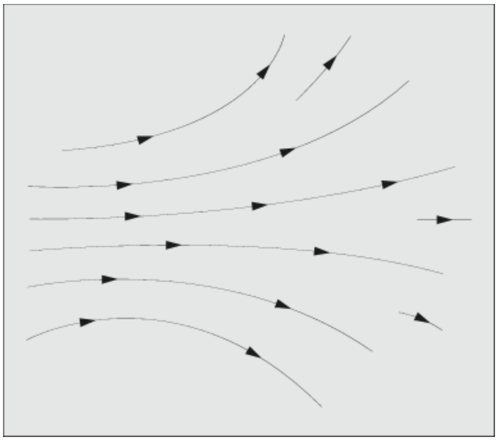

FIGURA **1.2** Un campo vettoriale può essere rappresentato tracciando delle linee che sono tangenti alla direzione del campo vettoriale in ogni punto e prendendo la densità di queste linee proporzionale al modulo del campo.

sarebbero risentite al tempo t da una carica posta in (x, y, z), con la condizione che la carica ivi posta *non disturbi* le posizioni o i moti di tutte le altre cariche che producono i campi.

Seguendo questa idea, associamo a *ogni* punto (x, y, z) dello spazio due vettori, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, che possono variare col tempo. I campi elettrico e magnetico sono perciò considerati come funzioni vettoriali di x, y, z e t. Dato che ogni vettore è specificato mediante le sue componenti, ciascuno dei campi $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ e $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$ rappresenta tre funzioni matematiche di x, y, z e t.

È proprio perché $\boldsymbol{E}$ (oppure $\boldsymbol{B}$) può essere specificato per ogni punto dello spazio che lo si chiama «campo». La temperatura, per esempio, è un campo, in questo caso un campo scalare, che possiamo esprimere con $T(x, y, z, t)$. La temperatura potrebbe anche cambiare col tempo e allora diremmo che si tratta di un campo di temperatura dipendente dal tempo e scriveremmo $T(x, y, z, t)$. Un altro esempio è il «campo di velocità» di un liquido che fluisce. Scriviamo $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ per la velocità del liquido in ogni punto dello spazio, al tempo t. Si tratta di un campo vettoriale.

Tornando ai campi elettromagnetici, benché siano prodotti dalle cariche secondo delle formule complicate, essi hanno la seguente importante caratteristica: le relazioni fra i valori dei campi in *un punto* e i valori in un *punto vicino* sono molto semplici. Mediante alcune di queste relazioni, nella forma di equazioni differenziali, possiamo descrivere i campi completamente. È per mezzo di tali equazioni che le leggi dell'elettrodinamica si scrivono nel modo più semplice.

Si sono escogitati vari modi per aiutare la mente a visualizzare il comportamento dei campi. Il più corretto è anche il più astratto e consiste semplicemente nel considerare i campi come funzioni matematiche del punto e del tempo. Possiamo anche provare a farci un quadro mentale del campo disegnando in vari punti dello spazio dei vettori, ciascuno dei quali dà l'intensità e la direzione del campo in quei punti. Una simile rappresentazione è mostrata in FIGURA **1.1**.

Possiamo tuttavia far di più e disegnare delle linee che sono dovunque tangenti ai vettori, le quali per così dire seguono le frecce e registrano la direzione del campo. Così facendo perdiamo di vista la *lunghezza* del vettore, ma possiamo tener conto dell'intensità del campo disegnando le linee molto distanziate quando il campo è debole e molto vicine quando è forte. Si adotta la convenzione che il *numero di linee per unità di area* normale alle linee stesse deve essere proporzionale all'*intensità del campo*. Questa è naturalmente soltanto un'approssimazione e richiederà in generale che nuove linee nascano in certi punti perché il loro numero si mantenga proporzionale all'intensità del campo. Il campo della FIGURA **1.1** è rappresentato per mezzo delle linee di campo nella FIGURA **1.2**.

1.3 Caratteristiche dei campi vettoriali

Ci sono due proprietà matematicamente importanti dei campi vettoriali delle quali faremo uso nella nostra esposizione delle leggi dell'elettricità dal punto di vista dei campi.

Supponiamo di avere una superficie chiusa qualunque e domandiamoci se si perde «qualcosa» attraverso di essa: ossia se il campo possiede una qualità simile a un «efflusso».

Per esempio, nel caso di un campo di velocità potremmo domandarci se la velocità è sempre diretta all'infuori della superficie, o, più in generale, se esce più fluido (per unità di tempo) di quanto ne entri.

Chiameremo «flusso della velocità» attraverso la superficie la quantità complessiva di fluido che esce dalla superficie. Il flusso attraverso un elemento di superficie uguaglia semplicemente la componente della velocità in direzione perpendicolare alla superficie moltiplicata per l'area dell'elemento. Per una superficie chiusa arbitraria il *flusso uscente* è dato dalla componente normale media (esterna) moltiplicata per l'area della superficie:

$$\text{flusso} = (\text{componente normale media}) \cdot (\text{area della superficie}) \tag{1.4}$$

Nel caso di un campo elettrico, possiamo definire matematicamente qualcosa di analogo a un flusso uscente e lo chiameremo parimenti flusso. Naturalmente non si tratta di un flusso di sostanza, perché il campo elettrico non è la velocità di alcunché. Risulta tuttavia che quella grandezza matematica che è la componente normale media del campo ha ancora un utile significato. Parleremo dunque di *flusso elettrico*, definito ancora dall'equazione (1.4).

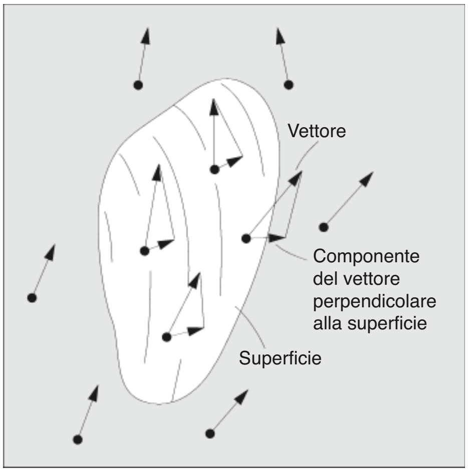

FIGURA **1.3** Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie è definito come il valore medio della componente normale del vettore moltiplicato per l'area della superficie.

Infine è utile parlare non soltanto del flusso attraverso una superficie completamente chiusa, ma anche attraverso una superficie limitata qualunque. Come prima, il flusso attraverso una tale superficie è definito come la componente normale media di un vettore moltiplicata per l'area della superficie. Queste idee sono illustrate nella FIGURA **1.3**.

C'è una seconda proprietà di un campo vettoriale che si riferisce a una linea, piuttosto che a una superficie. Supponiamo di nuovo di pensare a un campo di velocità che descrive il fluire di un liquido. Ci potremmo porre questa interessante domanda: il liquido sta circolando? Con questo vogliamo dire: c'è un movimento rotazionale netto intorno a un qualche cammino chiuso? Supponiamo di congelare istantaneamente il liquido dappertutto tranne che all'interno di un tubo di sezione uniforme che si chiude su se stesso, come in FIGURA **1.4**. All'esterno del tubo il liquido cessa di muoversi, ma dentro il tubo può darsi che continui a muoversi a causa dell'impulso del liquido ivi rinchiuso, ossia, lo farà se c'è più impulso diretto in un senso che nel senso opposto. Definiremo una grandezza chiamata *circuitazione* prendendo il prodotto della velocità del liquido per il perimetro del tubo. Di nuovo, possiamo estendere le nostre idee e definire la «circuitazione» per qualsiasi campo vettoriale (anche quando non c'è nulla che si muove). Per qualunque campo vettoriale la circuitazione intorno *a una curva chiusa arbitraria* è definita come la componente tangenziale media del vettore (in un senso determinato) moltiplicata per il perimetro della curva chiusa (FIGURA **1.5**):

$$\text{circuitazione} = (\text{componente tangenziale media}) \cdot (\text{perimetro della curva}) \tag{1.5}$$

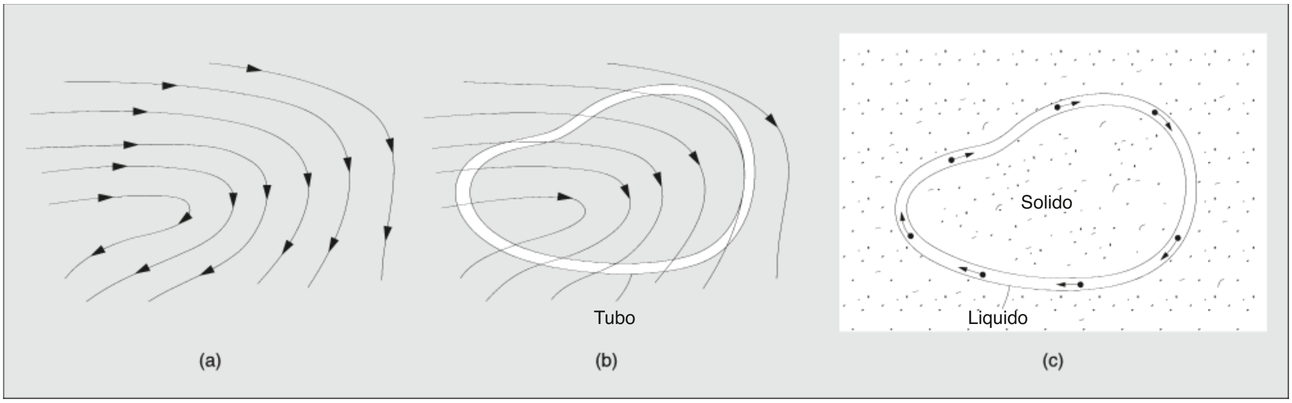

FIGURA **1.4** (a) Il campo di velocità di un liquido. Immaginiamo un tubo a sezione normale costante che segue una curva chiusa arbitraria, come in (b). Se il liquido venisse improvvisamente congelato dappertutto tranne che all'interno del tubo, il liquido nel tubo circolerebbe come in (c).

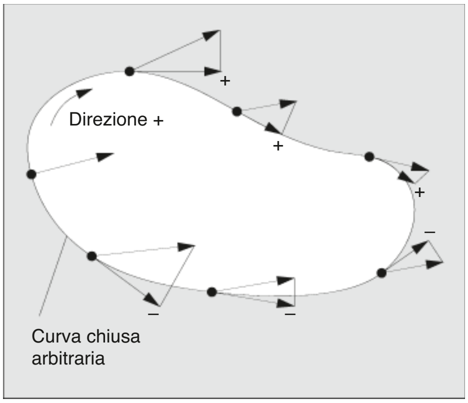

FIGURA 1.5 La circuitazione di un campo vettoriale è la componente tangenziale media del vettore (in un senso determinato) moltiplicata per il perimetro della curva chiusa.

Come vedete, questa definizione dà un numero che è proporzionale alla velocità di circuitazione nel tubo descritto sopra.

Con queste due sole idee, flusso e circuitazione, siamo in grado di esporre subito tutte le leggi dell'elettricità e del magnetismo. All'inizio potrete non capire l'importanza di queste leggi, ma vi daranno qualche idea del modo in cui la fisica dell'elettromagnetismo sarà in definitiva esposta.

1.4 Le leggi dell'elettromagnetismo

La prima legge dell'elettromagnetismo descrive il flusso del campo elettrico:

$$\text{flusso di } \boldsymbol{E} \text{ attraverso una superficie chiusa} = \\ = \frac{\text{carica totale all'interno}}{\epsilon_0} \tag{1.6}$$

dove ϵ_0 è una costante opportuna. (La costante ϵ_0 si legge di solito «epsilon zero».) Se non ci sono cariche nell'interno della superficie, anche se ce ne sono in vicinanza ma fuori di essa, la componente normale *media* di $\boldsymbol{E}$ è zero, così che non c'è alcun flusso complessivo attraverso la superficie. Per mostrare la potenza di questo tipo di affermazione, possiamo far vedere che l'equazione (1.6) equivale alla legge di Coulomb, solo che vi si aggiunga l'idea che il campo di una singola carica è sfericamente simmetrico. Tracciamo una sfera intorno a una carica puntiforme. La componente normale media viene a essere semplicemente il modulo del vettore $\boldsymbol{E}$ in un punto qualunque, giacché il campo deve essere diretto radialmente e avere la stessa intensità in tutti i punti che si trovano sulla sfera. Di conseguenza la nostra regola dice che il campo sulla superficie della sfera moltiplicato per l'area della sfera, cioè il flusso uscente, è proporzionale alla carica che si trova nell'interno. Se facessimo crescere il raggio della sfera, l'area crescerebbe come il quadrato del raggio. La componente normale media del campo elettrico moltiplicata per quell'area deve però essere ancora uguale alla carica interna, che resta la stessa e pertanto il campo deve decrescere come il quadrato del raggio: otteniamo un campo che varia con una legge di «quadrato inverso».

Se abbiamo nello spazio una curva arbitraria e misuriamo la circuitazione del campo elettrico intorno a tale curva, troveremo in generale che essa non è zero (benché lo sia per il campo coulombiano). Esiste invece una seconda legge che afferma: per ogni superficie S (non chiusa) avente per contorno la curva C si ha

$$\text{circuitazione di } \boldsymbol{E} \text{ intorno a } C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\text{flusso di } \boldsymbol{B} \text{ attraverso } S\right) \tag{1.7}$$

Possiamo completare le leggi del campo elettromagnetico scrivendo due corrispondenti equazioni per il campo magnetico $\boldsymbol{B}$. E cioè

$$\text{flusso di } \boldsymbol{B} \text{ attraverso qualsiasi superficie chiusa} = 0 \tag{1.8}$$

E per una superficie S limitata dalla curva C:

$$c^2 \cdot \left(\text{circuitazione di } \boldsymbol{B} \text{ intorno a } C\right) = \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\text{flusso di } \boldsymbol{E} \text{ attraverso } S\right) + \frac{\text{flusso della corrente elettrica attraverso } S}{\epsilon_0} \tag{1.9}$$

La costante c^2 che appare nell'equazione (1.9) è il quadrato della velocità della luce. Vi appare perché il magnetismo è in realtà un effetto relativistico dell'elettricità. La costante ϵ_0 è stata inserita perché l'unità di corrente riuscisse adeguata.

Le equazioni da (1.6) a (1.9) insieme con l'equazione (1.1) sono tutte le leggi dell'elettrodinamica[(1)]. Come ricorderete, le leggi di Newton furono molto semplici da formulare, ma ci volle

(1) Occorre aggiungere soltanto un'osservazione circa alcune convenzioni sul *segno* della circuitazione.

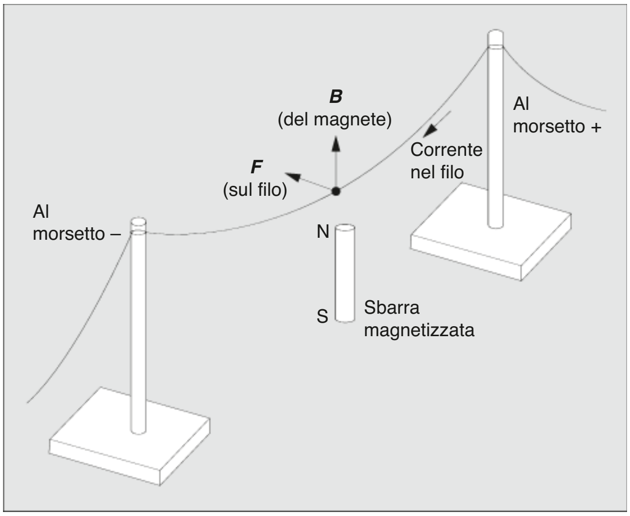

FIGURA **1.6** Il magnete produce un campo ***B*** nei punti del filo. Se questo è percorso da corrente, si muove a causa della forza ***F***=*q**v***×***B***.

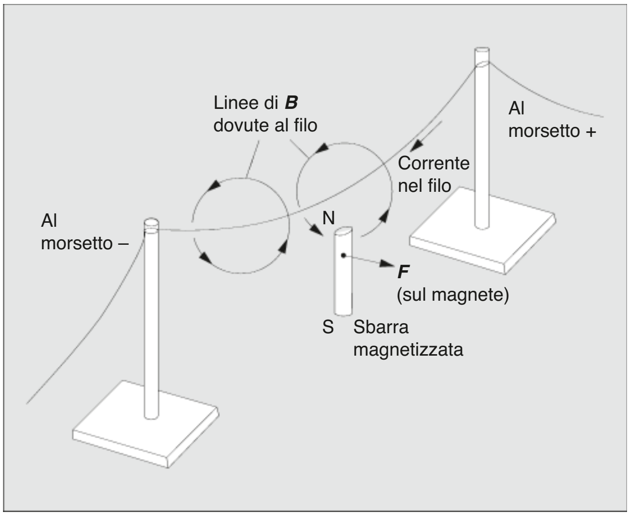

FIGURA **1.7** Il campo magnetico prodotto dalla corrente circolante nel filo interagisce col magnete, esercitando una forza su di esso.

un lungo tempo per farsi un'idea di tutte le complicate conseguenze che da esse derivano. Le presenti leggi sono molto meno semplici da formulare e ciò vuol dire che le loro conseguenze saranno ancora più complesse, così che dovremo spendere un bel po' di tempo per ricavarle tutte.

Possiamo illustrare le leggi dell'elettrodinamica con una serie di piccole esperienze che mostrano qualitativamente le interrelazioni dei campi elettrici e magnetici. Vi siete resi conto del primo termine dell'equazione (1.1) nel pettinarvi, perciò non staremo a illustrarlo. La seconda parte dell'equazione (1.1) può essere messa in evidenza facendo passare la corrente per un filo sospeso in modo lasco sopra un magnete a sbarra, come mostra la FIGURA **1.6**. Il filo si muove quando si manda la corrente, a causa della forza

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Quando esiste una corrente, le cariche nel filo si muovono: hanno perciò una velocità $\boldsymbol{v}$ e il campo magnetico esercita su di loro una forza che spinge il filo lateralmente.

Quando il filo è spinto a sinistra ci aspettiamo che il magnete subisca una spinta verso destra. (Altrimenti potremmo porre il tutto su un carrello e avere un sistema di propulsione che non conserva la quantità di moto![2]). Benché la forza sia troppo piccola per rendere visibile il moto del nostro magnete, un magnete sospeso in maniera più sensibile, come per esempio un ago di bussola, può mettere in evidenza il movimento.

Come fa il filo ad agire sul magnete? La corrente nel filo produce il suo proprio campo magnetico e questo applica forze al magnete. Conformemente all'ultimo termine dell'equazione (1.9), una corrente deve produrre una *circuitazione* di $\boldsymbol{B}$: in questo caso le linee di $\boldsymbol{B}$ sono delle curve che si chiudono attorno al filo, come si vede in FIGURA **1.7**. Questo campo $\boldsymbol{B}$ è la causa della forza sul magnete.

L'equazione (1.9) ci dice che per una data corrente nel filo la circuitazione di $\boldsymbol{B}$ deve essere la stessa per *qualsiasi* curva che circonda il filo. Per curve, per esempio cerchi, che circondano il filo a distanze crescenti la circonferenza sarà più grande e perciò la componente tangenziale di $\boldsymbol{B}$ dovrà decrescere. Potete anzi capire che $\boldsymbol{B}$ dovrà decrescere linearmente con la distanza da un filo rettilineo molto lungo.

Si è detto che una corrente che percorre un filo produce un campo magnetico e che dove c'è un campo magnetico si ha una forza su un filo che trasporta corrente. Perciò ci dobbiamo anche aspettare che il campo magnetico prodotto dalla corrente che percorre un filo eserciti una forza su

[2] «Quantità di moto» è la traduzione più precisa dell'inglese *momentum*. Tuttavia nel seguito, quando la brevità lo consigli, cercheremo anche noi di tradurre *momentum* con un singolo vocabolo, e cioè «impulso», benché a rigore questa parola indichi un concetto un po' diverso. (N.d.T.)

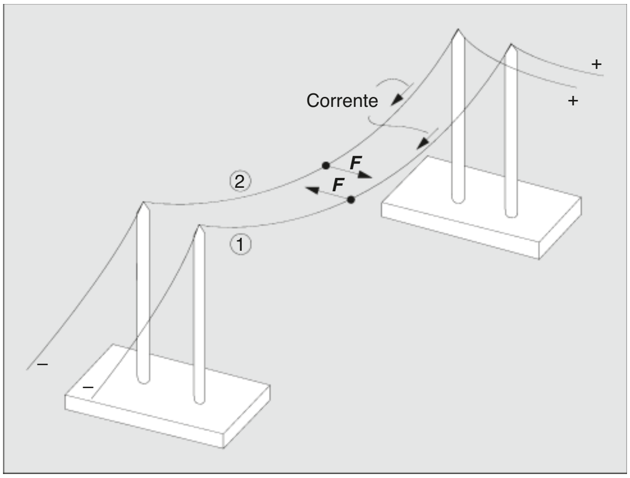

FIGURA **1.8** Due fili che portano corrente esercitano forze l'uno sull'altro. Se le correnti sono equiverse i fili si attraggono, viceversa si respingono.

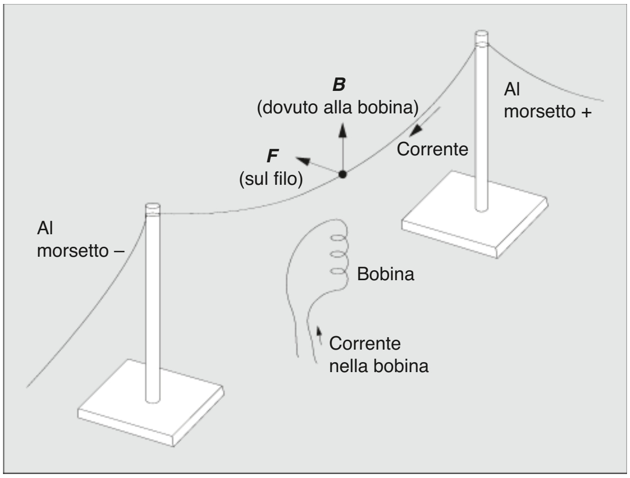

FIGURA **1.9** Il magnete della FIGURA **1.6** può essere sostituito da una bobina percorsa da corrente. Sul filo agisce ancora una forza.

un altro filo anch'esso percorso da corrente. Questo si può mostrare adoperando due fili sospesi come si vede in FIGURA **1.8**. Quando le correnti hanno la stessa direzione, i due fili si attraggono; si respingono invece quando le correnti sono opposte.

In breve, tanto le correnti che i magneti producono campi magnetici. Ma, un momento! Che cos'è dopotutto un magnete? Se i campi magnetici sono prodotti da cariche che si muovono, non potrebbe darsi che il campo magnetico prodotto da un pezzo di ferro sia in realtà il risultato di correnti? Sembra che sia proprio così. Possiamo, nel nostro esperimento, sostituire la sbarra magnetizzata con una bobina, come mostra la FIGURA **1.9**. Se si fa passare una corrente tanto nella bobina quanto nel filo che le sta sopra, osserviamo un moto del filo esattamente come prima, quando avevamo un magnete al posto della bobina. In altre parole, la corrente nella bobina imita un magnete. Sembra perciò che un pezzo di ferro agisca come se contenesse una corrente perpetuamente circolante. Si può effettivamente capire i magneti in termini di correnti permanenti che circolano negli atomi del ferro. La forza sul magnete in FIGURA **1.7** è perciò dovuta al secondo termine dell'equazione (1.1).

Qual è l'origine di queste correnti? Una possibilità sarebbe data dal moto degli elettroni su orbite atomiche. Veramente, per il ferro non è questo il caso, benché lo sia per certi materiali. Oltre a muoversi di moto orbitale in un atomo, un elettrone ruota intorno a un suo proprio asse, qualcosa di simile alla rotazione della Terra, ed è la corrente dovuta a questa rotazione che dà il campo magnetico nel ferro. (Diciamo «qualcosa di simile alla rotazione della Terra» perché la questione è così profondamente attinente alla meccanica quantistica che le idee classiche non descrivono troppo bene le cose.) Nella maggioranza dei corpi, parte degli elettroni ruota in un senso e parte nel senso opposto, così che il magnetismo si annulla per compensazione, ma nel ferro, per una misteriosa ragione che discuteremo più avanti, molti degli elettroni ruotano coi loro assi allineati e questa è la sorgente del magnetismo.

Siccome i campi dei magneti derivano da correnti, non c'è da aggiungere nessun termine in più all'equazione (1.8) o (1.9) per tener conto dei magneti. Basta considerare *tutte* le correnti, incluse le correnti dovute alla rotazione degli elettroni, perché la legge sia corretta. Dovreste anche notare che l'equazione (1.8) afferma che non ci sono «cariche» magnetiche analoghe alle cariche elettriche che appaiono nel secondo membro dell'equazione (1.6). Non se ne sono mai trovate.

Il primo termine del secondo membro dell'equazione (1.9) fu scoperto teoricamente da Maxwell e ha una grande importanza. Esso dice che campi *elettrici* variabili producono effetti magnetici. Effettivamente, senza questo termine l'equazione non avrebbe senso, perché senza di esso non ci potrebbero essere correnti in circuiti che non sono chiusi. Tali correnti però esistono, come si può vedere dal seguente esempio. Immaginiamo un condensatore fatto di due lastre piane, che si sta caricando per effetto di una corrente che fluisce da una lastra all'altra, come mostra la FIGURA **1.10**.

Tracciamo una curva C intorno a uno dei fili e a essa appoggiamo una superficie che taglia il filo, come la superficie S_1 in figura. Secondo l'equazione (1.9) la circuitazione di $\boldsymbol{B}$ intorno a C (moltiplicata per c^2) è data dalla corrente nel filo (divisa per ϵ_0). Cosa succede però se appoggiamo alla curva *C un'altra* superficie S_2 che è fatta come una coppa e passa fra le lastre del condensatore tenendosi sempre a distanza del filo? Certamente non c'è nessuna corrente attraverso questa superficie. Ma, di sicuro, il cambiamento di posto di una superficie immaginaria non può cambiare un campo magnetico realmente esistente! La circuitazione di $\boldsymbol{B}$ deve rimanere la stessa. Il primo termine al secondo membro dell'equazione (1.9) coopera infatti col secondo termine per dare lo stesso risultato per le due superfici S_1 e S_2. Per S_2 la circuitazione di $\boldsymbol{B}$ è espressa per mezzo della velocità di variazione del flusso di $\boldsymbol{E}$ fra le lastre del condensatore. E si trova che il campo elettrico variabile $\boldsymbol{E}$ è legato alla corrente proprio nel modo che ci vuole perché l'equazione (1.9) sia valida. Maxwell vide la necessità di questo e fu il primo a scrivere l'equazione completa.

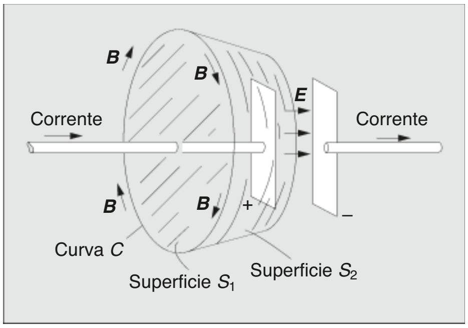

FIGURA **1.10** La circuitazione di $\boldsymbol{B}$ intorno alla curva C è data sia dalla corrente che attraversa la superficie S_1, sia dalla velocità di variazione del flusso di $\boldsymbol{E}$ attraverso la superficie S_2.

Col dispositivo indicato in FIGURA **1.6** possiamo illustrare un'altra delle leggi dell'elettromagnetismo. Stacchiamo dalla batteria i terminali del filo sospeso e colleghiamoli con un galvanometro che può dirci quando c'è una corrente nel filo. Osserviamo una tale corrente quando *spingiamo* il filo trasversalmente attraverso il campo magnetico. Tale effetto è semplicemente un'altra conseguenza dell'equazione (1.1): gli elettroni nel filo risentono una forza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Essi hanno una velocità trasversale perché si muovono col filo. Questa velocità $\boldsymbol{v}$ insieme col campo verticale $\boldsymbol{B}$ del magnete produce una forza sugli elettroni diretta *lungo* il filo, che li mette in moto verso il galvanometro.

Supponiamo tuttavia di non toccare il filo e di muovere il magnete. La relatività ci suggerisce che ciò non dovrebbe produrre differenza e infatti osserviamo come prima una corrente nel galvanometro. Com'è che il campo magnetico produce delle forze su delle cariche in quiete? Secondo l'equazione (1.1) ciò vuol dire che ci deve essere un campo elettrico: un magnete che si muove deve produrre un campo elettrico. Come ciò avvenga è detto quantitativamente dall'equazione (1.7). Questa equazione descrive molti fenomeni di grande interesse pratico, come quelli che avvengono nei generatori e nei trasformatori elettrici.

La più notevole conseguenza delle nostre equazioni è che la combinazione delle equazioni (1.7) e (1.9) contiene la spiegazione dell'irradiazione degli effetti elettromagnetici su grandi distanze. La ragione è all'incirca questa: supponiamo di avere in qualche punto un campo magnetico che sta aumentando perché, per esempio, una corrente è immessa improvvisamente in un filo. Allora, secondo l'equazione (1.7) ci deve essere una circuitazione di un campo elettrico. Mentre il campo elettrico cresce per dare la sua circuitazione, si produrrà, a norma dell'equazione (1.9), una circuitazione magnetica. Ma il costituirsi di *questo* campo magnetico produrrà una nuova circuitazione di campo elettrico e così via. In questo modo i campi riescono a propagarsi attraverso lo spazio senza bisogno di cariche o correnti, eccetto alla loro sorgente. Questo è il modo con cui noi ci *vediamo* l'un l'altro! Tutto è contenuto nelle equazioni dei campi elettromagnetici.

1.5 Cosa sono i campi?

Facciamo ora alcune osservazioni sul nostro modo di considerare il nostro tema. Forse state pensando: «Tutta questa faccenda di flussi e circolazioni è piuttosto astratta. Ci sono campi elettrici in ogni punto dello spazio, poi ci sono queste ‹leggi›. Ma che cos'è che *effettivamente* avviene? Perché non possiamo spiegarlo per mezzo di quello che realmente ha luogo, qualunque cosa *sia*, fra le cariche?». Ebbene, ciò dipende dai vostri pregiudizi.

Molti fisici erano soliti dire che un'azione diretta senza nulla come intermediario era inconcepibile. (Come potevano trovare inconcepibile un'idea già concepita?) Essi dicevano: «Fate attenzione, le sole forze che conosciamo sono le azioni dirette di una porzione di materia su un'altra porzione. È impossibile che esista una forza senza nulla che la trasmette». Ma che cosa succede realmente se studiamo «l'azione diretta» di una porzione di materia a contatto immediato con un'altra? Scopriamo che il contatto immediato non esiste, perché le due porzioni sono sempre leggermente separate e ci sono invece delle forze elettriche agenti su scala minuscola. In questo modo troviamo che ci tocca spiegare la cosiddetta azione per contatto diretto nei termini della rappresentazione delle forze elettriche.

Non è certamente sensato tentare d'insistere che una forza elettrica deve somigliare alla familiare spinta o trazione muscolare, quando poi risulterà che le spinte o trazioni muscolari bisogna interpretarle come forze elettriche! L'unica domanda sensata è quale sia la maniera *più comoda* di considerare gli effetti elettrici. Alcuni preferiscono rappresentarli come interazioni a distanza di cariche, usando una legge complicata. Altri sono affezionati alle linee di campo e disegnano linee di campo in ogni circostanza, sembrando loro che scrivere vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ sia troppo astratto.

Le linee di campo, tuttavia, sono soltanto un modo grossolano di descrivere il campo ed è molto difficile dare le leggi quantitative corrette direttamente per mezzo di linee di campo. Inoltre l'idea delle linee di campo non contiene il principio più profondo dell'elettrodinamica, cioè il principio di sovrapposizione. Anche se conosciamo l'aspetto delle linee di campo per due sistemi di cariche separatamente, questo non ci dà nessuna idea di quella che sarà la configurazione delle linee di campo quando i due sistemi sono presenti insieme. Adoperando il punto di vista matematico, d'altra parte, la sovrapposizione è facile: si tratta semplicemente di sommare due vettori. Le linee di campo hanno qualche vantaggio in quanto danno una rappresentazione vivida, ma hanno anche degli svantaggi. Il modo di pensare basato sulle interazioni dirette è molto vantaggioso quando ci si riferisce a cariche elettriche in quiete, ma ha grandi svantaggi quando si devono trattare cariche in rapido movimento.

La via migliore è quella di usare l'idea del campo astratto; che sia astratto è una sfortuna, ma è una cosa necessaria. I tentativi di rappresentare il campo elettrico come movimento di qualche sorta di ruote dentate oppure in termini di linee, o di tensioni in qualche sorta *di* materiale, sono costati ai fisici più sforzi di quelli che ci sarebbero voluti per ottenere semplicemente le risposte corrette dei problemi elettrodinamici. È interessante ricordare che le equazioni corrette per il comportamento della luce nei cristalli furono elaborate da MacCullagh nel 1843. Gli altri però gli dicevano: «Sì, ma non esiste nessun materiale le cui proprietà meccaniche possano soddisfare codeste equazioni e siccome la luce è un'oscillazione che deve aver luogo in *qualcosa*, non possiamo aver fiducia in codesta faccenda fondata su equazioni astratte». Se i fisici avessero avuto una mente più aperta, avrebbero potuto affidarsi con un bel po' di anticipo alle equazioni corrette per il comportamento della luce.

Nel caso del campo magnetico possiamo argomentare come segue. Supponiamo di esser finalmente riusciti a costruire una rappresentazione del campo per mezzo di linee oppure di ruote dentate che si muovono attraverso lo spazio. Tentiamo allora di spiegare che cosa succede a due cariche che si muovono tutte e due con la stessa velocità e parallelamente. Siccome si muovono, si comporteranno come due correnti e quindi avranno un campo magnetico associato (come le correnti nei fili della FIGURA **1.8**). Un osservatore che viaggiasse insieme alle cariche, però, le considererebbe stazionarie e direbbe che *non c'è* campo magnetico. Le «ruote dentate» o le «linee» spariscono, dunque, quando ci si muove insieme all'oggetto! Tutto quello che abbiamo fatto è inventare un *nuovo* problema: come possono sparire le ruote dentate? Quelli che tracciano linee di campo, si trovano in analoghe difficoltà. Non soltanto non è possibile dire se le linee del campo si muovono o non si muovono insieme alle cariche: esse possono sparire del tutto in certi sistemi di riferimento.

Tutto ciò equivale a dire che il magnetismo è realmente un effetto relativistico. Nel caso delle due cariche ora considerate che viaggiano parallelamente l'una all'altra, ci si aspetta di dover fare delle correzioni relativistiche al loro moto, mediante termini dell'ordine di v^2/c^2. Queste correzioni devono corrispondere alla forza magnetica. Cosa si può dire però sulla forza fra i due fili nell'esperienza in FIGURA **1.8**? In questo caso la forza magnetica è l'*intera* forza: non ha l'aspetto di una «correzione relativistica». Inoltre, se stimiamo la velocità degli elettroni nel filo (lo potete fare voi stessi) troviamo che la loro velocità media lungo il filo è circa 0,01 cm/s. Perciò v^2/c^2 è circa 10^{-25}, certo una correzione trascurabile. Eppure no! Benché la forza magnetica sia in questo caso la frazione 10^{-25} della «normale» forza elettrica fra gli elettroni in moto, dovete ricordarvi che le «normali» forze elettriche sono scomparse, a causa della compensazione quasi perfetta che si ha per il fatto che i fili hanno lo stesso numero di protoni e di elettroni. Tale compensazione è molto più precisa che una parte su 10^{25} e il piccolo termine relativistico che chiamiamo forza magnetica è il solo termine superstite. Diventa perciò il termine dominante.

È il quasi perfetto annullamento degli effetti elettrici che permise di studiare effetti relativistici (cioè il magnetismo) e di scoprire le equazioni corrette (fino all'ordine v^2/c^2), benché i fisici non *sapessero* che questo era ciò che stava accadendo. E questa è la ragione per cui quando la relatività fu scoperta non ci fu bisogno di modificare le leggi dell'elettromagnetismo. Esse, a differenza di quelle della meccanica, erano già corrette, fino a una precisione dell'ordine di v^2/c^2.

1.6 L'elettromagnetismo nella scienza e nella tecnica

Per chiudere questo capitolo vogliamo rilevare che c'erano due fenomeni molto strani fra i molti studiati dai greci. Essi sapevano infatti che strofinando un pezzo d'ambra si potevano sollevare dei pezzettini di papiro e che c'era una strana roccia, proveniente dall'isola di Magnesia, che attirava il ferro. Si resta sbalorditi a pensare che quelli erano gli unici fenomeni noti ai greci nei quali si manifestassero elettricità e magnetismo. La ragione per cui questi erano gli unici fenomeni che apparivano è dovuta essenzialmente alla fantastica precisione nella compensazione delle cariche che abbiamo ricordato prima. Gli studi degli scienziati che vennero dopo i greci rilevarono, uno dopo l'altro, nuovi fenomeni che erano realmente altri aspetti dei fenomeni mostrati dall'ambra o dalla magnetite. Oggi ci rendiamo conto che anche i fenomeni di interazione chimica e, in ultima analisi, quelli della vita stessa, sono da interpretare in termini di elettromagnetismo.

Nello stesso tempo in cui si sviluppava una comprensione dei fenomeni elettromagnetici, apparivano possibilità tecniche che sfidavano l'immaginazione delle precedenti generazioni: divenne possibile inviare segnali a grandi distanze per telegrafo; parlare ad altre persone lontane molte miglia senza alcuna connessione intermedia; far funzionare reti elettriche di enorme potenza: grandi turbine ad acqua, connesse attraverso fili lunghi centinaia di miglia a motori che girano in risposta alla turbina centrale, molte migliaia di fili di diramazioni, decine di migliaia di motori, in decine di migliaia di luoghi, che fanno marciare le macchine delle industrie e quelle delle case; tutto ciò funziona perché conosciamo le leggi dell'elettromagnetismo.

Oggi troviamo applicazioni per effetti anche più raffinati. Le forze elettriche, pur essendo enormi, possono essere anche molto modeste e possiamo controllarle per servircene in molte maniere. I nostri strumenti sono così delicati che possiamo dire ciò che un uomo fa dal modo con cui altera il moto degli elettroni in un'asticella metallica distante centinaia di miglia. Tutto quello che occorre è adoperare l'asticella come antenna per un televisore!

Guardando alla storia dell'umanità su un lungo periodo di tempo, diciamo diecimila anni da oggi, ci possono essere pochi dubbi che la scoperta di Maxwell delle leggi dell'elettrodinamica sarà giudicata l'evento più significativo del XIX secolo. La guerra civile americana apparirà come un insignificante avvenimento provinciale in confronto a quell'importante evento scientifico dello stesso decennio.

2 Calcolo differenziale dei campi vettoriali

2.1 Come capire la fisica

Ripasso: vol. 1, cap. 11, *Vettori*

Il fisico ha bisogno di una certa pratica nel vedere i problemi sotto diversi punti di vista. L'analisi esatta dei fenomeni fisici reali è di solito molto complicata e qualunque situazione fisica può riuscire troppo complessa per poterla analizzare direttamente, andando a trovare la soluzione dell'equazione differenziale del problema. Si può però ottenere ugualmente un'idea molto buona del comportamento del sistema se si ha un certo intuito per il carattere delle soluzioni in diverse circostanze. Idee tipo le linee di campo, la capacità, la resistenza e l'induttanza sono molto utili a tale scopo e perciò dedicheremo molto del nostro tempo ad analizzarle. In questo modo acquisteremo una certa intuizione di ciò che dovrebbe accadere in situazioni elettromagnetiche diverse.

D'altra parte, nessuno di questi modelli euristici, tipo le linee di campo, è realmente adeguato e preciso per tutte le situazioni. C'è una sola maniera esatta di presentare le leggi e questa è di servirsi delle equazioni differenziali. Esse hanno il vantaggio di essere fondamentali e, per quanto se ne sa, esatte. Se avrete imparato le equazioni differenziali di una certa classe di fenomeni, potrete sempre tornare a quelle. Non c'è nulla da disimparare.

Ci vorrà un certo tempo perché possiate capire che cosa dovrebbe accadere quando cambiano le circostanze. Vi toccherà risolvere le equazioni e ogni volta che le risolverete imparerete qualcosa sul carattere delle soluzioni. Per tenere a mente queste soluzioni sarà utile anche studiare il loro significato per mezzo di linee di campo e altri concetti. Questo è il modo in cui potrete realmente «capire» le equazioni. Qui sta la differenza fra la matematica e la fisica.

I matematici o quelli che hanno una mente molto matematica spesso si sviano quando «studiano» la fisica perché perdono di vista la fisica. Essi dicono: «Vedete, queste equazioni differenziali (le equazioni di Maxwell) sono tutto quel che c'è nell'elettrodinamica; è ammesso dai fisici che non c'è nulla che non sia contenuto in tali equazioni. Queste equazioni sono complicate, ma dopo tutto non sono altro che equazioni matematiche, e se mi riesce di sviscerarle matematicamente, avrò sviscerato la fisica». Le cose però non vanno così. I matematici che studiano la fisica da questo punto di vista (e ce ne sono stati molti) di solito contribuiscono poco alla fisica e poco, in fondo, anche alla matematica. Essi falliscono perché le effettive situazioni fisiche nel mondo reale sono talmente complicate che è necessario avere una comprensione molto più larga delle equazioni.

Che cosa significhi veramente capire un'equazione, cioè capirla al di là di un senso strettamente matematico, è stato spiegato da Dirac. Egli dice: «Capisco ciò che significa un'equazione se, senza effettivamente risolverla, ho modo di ricavare le caratteristiche della soluzione». Perciò se abbiamo modo di conoscere che cosa dovrebbe succedere in date circostanze senza effettivamente risolvere le equazioni, allora noi «capiamo» le equazioni nella loro applicazione a quelle circostanze. La comprensione fisica è una cosa completamente non matematica, imprecisa e inesatta, ma assolutamente necessaria al fisico.

Ordinariamente un corso come questo viene svolto sviluppando gradualmente le idee fisiche, cominciando da situazioni semplici e procedendo a considerare situazioni sempre più complesse. Questo comporta il dimenticare continuamente cose precedentemente imparate, cioè quelle che sono vere in certe circostanze, ma non sono vere in generale. Per esempio, la «legge» che la forza elettrica dipende dal quadrato della distanza non è *sempre* vera. Preferiamo procedere nel modo opposto. Preferiamo cioè partire dalle leggi *complete* e poi retrocedere per applicarle a situazioni semplici, sviluppando via via le idee fisiche. E questo è quello che faremo.

Questo metodo è del tutto opposto al metodo storico, nel quale la materia viene sviluppata secondo le esperienze attraverso le quali l'informazione fu ottenuta. Ma lo studio della fisica è stato sviluppato negli ultimi duecento anni da diversi grandi ingegni e, dato che abbiamo soltanto un tempo limitato per acquisire le nostre conoscenze, non possiamo certo coprire tutto quello che essi fecero. Perciò, disgraziatamente, una cosa che andrà facilmente perduta in queste lezioni è lo sviluppo storico, sperimentale. Speriamo che questa lacuna possa essere corretta in parte nel corso di esercitazioni. Inoltre ciò che dovrà essere tralasciato lo potrete anche reintegrare ricorrendo all'Enciclopedia Britannica, che contiene eccellenti articoli storici sull'elettricità e altre parti della fisica. Troverete inoltre informazioni storiche in molti testi di elettricità e magnetismo.

2.2 Campi scalari e vettoriali: *T* e *h*

Cominciamo ora con l'impostazione astratta, matematica, della teoria dell'elettricità e del magnetismo. Lo scopo finale è quello di spiegare il significato delle leggi enunciate nel capitolo 1, ma per far questo dobbiamo prima spiegare una speciale notazione che desideriamo usare. Perciò dimentichiamoci per il momento dell'elettromagnetismo e andiamo a discutere la matematica dei campi vettoriali. È un argomento di grande importanza non soltanto per l'elettromagnetismo, ma per ogni genere di circostanze fisiche. Proprio come l'ordinario calcolo differenziale e integrale è tanto importante per tutti i rami della fisica, così lo è il calcolo differenziale dei vettori. Volgiamoci dunque a questo tema. Qui sotto elenchiamo alcune reazioni dell'algebra vettoriale che si suppongono già note.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \text{scalare} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \text{vettore} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_z &= A_x B_y - A_y B_x \\ (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_y &= A_z B_x - A_x B_z\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{2.6}$$

Inoltre avremo bisogno delle due seguenti uguaglianze del calcolo infinitesimale:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\Delta z \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \tag{2.8}$$

L'equazione (2.7) è vera, naturalmente, solo al limite per Δx, Δy e Δz tendenti a zero.

Il campo fisico più semplice possibile è un campo scalare. Per campo, come ricorderete, intendiamo una grandezza che dipende dalla posizione nello spazio. Per *campo scalare* si intende semplicemente un campo che è caratterizzato in ogni punto da un singolo numero, cioè da uno scalare. Naturalmente il numero può variare col tempo, ma per il momento non è necessario darsene pensiero perché ci occuperemo di come si presenta il campo a un dato istante. Come

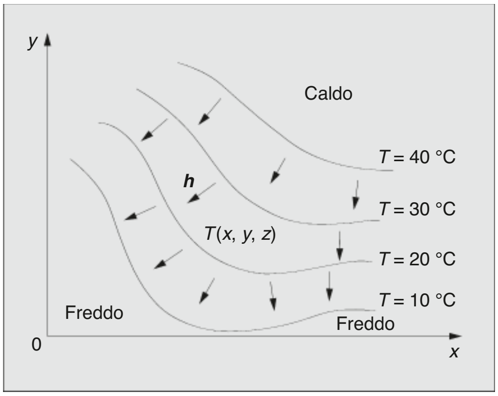

FIGURA **2.1** La temperatura T è un esempio di campo scalare. A ogni punto (x, y, z) dello spazio è associato un numero $T(x, y, z)$. Tutti i punti della superficie segnata $T = 20$ °C (la curva ne dà l'intersezione col piano $z = 0$) sono alla stessa temperatura. Le frecce indicano particolari valori del vettore flusso termico $\boldsymbol{h}$.

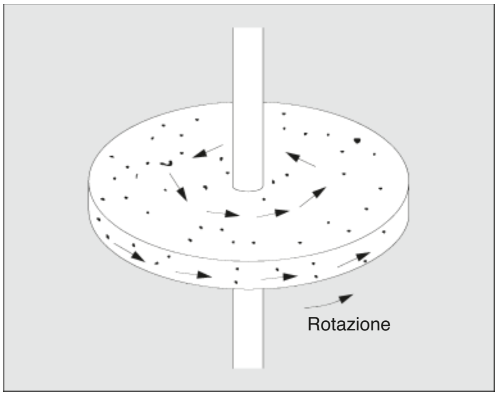

FIGURA **2.2** La velocità degli atomi in un oggetto rotante è un esempio di campo vettoriale.

esempio di campo scalare, consideriamo un blocco compatto di materiale il quale sia stato scaldato in certi punti e raffreddato in altri, così che la temperatura del corpo vari da punto a punto in un modo complicato. La temperatura sarà una funzione di x, y e z, ossia della posizione nello spazio riferita a un sistema di coordinate ortogonali: essa è un campo scalare.

Un modo di rappresentare i campi scalari è di immaginare delle «superfici di uguale livello», le quali sono superfici immaginarie condotte per tutti i punti dove il campo ha lo stesso valore, proprio come le linee di uguale livello su una carta topografica uniscono i punti che hanno la stessa altitudine. Per un campo di temperatura le superfici di uguale livello si chiamano «superfici isoterme» o semplicemente «isoterme». La FIGURA **2.1** illustra un campo di temperatura mostrando la dipendenza di T da x e y quando $z = 0$. Sono state tracciate diverse isoterme.

Ci sono poi i campi vettoriali. L'idea è molto semplice: basta che in ogni punto dello spazio sia dato un vettore, vettore che varia da punto a punto. Come esempio consideriamo un corpo che ruota. La velocità del materiale del corpo in ogni punto è un vettore che è funzione della posizione (FIGURA **2.2**). Come secondo esempio, consideriamo il flusso di calore in un blocco di materiale. Se la temperatura nel blocco è alta in un posto e bassa in un altro, ci sarà un flusso di calore dai punti più caldi a quelli più freddi. Il calore fluirà in direzioni diverse nelle diverse parti del blocco: tale flusso termico è perciò una grandezza direzionale che indichiamo con $\boldsymbol{h}$. Il suo modulo è una misura di quanto calore fluisce. Esempi del vettore flusso termico sono anche indicati in FIGURA **2.1**.

Precisiamo la definizione di $\boldsymbol{h}$: il modulo del vettore flusso termico in un punto è la quantità d'energia termica che passa per unità di tempo e d'area attraverso un elemento infinitesimo di superficie disposto ad angolo retto rispetto alla direzione del flusso. Il vettore ha per direzione la direzione del flusso (FIGURA **2.3**). In simboli: se ΔJ è l'energia termica che attraversa nell'unità di tempo l'elemento di superficie Δa allora è

$$\boldsymbol{h} = \frac{\Delta J}{\Delta a}\, \boldsymbol{e}_{\mathrm{f}} \tag{2.9}$$

dove $\boldsymbol{e}_{\mathrm{f}}$ è un *versore*, cioè un vettore di modulo unitario, diretto come il flusso.

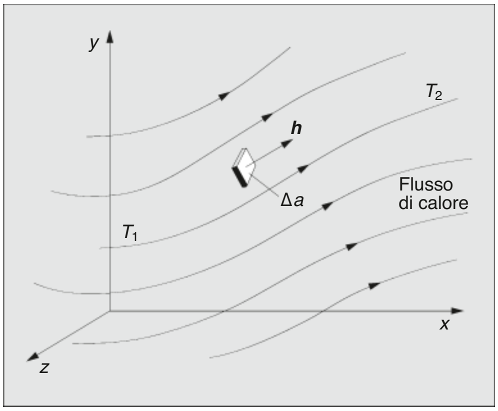

FIGURA **2.3** Il flusso di calore è un campo vettoriale. Il vettore $\boldsymbol{h}$ ha per direzione quella del flusso. Il suo modulo è l'energia trasportata per unità di tempo attraverso un elemento di superficie orientato perpendicolarmente al flusso, divisa per l'area dell'elemento.

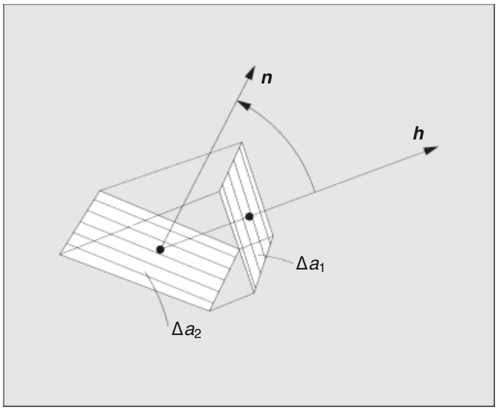

FIGURA **2.4** Il flusso di calore attraverso Δa_2 è lo stesso che attraversa Δa_1.

Il vettore $\boldsymbol{h}$ può esser definito in un altro modo e cioè in base alle sue componenti. Domandiamoci quanto calore fluisce attraverso una piccola superficie che fa un angolo qualunque col flusso. Nella FIGURA **2.4** si vede una piccola superficie Δa_2 inclinata rispetto alla Δa_1, che è perpendicolare al flusso. Il *versore* $\boldsymbol{n}$ è normale alla superficie Δa_2. L'angolo θ fra $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{h}$ è lo stesso di quello fra le due superfici (perché $\boldsymbol{h}$ è normale a Δa_1). Ora, qual è il flusso di calore *per unità d'area* attraverso Δa_2? Il flusso attraverso Δa_2 è lo stesso che attraversa Δa_1, solo le aree sono diverse; infatti

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos\theta$$

Il flusso di calore attraverso Δa_2 è perciò

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1}\cos\theta = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} \tag{2.10}$$

L'interpretazione di questa equazione è: il flusso di calore (per unità di tempo e di area) attraverso *un qualsiasi* elemento di superficie, il cui versore normale è $\boldsymbol{n}$, è dato dal prodotto $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$.

Potremmo ugualmente dire: la componente del flusso termico perpendicolarmente all'elemento di superficie Δa_2 è il prodotto $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$. Se si vuole, si può pensare quest'affermazione come una definizione di $\boldsymbol{h}$. Ci troveremo ad applicare le stesse idee anche ad altri campi vettoriali.

2.3 Derivate dei campi. Il gradiente

Quando i campi variano col tempo, possiamo descriverne la variazione dando le loro derivate rispetto a t. Vogliamo descrivere in una maniera analoga le variazioni con la posizione, perché c'interessa, mettiamo, la relazione fra la temperatura in un punto e la temperatura in un punto vicino. Come si può fare la derivata della temperatura rispetto alla posizione? Deriveremo la temperatura rispetto a x? Oppure rispetto a y o a z?

Le leggi fisiche veramente utili non dipendono dall'orientazione del sistema di coordinate e perciò dovrebbero essere scritte in una forma in cui i due membri sono ambedue scalari o ambedue vettori. Cos'è la derivata di un campo scalare, mettiamo $\partial T/\partial x$? È uno scalare, un vettore o che cosa? Come potrete constatare facilmente, non è né uno scalare né un vettore, perché se si prendesse un asse x diverso, $\partial T/\partial x$ sarebbe certamente diverso. Però, fate attenzione, abbiamo tre possibili derivate: $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$. Siccome ci sono tre specie di derivate, e sappiamo che ci vogliono tre numeri per formare un vettore, forse queste tre derivate sono le componenti di un vettore:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \overset{?}{=} \text{un vettore} \tag{2.11}$$

Naturalmente, non è generalmente vero che *qualsiasi* terna di numeri formi un vettore: ciò è vero se nelle rotazioni del sistema di coordinate le componenti del vettore si trasformano fra loro nel modo corretto. Perciò è necessario analizzare come queste derivate si mutano per effetto di una rotazione del sistema di coordinate. Mostreremo che la (2.11) è realmente un vettore: le derivate si trasformano, effettivamente, nel modo corretto quando il sistema di coordinate viene ruotato.

Questo si può vedere in diversi modi. Un modo è quello di porsi una domanda la cui risposta è indipendente dal sistema di coordinate e cercare di esprimere tale risposta in forma «invariante». Per esempio, se è $S = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono vettori, sappiamo, per averlo provato nel cap. 11 del vol. 1, che S è uno scalare. *Sappiamo* che S è uno scalare anche senza andare a cercare se varia quando cambiamo il sistema di coordinate: esso *non può* variare, proprio perché è il prodotto scalare di due vettori. Similmente, se *sappiamo* che $\boldsymbol{A}$ è un vettore e abbiamo tre numeri, B_1, B_2 e B_3, tali che risulta

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \tag{2.12}$$

dove S è lo stesso in tutti i sistemi di coordinate, allora i tre numeri, B_1, B_2 e B_3, *devono* essere le componenti B_x, B_y e B_z di un vettore $\boldsymbol{B}$.

Torniamo adesso al campo di temperatura. Supponiamo di prendere due punti P_1 e P_2 separati da una piccola distanza $\Delta\boldsymbol{R}$. Le temperature in P_1 e P_2 siano rispettivamente T_1 e T_2, e la loro

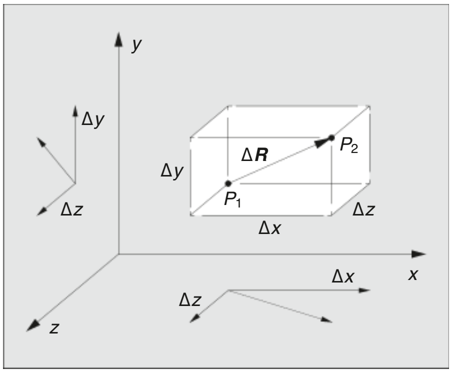

FIGURA 2.5 Il vettore $\Delta\boldsymbol{R}$ le cui componenti sono Δx, Δy e Δz.

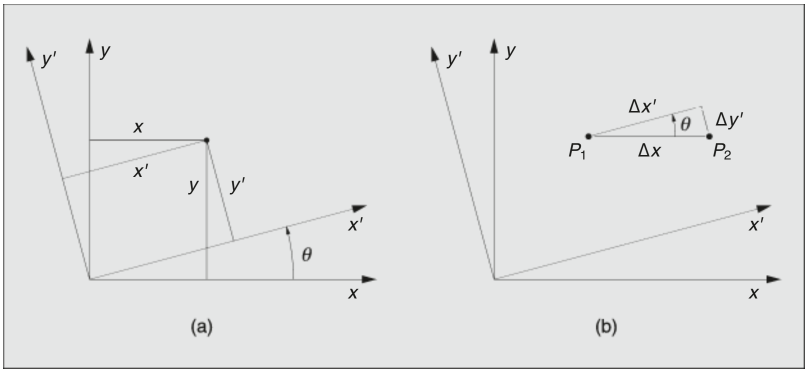

FIGURA 2.6 (a) Passaggio a un sistema di coordinate ruotato. (b) Caso particolare di un intervallo $\Delta\boldsymbol{R}$ parallelo all'asse x.

differenza sia $\Delta T = T_2 - T_1$. La temperatura in questi due punti reali, fisici, non dipende certo da quali assi scegliamo per misurare le coordinate. In particolare, ΔT è un numero indipendente dal sistema di coordinate, ossia è uno scalare. Una volta scelto un conveniente sistema di assi, potremo scrivere

$$T_1 = T(x, y, z)$$

$$T_2 = T(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

dove x, y e z sono le componenti del vettore $\Delta\boldsymbol{R}$ (FIGURA **2.5**). Ricordando l'equazione (2.7), avremo

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\,\Delta z \tag{2.13}$$

Il primo membro di questa equazione (2.13) è uno scalare; il secondo membro è la somma di tre prodotti con i rispettivi fattori Δx, Δy e Δz che sono le componenti di un vettore. Ne segue che anche i tre numeri $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial z$ sono le componenti secondo x, y e z di un vettore.

Denoteremo questo nuovo vettore col simbolo $\boldsymbol{\nabla} T$. Il simbolo $\boldsymbol{\nabla}$ (chiamato «del») è una Δ capovolta e serve a richiamare l'idea della differenziazione; può esser letto in vari modi: «del-T», «gradiente di T», «grad T». Scriveremo[1]

$$\operatorname{grad} T = \boldsymbol{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.14}$$

Usando questa notazione, possiamo riscrivere l'equazione (2.13) in una forma più concisa:

$$\Delta T = \boldsymbol{\nabla} T \cdot \Delta\boldsymbol{R} \tag{2.15}$$

A parole, questa equazione dice che la differenza di temperatura fra due punti vicini è il prodotto scalare del gradiente di T per il vettore spostamento fra i due punti. La forma dell'equazione (2.15) illustra anche chiaramente la nostra precedente dimostrazione che $\boldsymbol{\nabla} T$ è veramente un vettore.

Forse non ne siete ancora convinti. Proviamolo in un modo diverso (benché se guardate attentamente, potrete accorgervi che si tratta realmente della stessa prova in una forma meno concisa). Mostreremo che le componenti di $\boldsymbol{\nabla} T$ si trasformano proprio nello stesso modo delle componenti di $\boldsymbol{R}$. Se questo è, $\boldsymbol{\nabla} T$ è un vettore in base alla nostra primitiva definizione di vettore (cap. 11 del vol. 1). Prendiamo un nuovo sistema di coordinate x', y' e z' e in questo nuovo sistema calcoliamo $\partial T/\partial x'$, $\partial T/\partial y'$ e $\partial T/\partial z'$. Perché le cose riescano un po' più semplici, facciamo $z = z'$, così che possiamo disinteressarci della coordinata z. (Potrete controllare voi stessi il caso più generale.)

---

[1] Nella notazione qui adottata, l'espressione (a, b, c) rappresenta un vettore con componenti a, b e c. La (2.14) equivale quindi a scrivere

$$\boldsymbol{\nabla} T = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial T}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

avendo introdotto i versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$.

Prendiamo un sistema $x'y'$ ruotato di un angolo θ rispetto al sistema xy, come in FIGURA **2.6**a. Le coordinate di un punto (x, y) nel sistema accentato sono:

$$x' = \quad x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.16}$$

$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \tag{2.17}$$

ossia, risolvendo per x e y,

$$x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.18}$$

$$y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta \tag{2.19}$$

Se due numeri si trasformano come fanno x e y secondo queste equazioni, essi sono le componenti di un vettore.

Adesso consideriamo la differenza di temperatura fra due punti vicini P_1 e P_2 scelti come in FIGURA **2.6**b. Calcolando con le coordinate x e y verrebbe

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\Delta x \tag{2.20}$$

perché Δy è nullo.

Cosa darebbe invece un calcolo nel sistema accentato? Darebbe

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'}\,\Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'}\,\Delta y' \tag{2.21}$$

Dalla FIGURA **2.6**b vediamo che

$$\Delta x' = \quad \Delta x\cos\theta \tag{2.22}$$

$$\Delta y' = -\Delta x\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.23}$$

giacché Δy è negativo quando Δx è positivo. Sostituendo queste espressioni nell'equazione (2.21) troviamo

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'}\,\Delta x\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\,\Delta x\,\mathrm{sen}\,\theta = \tag{2.24}$$

ossia

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Delta x \tag{2.25}$$

Confrontando l'equazione (2.25) con la (2.20) vediamo che si ha

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.26}$$

Questa equazione dice che $\partial T/\partial x$ si ottiene da $\partial T/\partial x'$ e $\partial T/\partial y'$ proprio come x si ottiene da x' e y' secondo l'equazione (2.18). Perciò $\partial T/\partial x$ è la componente secondo x di un vettore.

Lo stesso tipo di ragionamento mostrerebbe che $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial z$ sono le componenti secondo y e z. Perciò $\boldsymbol{\nabla}T$ è chiaramente un vettore. Si tratta di un campo vettoriale derivato dal campo scalare T.

2.4 L'operatore ∇

A questo punto possiamo fare qualcosa di estremamente divertente e ingegnoso – e anche caratteristico di quelle cose che rendono bella la matematica. Il ragionamento per dimostrare che grad T, ossia $\boldsymbol{\nabla}T$, è un vettore, non dipende da *quale* campo scalare si deriva. Tutto procederebbe allo stesso modo se T fosse sostituito da *qualsiasi altro campo scalare*. Perciò, siccome le equazioni di trasformazione sono le stesse qualunque sia lo scalare che deriviamo, si potrebbe dopotutto omettere T e sostituire l'equazione (2.26) con l'equazione operatoriale:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos\theta - \frac{\partial}{\partial y'} \operatorname{sen}\theta \tag{2.27}$$

Lasciamo cioè gli operatori, secondo la frase di Jeans, «affamati di qualcosa da derivare».

Siccome gli operatori di derivazione si trasformano essi stessi come le componenti di un vettore, possiamo chiamarli componenti di un *operatore vettoriale*. Possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{2.28}$$

che significa naturalmente

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y} \qquad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.29}$$

Abbiamo operato il distacco del gradiente da T: questa è l'idea meravigliosa.

Dovete sempre ricordare, naturalmente, che $\boldsymbol{\nabla}$ è un operatore; da solo non significa nulla. Se $\boldsymbol{\nabla}$ di per sé non significa nulla, che cosa viene a significare se lo moltiplichiamo per uno scalare – mettiamo T – ottenendo il prodotto $T\boldsymbol{\nabla}$? (Si può sempre moltiplicare un vettore per uno scalare.) Continua a non significare nulla. La sua componente x è

$$T\,\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.30}$$

che non è un numero, ma ancora un operatore. Tuttavia, secondo l'algebra dei vettori, anche $T\boldsymbol{\nabla}$ sarebbe da considerare un vettore.

Adesso moltiplichiamo $\boldsymbol{\nabla}$ per uno scalare, ma a destra in modo da ottenere il prodotto $\boldsymbol{\nabla}T$. Nell'algebra ordinaria è

$$T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}T \tag{2.31}$$

ma dobbiamo tenere a mente che l'algebra degli operatori è un po' diversa dall'ordinaria algebra vettoriale. Quando si tratta di operatori dobbiamo sempre tenerli nel giusto ordine, in modo che le operazioni abbiano il corretto significato. Non troverete alcuna difficoltà in questo, ricordando semplicemente che l'operatore $\boldsymbol{\nabla}$ obbedisce alla stessa convenzione della notazione di derivata: ciò che deve esser derivato deve essere posto a destra di $\boldsymbol{\nabla}$. L'ordine è importante.

Tenendo presente questo problema dell'ordine, si capisce che $T\boldsymbol{\nabla}$ è un operatore, ma il prodotto $\boldsymbol{\nabla}T$ non è più un operatore affamato: l'operatore è completamente sazio. È infatti un vettore fisico avente un suo significato; esso rappresenta la velocità di variazione spaziale di T. Per esempio, la componente x di $\boldsymbol{\nabla}T$ esprime quanto rapidamente T cambia nella direzione x. Quale sarà la direzione del vettore $\boldsymbol{\nabla}T$? Sappiamo che la rapidità di variazione di T in una direzione qualunque è la componente di $\boldsymbol{\nabla}T$ in quella direzione (equazione (2.15)). Ne segue che la direzione di $\boldsymbol{\nabla}T$ è quella nella quale esso ha la componente più grande possibile; in altre parole, la direzione in cui T cambia più rapidamente: il gradiente di T ha la direzione della più rapida pendenza di T, in senso crescente.

2.5 Operazioni con $\boldsymbol{\nabla}$

Possiamo fare dell'altra algebra con l'operatore vettoriale $\boldsymbol{\nabla}$? Proviamo a combinarlo con un vettore. Due vettori si possono combinare facendone il prodotto scalare. Potremo formare i due prodotti

$$(\text{vettore}) \cdot \boldsymbol{\nabla} \qquad \text{oppure} \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\text{vettore})$$

Il primo non ha per ora alcun significato, perché è ancora un operatore: il suo possibile significato finale dipende da ciò su cui lo facciamo operare. Il secondo prodotto è un campo scalare ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ è sempre uno scalare).

Proviamo a fare il prodotto scalare di $\boldsymbol{\nabla}$ con un vettore che conosciamo, mettiamo $\boldsymbol{h}$. Esplicitando le componenti abbiamo

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \tag{2.32}$$

ossia

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \tag{2.33}$$

Questa somma è invariante nelle trasformazioni delle coordinate. Se scegliessimo un sistema diverso (indicato con gli apici), troveremmo[(2)]

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \tag{2.34}$$

che è lo *stesso* numero che si otterrebbe dall'equazione (2.33) anche se l'espressione sembra diversa. Si ha cioè

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{h} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} \tag{2.35}$$

per ogni punto dello spazio. Dunque la grandezza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}$ è un campo scalare che deve rappresentare una grandezza fisica. Noterete che la combinazione delle derivate in $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}$ è piuttosto speciale. Ci sono tante altre combinazioni, come $\partial h_y / \partial x$, che non sono né scalari né componenti di vettori.

La grandezza scalare $\boldsymbol{\nabla} \cdot$ (vettore) è estremamente utile in fisica e viene chiamata *divergenza*. Per esempio, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}$ è chiamata «*divergenza* di $\boldsymbol{h}$»:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = \text{divergenza di } \boldsymbol{h} = \operatorname{div} \boldsymbol{h} \tag{2.36}$$

Come si è fatto per $\boldsymbol{\nabla} T$ si può attribuire un significato fisico a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}$. Tuttavia rimandiamo questo più avanti.

Prima vogliamo vedere cos'altro possiamo fabbricare con l'operatore vettoriale $\boldsymbol{\nabla}$. Perché non provare il prodotto vettoriale? Dobbiamo aspettarci che sia

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h} = \text{vettore} \tag{2.37}$$

Le componenti di questo vettore le possiamo scrivere in base alla regola usuale del prodotto vettoriale (equazione (2.2)):

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \tag{2.38}$$

Similmente

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \tag{2.39}$$

e

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \tag{2.40}$$

La combinazione $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}$ è chiamata «*rotore* di $\boldsymbol{h}$»:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h} = \text{rotore di } \boldsymbol{h} = \operatorname{rot} \boldsymbol{h}$$

La ragione di questo nome e il significato fisico della combinazione saranno discussi più avanti.

Riassumendo, abbiamo tre specie di combinazioni in cui entra $\boldsymbol{\nabla}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} T &= \operatorname{grad} T = \text{vettore} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} &= \operatorname{div} \boldsymbol{h} = \text{scalare} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \text{vettore} \end{aligned}$$

[(2)] Il vettore $\boldsymbol{h}$ è pensato come una grandezza *fisica* che dipende dalla posizione nello spazio e non, a rigore, come una funzione matematica di tre variabili. Quando $\boldsymbol{h}$ si «deriva» rispetto x, y, z oppure rispetto a x', y', z', si intende che la sua espressione matematica deve esser preventivamente espressa con le variabili appropriate.

Adoperando queste combinazioni possiamo scrivere le variazioni dei campi in una maniera che è comoda e che è generale, in quanto non dipende da alcuna particolare scelta degli assi.

Come esempio dell'uso dell'operatore differenziale ∇ scriviamo le equazioni vettoriali che contengono quelle leggi dell'elettromagnetismo che abbiamo espresso a parole nel capitolo 1, e che vengono chiamate *equazioni di Maxwell*.

Equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.41a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.41b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.41c}$$

$$c^2\, \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \tag{2.41d}$$

dove ρ, la «densità di carica elettrica», è la quantità di carica per unità di volume e $\boldsymbol{j}$, la «densità di corrente elettrica», è la carica che attraversa l'unità d'area per unità di tempo. Queste quattro equazioni contengono la teoria classica completa del campo elettromagnetico. Vedete che elegante semplicità di forma si può ottenere con la nostra nuova notazione!

2.6 L'equazione differenziale del flusso di calore

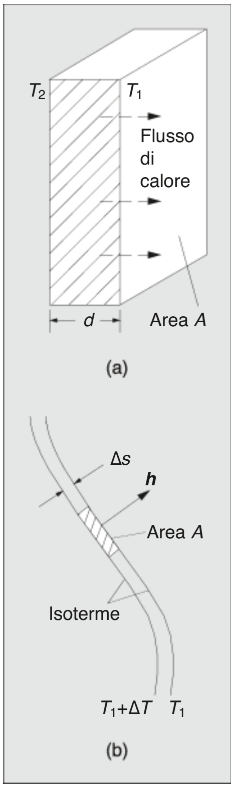

FIGURA 2.7 (a) Flusso di calore attraverso una lastra. (b) Una lastra infinitesima parallela a una superficie isoterma in un blocco esteso.

Diamo un altro esempio di legge fisica scritta in notazione vettoriale. Questa legge non è una legge rigorosa, ma è abbastanza precisa per molti metalli e diversi altri corpi che conducono calore. Sapete che se si ha una lastra di un certo materiale e se ne scalda una faccia alla temperatura T_2 mentre si raffredda l'altra a una temperatura diversa T_1, il calore attraversa il materiale da T_2 a T_1 (FIGURA **2.7**a). Il flusso di calore è proporzionale all'area A delle facce e alla differenza di temperatura. È anche inversamente proporzionale a d, distanza fra le facce. (Per una data differenza di temperatura il flusso di calore è tanto più grande quanto più sottile è la lastra.) Indicando con J l'energia termica che passa per unità di tempo attraverso la lastra, avremo

$$J = \kappa\,(T_2 - T_1)\,\frac{A}{d} \tag{2.42}$$

La costante di proporzionalità κ (kappa) si chiama *conduttività termica*.

Cosa succederà in un caso più complesso? Ad esempio in un blocco di forma singolare in cui la temperatura varia in qualche modo strano? Supponiamo di considerare un minuscolo pezzo del blocco in questione, cioè immaginiamo una lastra simile a quella della FIGURA **2.7**a ma in miniatura; orientiamo le sue facce parallelamente alle superfici isoterme, come in FIGURA **2.7**b, così che l'equazione (2.42) è valida per quella piccola lastra.

Se la sua area è ΔA, il flusso di calore per unità di tempo è

$$\Delta J = \kappa\,\Delta T\,\frac{\Delta A}{\Delta s} \tag{2.43}$$

dove Δs è lo spessore della lastra. Ora $\Delta J/\Delta A$ lo abbiamo definito più sopra come il modulo del vettore $\boldsymbol{h}$, la cui direzione è quella del flusso termico. Il flusso di calore andrà da $T_1 + \Delta T$ verso T_1 e perciò sarà perpendicolare alle isoterme, come indicato nella FIGURA **2.7**b. Inoltre $\Delta T/\Delta s$ non è che la rapidità di variazione di T con la posizione e, siccome il cambiamento di posizione è perpendicolare alle isoterme, $\Delta T/\Delta s$ nel nostro caso è la massima rapidità di variazione: coincide perciò col modulo di ∇T. E siccome la direzione di ∇T è opposta a quella di $\boldsymbol{h}$, possiamo scrivere la (2.43) come un'equazione vettoriale:

$$\boldsymbol{h} = -\kappa\,\nabla T \tag{2.44}$$

(Il segno meno è necessario perché il flusso di calore «discende» il gradiente di temperatura.) L'equazione (2.44) è l'equazione differenziale della conduzione del calore nei materiali in blocco. Vedete che si tratta di una caratteristica equazione vettoriale: ognuno dei due membri è un vettore, se κ è un semplice numero. Si tratta della generalizzazione a casi arbitrari della relazione particolare (2.42) valida per lastre rettangolari. Più avanti dovremo imparare a scrivere ogni sorta di relazioni fisiche elementari, come la (2.42), in quella notazione più raffinata che è la notazione vettoriale. Questa notazione è utile non soltanto perché fa *apparire* più semplici le equazioni; essa ne mostra anche più chiaramente il *contenuto fisico*, facendo a meno di riferirsi a qualsiasi sistema di coordinate scelto arbitrariamente.

2.7 Derivate seconde dei campi vettoriali

Finora abbiamo introdotto soltanto derivate prime. Perché non introdurre anche le derivate seconde? Si potrebbero avere diverse combinazioni:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}T) \tag{2.45a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T) \tag{2.45b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h}) \tag{2.45c}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h}) \tag{2.45d}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h}) \tag{2.45e}$$

Potete controllare che queste sono le sole combinazioni possibili.

Cominciamo con l'esaminare la seconda, cioè la (2.45b). Essa ha la stessa forma di

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}T) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\,T = 0$$

dato che il prodotto $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ è sempre zero. Perciò si dovrebbe avere

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}T) = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T) = 0 \tag{2.46}$$

Possiamo vedere come viene fuori questa equazione calcolando le componenti. Si ha

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T)]_z &= \nabla_x(\boldsymbol{\nabla}T)_y - \nabla_y(\boldsymbol{\nabla}T)_x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{2.47}$$

che è zero (per l'equazione (2.8)). Lo stesso succede per le altre componenti. Perciò si ha $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T) = 0$ per qualsiasi distribuzione di temperatura, anzi, per *qualunque* funzione scalare.

Facciamo ora un altro esempio. Vediamo se possiamo trovare un'altra espressione che sia sempre nulla. Il prodotto scalare di un vettore per un prodotto vettoriale che contiene quel vettore è zero:

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0 \tag{2.48}$$

perché $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ è perpendicolare ad $\boldsymbol{A}$ e perciò non ha componenti nella direzione $\boldsymbol{A}$. La stessa combinazione appare nell'equazione (2.45d), perciò abbiamo

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{h}) = 0 \tag{2.49}$$

Di nuovo, è facile verificare il risultato eseguendo le operazioni mediante le componenti.

Enunceremo ora due teoremi matematici che non dimostreremo. Sono teoremi molto utili e interessanti per i fisici.

Si trova spesso nei problemi fisici, che il rotore di una certa grandezza – diciamo il campo vettoriale $\boldsymbol{A}$ – è nullo. Ora abbiamo visto (equazione (2.46)) che il rotore di un gradiente è zero; ciò è facile da ricordare dato il modo di comportarsi di questi vettori. Potrebbe perciò darsi benissimo che $\boldsymbol{A}$ fosse il gradiente di qualche grandezza, perché allora il suo rotore sarebbe necessariamente zero. Uno dei due teoremi interessanti consiste appunto nell'affermazione che se rot $\boldsymbol{A} = 0$, allora $\boldsymbol{A}$ è *sempre* il gradiente di *qualcosa*: esiste un campo scalare ψ (psi) tale che $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\psi$. In altre parole abbiamo il seguente

Teorema:

$$\begin{array}{ll} \text{Se} & \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \\ \text{esiste un} & \psi \\ \text{tale che} & \boldsymbol{A} = \nabla\psi \end{array} \tag{2.50}$$

C'è un analogo teorema se la divergenza di $\boldsymbol{A}$ è zero. Abbiamo visto (equazione (2.49)) che la divergenza del rotore di un qualcosa è sempre zero. Se incontrate un campo vettoriale $\boldsymbol{D}$ per il quale div $\boldsymbol{D} = 0$, allora potete concludere che $\boldsymbol{D}$ è il rotore di qualche campo vettoriale $\boldsymbol{C}$. In altre parole abbiamo il seguente

Teorema:

$$\begin{array}{ll} \text{Se} & \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \\ \text{esiste un} & \boldsymbol{C} \\ \text{tale che} & \boldsymbol{D} = \nabla \times \boldsymbol{C} \end{array} \tag{2.51}$$

Esaminando le possibili combinazioni di due operatori ∇ abbiamo trovato che due di esse danno sempre zero. Esaminiamo ora quelle che *non* sono zero. Prendiamo la combinazione $\nabla \cdot (\nabla T)$. Mettendo in evidenza le componenti si ha

$$\nabla T = \boldsymbol{i}\, \nabla_x T + \boldsymbol{j}\, \nabla_y T + \boldsymbol{k}\, \nabla_z T$$

quindi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla_x (\nabla_x T) + \nabla_y (\nabla_y T) + \nabla_z (\nabla_z T) = \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{2.52}$$

che in generale risulterà essere un certo numero. Si tratta di un campo scalare.

Si vede che non c'è bisogno di conservare le parentesi, e possiamo scrivere, senz'ombra di confusione, quanto segue:

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T \tag{2.53}$$

Possiamo considerare ∇^2 come un nuovo operatore. È un operatore scalare che, presentandosi spesso in fisica, ha ricevuto un nome speciale: *laplaciano*. Si ha

$$\text{laplaciano} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.54}$$

Siccome il laplaciano è un operatore scalare, possiamo operare con esso su un vettore e questo vorrà dire eseguire la stessa operazione su ogni componente in coordinate rettangolari:

$$\nabla^2 \boldsymbol{h} = \left(\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z\right)$$

Consideriamo ancora una possibilità e cioè $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h})$, che è la (2.45e). Il rotore del rotore può essere scritto diversamente adoperando l'uguaglianza vettoriale (2.6):

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{2.55}$$

Per applicare questa formula dobbiamo sostituire $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ con l'operatore ∇ e porre $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{h}$. Se lo facciamo, otteniamo

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla\,(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{h}\,(\nabla \cdot \nabla) \ldots ???$$

Un momento! C'è qualcosa di sbagliato. Il primo termine è un vettore e va bene (gli operatori sono sazi), ma il secondo non significa proprio nulla. È ancora un operatore. L'inconveniente sorge perché non siamo stati abbastanza attenti a conservare il giusto ordine dei nostri termini. Tuttavia, tornando all'equazione (2.55) vedete che si poteva averla scritta altrettanto bene nella forma

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} \tag{2.56}$$

L'ordine dei termini appare migliore. Adesso facciamo le nostre sostituzioni in (2.56). Otteniamo:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{h} \tag{2.57}$$

Questa forma sembra che vada bene. È infatti corretta, come potete verificare calcolando le componenti. L'ultimo termine è il laplaciano, sicché possiamo egualmente scrivere

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}) - \nabla^2 \boldsymbol{h} \tag{2.58}$$

Abbiamo commentato tutte le combinazioni nella nostra lista dei doppi $\boldsymbol{\nabla}$ eccetto la (2.45c), cioè $\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h})$. Si tratta di un possibile campo vettoriale, ma non c'è nulla di speciale da dire su esso. È semplicemente un campo vettoriale che può occasionalmente capitare.

Sarà comodo avere un riepilogo delle nostre conclusioni:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} T) = \nabla^2 T = \text{campo scalare} \tag{2.59a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} T) = 0 \tag{2.59b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}) = \text{campo vettoriale} \tag{2.59c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}) = 0 \tag{2.59d}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}) - \nabla^2 \boldsymbol{h} \tag{2.59e}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{h} = \nabla^2 \boldsymbol{h} = \text{campo vettoriale} \tag{2.59f}$$

Potete accorgervi che non abbiamo tentato di inventare un nuovo operatore vettoriale $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}$. Capite il perché?

2.8 Trabocchetti

Abbiamo applicato le nostre cognizioni di algebra vettoriale ordinaria all'algebra dell'operatore $\boldsymbol{\nabla}$; dobbiamo però essere prudenti, perché è possibile andare fuori strada. Due trabocchetti li vogliamo ricordare, anche se non si presenteranno in questo corso. Che cosa pensereste dell'espressione seguente dove figurano due funzioni scalari ψ (psi) e ϕ (fi):

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi) \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = ?$$

Potreste essere indotti a dire: deve essere zero perché somiglia proprio all'espressione

$$(\boldsymbol{A}a) \times (\boldsymbol{A}b)$$

che è nulla perché il prodotto vettoriale $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ di due vettori *uguali* è sempre nullo. Nel nostro caso, però, i due operatori $\boldsymbol{\nabla}$ non sono uguali! Il primo opera sulla funzione ψ, l'altro opera su una funzione diversa, cioè ϕ. Perciò anche se li rappresentiamo con lo stesso simbolo $\boldsymbol{\nabla}$ essi devono essere considerati come operatori diversi. È chiaro che la direzione di $\boldsymbol{\nabla}\psi$ dipende dalla funzione ψ, perciò non è presumibile che sia parallelo a $\boldsymbol{\nabla}\phi$. Dunque sarà, in generale,

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi) \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) \neq 0$$

Fortunatamente non dovremo usare simili espressioni. (Quanto si è detto non cambia il fatto che è $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\psi = 0$ per qualunque campo scalare, perché qui ambedue i $\boldsymbol{\nabla}$ operano sulla stessa funzione.)

Il trabocchetto numero due (nel quale non ci imbatteremo nel nostro corso) è il seguente. Le regole che abbiamo delineato sono semplici e soddisfacenti quando si adoperano coordinate rettangolari. Per esempio, se abbiamo $\nabla^2 \boldsymbol{h}$ e vogliamo la componente x, essa è

$$\left(\nabla^2 \boldsymbol{h}\right)_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h_x = \nabla^2 h_x \tag{2.60}$$

La stessa espressione *non* andrebbe bene se si richiedesse la componente *radiale* di $\nabla^2 \boldsymbol{h}$. La componente radiale di $\nabla^2 \boldsymbol{h}$ non è uguale a $\nabla^2 h_r$. La ragione è che quando si tratta dell'algebra dei vettori, le direzioni di questi sono perfettamente definite. Ma quando si tratta di campi vettoriali le loro direzioni sono diverse nei diversi punti. Se cerchiamo di descrivere un campo vettoriale in coordinate, mettiamo, polari, ciò che chiamiamo direzione «radiale» varia da punto a punto; perciò possiamo andare incontro a una serie di complicazioni quando passiamo a derivare le componenti. Per esempio, anche per un campo vettoriale costante, la componente radiale cambia da punto a punto.

Di solito è più sicuro e più semplice attenersi alle coordinate rettangolari ed evitare le complicazioni, ma c'è un'eccezione che merita di esser ricordata: siccome il laplaciano ∇^2 è uno scalare, possiamo scriverlo in qualsiasi sistema di coordinate (per esempio, in coordinate polari). Siccome però è un operatore differenziale, lo dovremo usare soltanto su vettori le cui componenti sono riferite a direzioni fisse, ossia ad assi rettangolari. Perciò esprimeremo tutti i campi vettoriali in termini delle loro componenti secondo x, y e z quando dovremo esplicitare in componenti le equazioni differenziali vettoriali.