CAPITOLO 1
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Non solo economia

Le disequazioni possono servire per modellizzare e risolvere problemi tratti dalla realtà.
Le applicherai in problemi di economia per ricavare, per esempio, quanti biglietti ridotti possono essere venduti, al massimo, in un cinema per una proiezione se si vuole incassare almeno una somma prefissata.
Ma anche la festa di Capodanno ti impegnerà nella ricerca di una disequazione. Se ogni invitato fa gli auguri a tutti gli altri e dopo un minuto gli scambi sono già 36…

…quanti sono come minimo gli invitati?

→ La risposta a pag. 8

1 Disequazioni

Le disuguaglianze sono enunciati in cui due espressioni sono confrontate mediante le seguenti relazioni d'ordine.

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$
minore	minore o uguale	maggiore	maggiore o uguale

Per esempio:

$$2 + 1 < 5, \quad 3a + 1 \geq b.$$

DEFINIZIONE
Una **disequazione** è una disuguaglianza in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che rendono la disuguaglianza vera.

Le lettere per le quali si cercano valori sono le **incognite**. I valori delle incognite che rendono vera la disuguaglianza sono le **soluzioni** della disequazione.

Ci occuperemo, per il momento, di disequazioni a una sola incognita e cercheremo di determinare l'**insieme delle soluzioni** S nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Listen to it

An **inequality** is a relation that compares two expressions, one greater than the other. If the expressions contain unknown quantities, we **solve the inequality** by finding the values for which the **inequality** holds.

Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo

ESEMPIO
La disequazione $5-x>0$ ha come insieme delle soluzioni $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<5\}$, che indichiamo, per brevità, con $x<5$.

Una disequazione è scritta nella **forma normale** $P(x)>0$ se $P(x)$ è un polinomio nell'incognita x ridotto in forma normale e il **grado della disequazione** è il grado di $P(x)$. Analoga definizione si ha per le disequazioni con $<$, $\leq$, $\geq$.

Diversi tipi di disequazioni

Una disequazione è **numerica** se nell'equazione non compaiono altre lettere oltre all'incognita. È **letterale** se invece contiene altre lettere, che possono anche essere chiamate *parametri*.

Una disequazione è **intera** se l'incognita compare soltanto nei numeratori delle eventuali frazioni presenti nella disequazione.

Se l'incognita è contenuta nel denominatore di qualche frazione, allora la disequazione è **fratta**.

ESEMPIO
La disequazione $\dfrac{2}{x+5}>3x-1$ è fratta e ha senso solo quando

$$x+5\neq 0 \rightarrow x\neq -5$$

perché non possono esistere frazioni con denominatore nullo. Diciamo anche che la sua condizione di esistenza è $x\neq -5$.

DEFINIZIONE
Le **condizioni di esistenza** di una disequazione sono le condizioni che le variabili devono soddisfare affinché tutte le espressioni scritte abbiano significato. Le indichiamo con C.E.

Rappresentazione delle soluzioni

→ Esercizi a p. 23

Spesso gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni che studieremo sono particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ chiamati **intervalli**.

DEFINIZIONE
Dati due numeri reali a e b, con $a<b$, chiamiamo **intervallo limitato** l'insieme dei numeri reali x compresi fra a e b.
Dato un numero reale a, chiamiamo **intervallo illimitato** l'insieme dei numeri reali x che precedono a, oppure l'insieme dei numeri reali x che seguono a.

a e b sono detti **estremi** dell'intervallo.

Un intervallo è **chiuso** quando include i propri estremi, **aperto** quando non li include.
Quando un intervallo include solo l'estremo sinistro (destro), si parla di intervallo chiuso a sinistra (destra) e aperto a destra (sinistra).
Esaminiamo alcuni esempi, dove rappresentiamo gli intervalli in tre modi diversi: con le disuguaglianze, mediante parentesi quadre o con una rappresentazione grafica.

Indichiamo con x la variabile relativa ai valori dell'intervallo. I simboli $+\infty$ e $-\infty$ si leggono *più infinito* e *meno infinito* e si usano per indicare che un intervallo è illimitato a destra o a sinistra, rispettivamente.

Intervallo limitato, aperto a sinistra, chiuso a destra.	aperto, chiuso; 2, $\frac{17}{5}$	chiuso, aperto; $2 < x \leq \frac{17}{5}$	chiuso, aperto; $\left]2; \frac{17}{5}\right]$
Intervallo illimitato, chiuso a sinistra.	-7	$x \geq -7$	$[-7; +\infty[$
Intervallo illimitato, aperto a destra.	5	$x < 5$	$]-\infty; 5[$

Disequazioni equivalenti

→ Esercizi a p. 24

DEFINIZIONE
Due **disequazioni** sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

ESEMPIO
$x - 3 > 0$ e $x - 2 > 1$ sono disequazioni equivalenti perché hanno per soluzioni i valori dell'intervallo $x > 3$.

I **membri** di una disequazione sono le due espressioni che si trovano a sinistra (primo membro) e a destra (secondo membro) del segno di disuguaglianza.

Per l'equivalenza tra disequazioni valgono i seguenti princìpi.

Primo principio di equivalenza
Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero.

In base a questo principio, **un termine può essere trasportato da un membro all'altro della disequazione cambiandogli il segno**.

a. La disequazione $-x^2 > -7x^2$ è equivalente alla disequazione $6x^2 > 0$?
b. $-4x > 0$ è equivalente a $x > 4$?

Secondo principio di equivalenza
Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente:

- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero *positivo*.
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per un numero *negativo* e *cambiando il verso* della disuguaglianza.

In particolare, **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il verso della disuguaglianza, si ottiene una disequazione equivalente**.

Questa operazione equivale a moltiplicare per -1 i due membri della disequazione e a invertire il verso della disuguaglianza.

ESEMPIO
$-x^2 > -9$ è equivalente a $x^2 < 9$. La seconda disequazione si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per -1 (ovvero cambiando il segno di tutti i termini) e invertendo il verso della disuguaglianza.

a. La disequazione $(1-\sqrt{2})x > 1$ è equivalente alla disequazione $x > \frac{1}{1-\sqrt{2}}$?
b. $-6x > -8x$ è equivalente a $x > 0$?

I due princìpi sono validi anche se, invece di numeri, aggiungiamo, moltiplichiamo o dividiamo i due membri per espressioni letterali che non restringano le condizioni di esistenza della disequazione.

2 Disequazioni di primo grado

→ Esercizi a p. 24

Le disequazioni intere di primo grado, o **lineari**, possono sempre essere scritte in una delle seguenti forme, dopo aver applicato i princìpi di equivalenza:

$$ax > b, \quad ax \geq b, \quad ax < b, \quad ax \leq b, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo $ax > b$, otteniamo, a seconda dei valori di a:

- se $a > 0$, $\quad x > \frac{b}{a}$;
- se $a < 0$, $\quad x < \frac{b}{a}$;
- se $a = 0$, $\quad 0 \cdot x > b$
  - se $b > 0$, $S = \varnothing$, disequazione impossibile;
  - se $b = 0$, $S = \varnothing$, disequazione impossibile;
  - se $b < 0$, $S = \mathbb{R}$, disequazione sempre verificata.

Un ragionamento analogo vale anche per le altre tre disequazioni.
Risolviamo una disequazione numerica intera, applicando i princìpi di equivalenza:

$$2 + \frac{x}{4} \leq 1 + x \underset{\text{primo principio di equivalenza}}{\rightarrow} \frac{x}{4} - x \leq 1 - 2 \underset{\text{svolgiamo i calcoli}}{\rightarrow} -\frac{3}{4}x \leq -1 \underset{\text{secondo principio di equivalenza}}{\rightarrow} x \geq \frac{4}{3}.$$

ESEMPIO Conti al cinema

Un cinema ha 400 posti a sedere; il biglietto per la visione di un film costa € 8 a prezzo pieno e € 5 ridotto.

► Per lo spettacolo delle 20:00, quanti biglietti ridotti devono essere venduti, al massimo, per avere la sala piena e un incasso di almeno € 2750?

Chiamiamo x il numero di biglietti ridotti venduti. Scriviamo la condizione:

$$x \leq 400.$$

Quando la sala del cinema è piena, i biglietti a prezzo pieno sono $400 - x$ e l'incasso è, pertanto:

$$5 \cdot x + 8(400 - x).$$

Dobbiamo risolvere la disequazione:

$$5x + 8(400 - x) \geq 2750 \quad \rightarrow$$
$$5x + 3200 - 8x \geq 2750 \quad \rightarrow$$
$$-3x \geq -450 \quad \rightarrow \quad x \leq 150.$$

Per incassare almeno € 2750 non si devono vendere più di 150 biglietti ridotti.

Studio del segno di un prodotto

ESEMPIO

Consideriamo una disequazione costituita da un prodotto di binomi di primo grado messo a confronto con il numero 0.

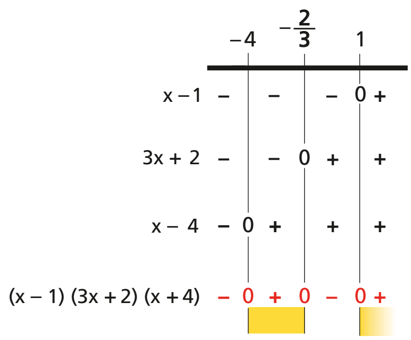
$$(x-1)(3x+2)(x+4)>0$$

Per risolverla **studiamo il segno** di ogni fattore e poi deduciamo quello del prodotto al variare di x.

$x-1>0 \quad \rightarrow \quad x>1$

$3x+2>0 \quad \rightarrow \quad x>-\frac{2}{3}$

$x+4>0 \quad \rightarrow \quad x>-4$



Rappresentiamo i risultati in uno schema grafico in cui indichiamo i segni dei fattori nei diversi intervalli e il segno del prodotto, ottenuto con la regola dei segni. Evidenziamo in giallo gli intervalli in cui la disequazione è verificata, cioè quelli in cui il prodotto risulta essere positivo. L'insieme delle soluzioni è:

$$-4<x<-\frac{2}{3} \quad \vee \quad x>1.$$

Animazione nell'eBook

Nell'animazione, scomponendo in fattori e applicando lo stesso metodo, risolviamo anche:
$x^3-4x\leq 0$.

Risolvi la disequazione $x(4-2x)(x+3)\leq 0$.

3 Disequazioni di secondo grado

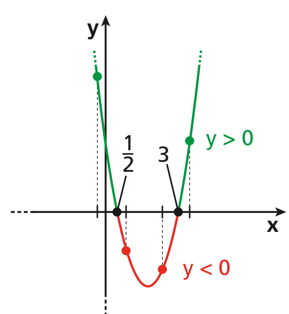
Segno di un trinomio di secondo grado

→ Esercizi a p. 27

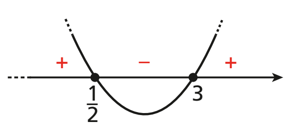
Per studiare il segno di un trinomio di secondo grado ax^2+bx+c, con $a\neq 0$, possiamo considerare la funzione $y=ax^2+bx+c$ e utilizzare il suo grafico, che è una parabola.

ESEMPIO

Studiamo il segno del trinomio di secondo grado $2x^2-7x+3$.
La funzione $y=2x^2-7x+3$ ha per grafico una parabola che ha la concavità rivolta verso l'alto e interseca l'asse x nei punti di ascissa $\frac{1}{2}$ e 3.
Per $\frac{1}{2}<x<3$, i punti del grafico hanno ordinata negativa; per $x<\frac{1}{2}$ o $x>3$, hanno ordinata positiva.



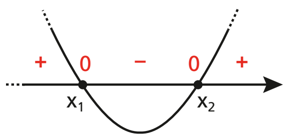
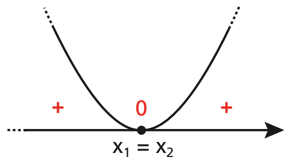
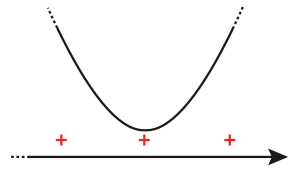
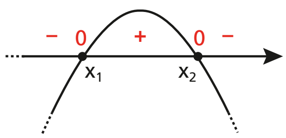
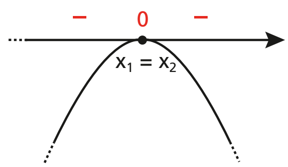
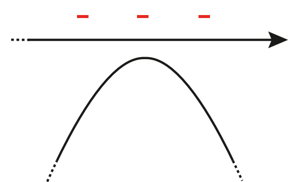
Per lo studio del segno non servono altre informazioni. Possiamo utilizzare lo schema semplificato della figura e concludere che $2x^2-7x+3$ è



- negativo se $\frac{1}{2}<x<3$;
- nullo se $x=\frac{1}{2} \vee x=3$;
- positivo se $x<\frac{1}{2} \vee x>3$.

Riassumiamo nella tabella le possibili posizioni di una parabola di equazione $y = ax^2 + bc + c$ rispetto all'asse x.

x_1 e x_2 sono le eventuali radici dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$, cioè i valori per i quali il trinomio è nullo. I segni $+$ e $-$ indicano dove la parabola è sopra o sotto l'asse x, e quindi anche dove il trinomio è positivo o negativo.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Quando $\Delta > 0$, chiamiamo **intervallo delle radici** l'intervallo dei valori compresi fra x_1 e x_2.

Osserviamo i grafici nella prima colonna della tabella precedente, che si riferiscono al caso $\Delta > 0$. Per valori di x esterni all'intervallo delle radici:

- se $a > 0$, cioè ha segno $+$, anche il trinomio ha segno $+$;
- se $a < 0$, cioè ha segno $-$, anche il trinomio ha segno $-$;

quindi il trinomio assume sempre *segno concorde* con quello del primo coefficiente a per *valori esterni all'intervallo delle radici*.

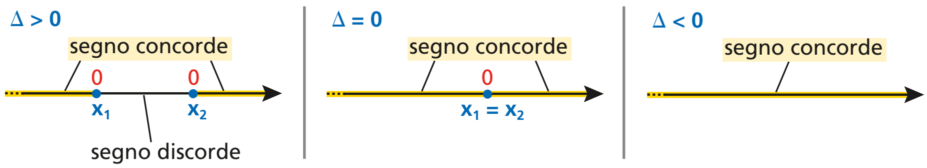
Ragionando nello stesso modo, otteniamo che, con $\Delta > 0$, il trinomio assume *segno discorde* da quello di a per *valori di x interni all'intervallo delle radici*. Quindi, per formulare una regola che valga sia per $a > 0$ sia per $a < 0$, basta confrontare il segno del trinomio con quello di a per i valori interni o esterni all'intervallo delle radici.

Procedendo nello stesso modo anche nei casi $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, otteniamo il seguente schema, che possiamo utilizzare senza tracciare il grafico della parabola.

Segno di un trinomio di secondo grado
Quando l'equazione associata al trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, ha:

- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il trinomio e il coefficiente a hanno
  - *segno concorde* per valori di x *esterni* all'intervallo delle radici;
  - *segni discordi* per valori di x *interni* all'intervallo delle radici;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il trinomio e il coefficiente a hanno *segno concorde* per *tutti* i valori di x *diversi* dalla radice dell'equazione;
- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il trinomio e il coefficiente a hanno *segno concorde* per *ogni* valore reale di x.

confronto dei segni di $ax^2 + bx + c$ e di a:

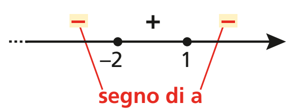


Facciamo alcuni esempi.

ESEMPIO

a. Il trinomio $-x^2 - x + 2$ ha equazione associata $-x^2 - x + 2 = 0$, con $\Delta > 0$ e $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

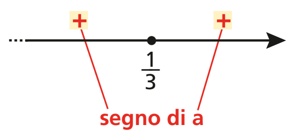
Segno del trinomio



b. Il trinomio $+9x^2 - 6x + 1$ ha equazione associata $9x^2 - 6x + 1 = 0$, con $\Delta = 0$ e

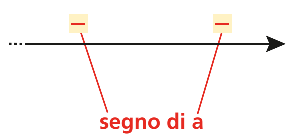
$$x_1 = x_2 = \frac{1}{3}.$$

Segno del trinomio



c. Il trinomio $-8x^2 + x - 3$ ha equazione associata $-8x^2 + x - 3 = 0$, con $\Delta < 0$ e nessuna radice reale.

Segno del trinomio



Studia il segno dei seguenti trinomi:

a. $x^2 + 5x + 6$;

b. $3x^2 + x + 1$;

c. $x^2 - 2x + 1$.

Studio algebrico del segno

La regola che abbiamo ottenuto mediante interpretazione grafica, osservando le caratteristiche della parabola, può anche essere dimostrata con lo studio algebrico del segno, come proponiamo nell'animazione.

Animazione nell'eBook

Risoluzione di una disequazione di secondo grado

→ Esercizi a p. 28

La regola dello studio del segno di un trinomio di secondo grado è utile per risolvere una disequazione di secondo grado. Possiamo seguire questo procedimento:

- portiamo la disequazione nella forma normale $\boldsymbol{ax^2 + bx + c > 0}$ (o in quelle analoghe con $\geq$, $<$, $\leq$), dove per comodità scegliamo di avere $\boldsymbol{a > 0}$;
- risolviamo l'equazione associata, determinando il segno del discriminante e le radici, quando esistono;
- applichiamo la regola dello studio del segno, individuando l'intervallo o gli intervalli in cui il trinomio è o positivo o negativo, a seconda della richiesta della disequazione.

Abbiamo scelto di portare sempre la disequazione nella forma con $a > 0$ perché, in questo modo, nella risoluzione, per studiare il segno del trinomio possiamo utilizzare solo parabole con la concavità rivolta verso l'alto. Negli esercizi vedremo anche il caso $a < 0$.

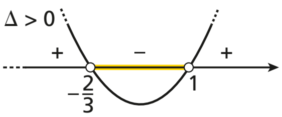
Listen to it

To solve a **quadratic inequality**, just sketch some basic features of the **graph** of the associated quadratic function, as shown in the figures.

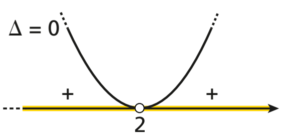
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	x_1 x_2 $x < x_1 \vee x > x_2$	x_1 x_2 $x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	x_1 $x \neq x_1$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$

TEORIA

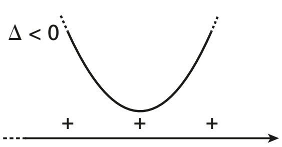
Animazione nell'eBook



Animazione nell'eBook



Animazione nell'eBook



ESEMPIO

1. $\Delta > 0$

Risolviamo la disequazione $3x^2 - x - 2 < 0$.
L'equazione associata è $3x^2 - x - 2 = 0$, con radici $x_1 = -\frac{2}{3}$ e $x_2 = 1$.
Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 3 di x^2 per valori esterni all'intervallo $\left[-\frac{2}{3}; 1\right]$, ha segno discorde per valori interni. La disequazione chiede che il trinomio sia negativo, quindi le soluzioni sono:

$$-\frac{2}{3} < x < 1.$$

2. $\Delta = 0$

Risolviamo la disequazione $x^2 - 4x + 4 > 0$.
L'equazione associata $x^2 - 4x + 4 = 0$ ha $\Delta = 0$, con due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = 2$.
Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 1 di x^2 per qualunque valore diverso da 2.
La disequazione chiede che il trinomio sia positivo, quindi le soluzioni sono:

$$x \neq 2.$$

3. $\Delta < 0$

Risolviamo la disequazione $2x^2 - x + 1 < 0$.
L'equazione associata $2x^2 - x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$.
Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 2 di x^2 per qualsiasi valore di x. La disequazione chiede che il trinomio sia negativo, quindi non è mai verificata.

Vediamo un'applicazione delle disequazioni di secondo grado.

▸ Risolvi le seguenti disequazioni:
a. $2x^2 + 8x - 10 < 0$;
b. $2x^2 - 12x + 18 \geq 0$;
c. $4x^2 + 2x + 1 < 0$.

ESEMPIO Più invitati e più auguri

A una festa di capodanno, quando scocca la mezzanotte, ogni invitato fa gli auguri a tutti gli altri.
Dopo un minuto, gli scambi di auguri sono già 36.

▸ Quanti sono come minimo gli invitati alla festa?

Se x è il numero degli invitati, ognuno fa gli auguri a $(x-1)$ persone. Il numero di scambi di auguri, tenendo conto che due persone si fanno gli auguri solo una volta, è:

$$\frac{x(x-1)}{2}.$$

Dobbiamo risolvere la disequazione:

$$\frac{x(x-1)}{2} \geq 36 \quad \to \quad x^2 - x \geq 72 \quad \to \quad x^2 - x - 72 \geq 0.$$

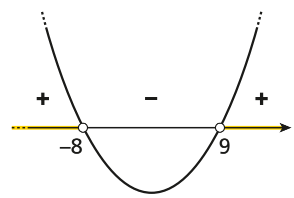
L'equazione associata $x^2 - x - 72 = 0$ ha $\Delta = 289 > 0$ e le sue radici sono:

$$x_1 = \frac{1+17}{2} = 9; \quad x_2 = \frac{1-17}{2} = -8.$$

Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 1 di x^2, cioè positivo, per valori esterni all'intervallo $[-8; 9]$, ha segno discorde, cioè negativo, per valori interni. La disequazione chiede che il trinomio sia positivo o nullo, quindi le soluzioni sono:

$$x \leq -8 \vee x \geq 9.$$

Dal momento che x rappresenta il numero delle persone, le soluzioni negative non sono accettabili. Quindi gli invitati sono almeno 9.



TEORIA

4 Disequazioni di grado superiore al secondo

→ Esercizi a p. 35

Disequazioni risolvibili con scomposizioni in fattori

Dato un polinomio $P(x)$ di grado maggiore di 2, le disequazioni del tipo $P(x) < 0$ o $P(x) > 0$ sono di grado superiore al secondo e possono essere risolte scomponendo in fattori di primo e secondo grado il polinomio $P(x)$ e studiando il segno del prodotto di polinomi che si ottiene.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0$.
Scomponiamo $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ in fattori mediante la regola di Ruffini.

Se sostituiamo nel polinomio i divisori del termine noto 6, scopriamo che 1 è uno zero del polinomio, che è quindi divisibile per $(x-1)$.

Applichiamo la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \quad \to \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

La disequazione iniziale è equivalente a:

$$(x-1)(x^2 - x - 6) > 0.$$

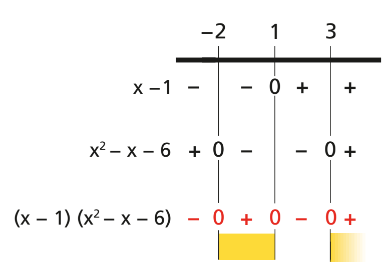
Esaminiamo il segno dei polinomi fattori e del prodotto:

$$x - 1 > 0 \quad \to \quad x > 1;$$

$$x^2 - x - 6 > 0 \quad \to \quad x < -2 \ \vee \ x > 3.$$

Animazione nell'eBook

➤ Risolvi la disequazione $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \leq 0$.



Nel quadro dei segni vediamo che la disequazione ha soluzioni

$$-2 < x < 1 \quad \vee \quad x > 3.$$

In particolari casi di disequazioni, possiamo utilizzare metodi specifici.

Disequazioni binomie

Una **disequazione binomia** può essere ricondotta alla forma $\boldsymbol{ax^n + b \gtreqless 0}$, con $a \neq 0$ e n intero positivo.

Se $b = 0$ la disequazione si dice **monomia**.

TEORIA

Animazione nell'eBook

ESEMPIO

Risolviamo $x^3 - 8 \leq 0$.
L'equazione associata $x^3 - 8 = 0$ è un'*equazione binomia*, con esponente $n = 3$, dispari, perché è nella forma $ax^n + b = 0$, con $a \neq 0$ e n intero positivo.
La sua soluzione è:

$$x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Ricordando che

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

scriviamo $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Inoltre il trinomio $x^2 + 2x + 4$, che ha $\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 < 0$, assume sempre segno positivo, allora il segno di $x^3 - 8$ dipende solo dal segno del fattore $(x - 2)$.

La disequazione è verificata per $x \leq 2$.

a. Risolvi $x^5 + 125 \leq 0$.

b. Risolvi $x^4 - 81 > 0$ e $x^4 + 81 > 0$, e confronta i risultati con il caso di esponente dispari di x.

In generale, le disequazioni del tipo $\boldsymbol{x^n > a}$ e $\boldsymbol{x^n < a}$, con n dispari, si risolvono direttamente scrivendo $\boldsymbol{x > \sqrt[n]{a}}$ e $\boldsymbol{x < \sqrt[n]{a}}$. Vale anche nel caso di disuguaglianza non stretta.

Vediamo ora il caso in cui n è pari.

ESEMPIO

Risolviamo $x^4 - 16 > 0$.
Scomponiamo in fattori $x^4 - 16$:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4).$$

Il binomio $x^2 + 4$ è sempre positivo, quindi il segno di $x^4 - 16$ dipende solo dal segno del fattore $x^2 - 4$.

$$x^4 - 16 > 0 \rightarrow x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 2.$$

In generale, le disequazioni del tipo $\boldsymbol{x^n > a}$ e $\boldsymbol{x^n < a}$, con n pari e $a \geq 0$, hanno rispettivamente soluzioni $\boldsymbol{x < -\sqrt[n]{a} \vee x > \sqrt[n]{a}}$ e $\boldsymbol{-\sqrt[n]{a} < x < \sqrt[n]{a}}$.

Disequazioni biquadratiche

Una **disequazione biquadratica** è riconducibile alla forma $\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c \gtreqless 0}$, con $a \neq 0$.

ESEMPIO

Animazione nell'eBook

Risolviamo $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$.

L'equazione associata $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ è un'*equazione biquadratica*, perché è nella forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$. Introduciamo l'incognita ausiliaria z e poniamo $x^2 = z$:

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 4, z_2 = 9.$$

La disequazione iniziale è riconducibile alla disequazione in z:

$$z^2 - 13z + 36 \geq 0,$$

le cui soluzioni sono $z \leq 4 \ \lor \ z \geq 9$; da ciò, essendo $x^2 = z$:

$$x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0 \quad \text{per} \quad x^2 \leq 4 \ \lor \ x^2 \geq 9, \text{ ossia:}$$

$$-2 \leq x \leq 2 \ \lor \ (x \leq -3 \ \lor \ x \geq 3).$$

Risolvi
a. $4x^4 + 7x^2 - 36 \leq 0$;
b. $x^4 + 10x^2 + 9 < 0$.

Disequazioni trinomie

Una **disequazione trinomia** può essere ricondotta alla forma $\boldsymbol{ax^{2n} + bx^n + c \gtreqless 0}$, con $a \neq 0$ e n intero positivo.

ESEMPIO

Animazione nell'eBook

Risolviamo $x^6 - 3x^3 + 2 > 0$.

L'equazione associata $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ è un'*equazione trinomia*, perché è nella forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, con $a \neq 0$ e n intero positivo. Introduciamo l'incognita ausiliaria z e poniamo $x^3 = z$:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 1, z_2 = 2.$$

La disequazione $x^6 - 3x^3 + 2 > 0$ si trasforma nella disequazione $z^2 - 3z + 2 > 0$.

$$z^2 - 3z + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad z < 1 \ \lor \ z > 2, \qquad \text{da cui:}$$

$$x^6 - 3x^3 + 2 > 0 \quad \text{per} \quad x^3 < 1 \ \lor \ x^3 > 2, \qquad \text{vale a dire:}$$

$$x < 1 \ \lor \ x > \sqrt[3]{2}.$$

Risolvi
$-x^{10} - x^5 + 2 \leq 0$.

5 Disequazioni fratte

→ Esercizi a p. 40

Una disequazione è **fratta** se contiene l'incognita al denominatore. Può essere sempre trasformata in una disequazione del tipo

$$\boldsymbol{\frac{A(x)}{B(x)} > 0}$$

o nelle analoghe $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$.

Per risolvere una disequazione fratta dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$, esaminando i segni di $A(x)$ e di $B(x)$. Dobbiamo imporre $B(x) \neq 0$ per la condizione di esistenza della frazione.

TEORIA

Animazione nell'eBook

MATEMATICA ED ECONOMIA

Made in... Negli ultimi anni i prodotti «made in China» hanno invaso il mercato mondiale e spinto gli altri Paesi a trovare nuove strategie per restare competitivi.

- Quando è più conveniente importare un bene dall'estero anziché produrlo?

Risposta

Risolvi la disequazione $\frac{x^2-4x}{x-3} \leq 0$. $[x \leq 0 \vee 3 < x \leq 4]$

TEORIA

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4} \geq 0$.

Il denominatore deve essere non nullo, perciò:

$$\text{C.E.: } 2x^2-7x-4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \neq 4.$$

Studiamo il segno del numeratore:

$$x^2-1>0 \quad \rightarrow \quad x<-1 \quad \vee \quad x>1.$$

Studiamo il segno del denominatore.

Le radici dell'equazione associata sono $-\frac{1}{2}$ e 4, quindi:

$$2x^2-7x-4>0 \quad \rightarrow \quad x<-\frac{1}{2} \quad \vee \quad x>4.$$

La frazione è uguale a 0 quando lo è il suo numeratore, mentre se il denominatore è uguale a 0 la frazione non esiste. In questo caso, nello schema, utilizziamo il simbolo ∄.

		-1		$-\frac{1}{2}$		1		4	
x^2-1	+	0	−		−	0	+		+
$2x^2-7x-4$	+		+	0	−		−	0	+
$\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4}$	+	0	−	∄	+	0	−	∄	+

La disequazione fratta è verificata per:

$$x \leq -1 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < x \leq 1 \quad \vee \quad x > 4.$$

6 Sistemi di disequazioni

→ Esercizi a p. 45

DEFINIZIONE

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di più disequazioni nella stessa incognita, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.

Listen to it

To solve a **system of inequalities**, we have to find the values that satisfy all the inequalities involved.

Le **soluzioni** del sistema sono quei numeri reali che soddisfano *contemporaneamente* tutte le disequazioni e si ottengono dall'**intersezione** degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni.

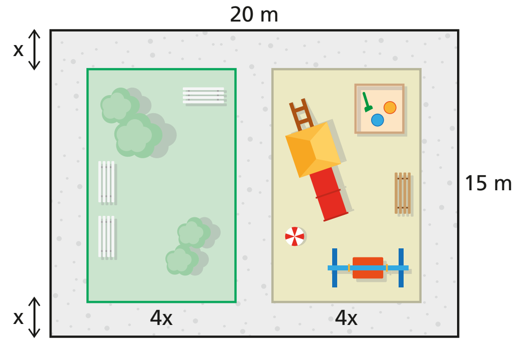
ESEMPIO Aree giochi

Nel cortile rettangolare di una scuola dell'infanzia si vogliono attrezzare due aree giochi uguali, una erbosa e una con giostrine, come nello schema della figura, dove le misure sono in metri.

L'area giochi complessiva deve garantire almeno 4 m^2 per ogni bambino, e i bambini sono 36.

► Quali valori può assumere x?

Imponiamo le condizioni geometriche che deduciamo dalla figura.



Il problema ha senso se

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x \le 15 \\ 8x \le 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \le \dfrac{15}{2} \\ x \le \dfrac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \quad 0 \le x \le \frac{5}{2}.$$

L'area complessiva delle due zone attrezzate è

$$\mathscr{A} = 2 \cdot [4x(15-2x)] = 8x(15-2x)$$

e deve essere di almeno $36 \cdot 4 = 144\ \text{m}^2$.

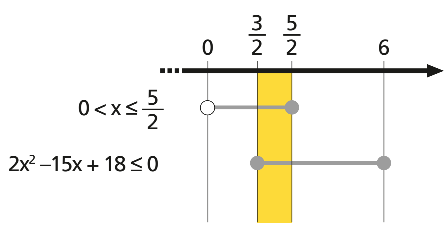
Pertanto dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 0 < x \le \dfrac{5}{2} \\ 8x(15-2x) \ge 144 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x \le \dfrac{5}{2} \\ x(15-2x) \ge 18 \ \rightarrow \ 2x^2 - 15x + 18 \le 0 \end{cases}.$$

L'equazione associata a $2x^2 - 15x + 18 = 0$ ha soluzioni $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{3}{2}$, e, poiché il coefficiente di x^2 è positivo, il trinomio è negativo per $\frac{3}{2} < x < 6$, nullo per $x = \frac{3}{2} \vee x = 6$.

Costruiamo lo schema grafico relativo al sistema.
Le soluzioni del sistema sono

$$\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}.$$



Quindi x può assumere valori compresi tra 1,5 m e 2,5 m.

> Risolvi il sistema
> $\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 3x - 21 \le 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$.
> $[-2 < x < 0 \vee 1 < x < 2]$
>
> **Animazione** nell'eBook

> Risolvi il sistema
> $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 6x \ge 0 \end{cases}$.
> $[-1 < x \le 0]$

7 Equazioni e disequazioni con valori assoluti

Il **valore assoluto** di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero se questo è negativo. In generale:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$|+5| = 5; \quad |0| = 0; \quad |-5| = 5.$

Il *valore assoluto* di un numero è per definizione *sempre positivo o nullo*.

Elenchiamo alcune utili proprietà del valore assoluto:

1. $|x| = |-x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$;
4. $|x| = |y| \quad \leftrightarrow \quad x = \pm y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
5. $|x| \leq |y| \quad \leftrightarrow \quad x^2 \leq y^2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
6. $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Equazioni con valori assoluti

→ Esercizi a p. 50

Equazioni con un valore assoluto

Animazione nell'eBook

ESEMPIO

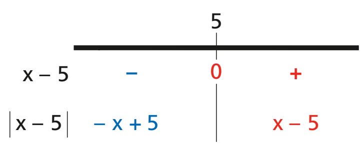
Risolviamo l'equazione

$$|x-5| = 3x-1.$$

Studiamo il segno dell'espressione all'interno del valore assoluto:

$$x-5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 5.$$

Compiliamo uno schema grafico: il valore assoluto coincide con $x-5$ quando $x-5$ è positivo; è l'opposto di $x-5$, ossia $-(x-5)$, quando $x-5$ è negativo.



Quindi

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 5, \\ -x+5 & \text{se } x < 5. \end{cases}$$

L'equazione data diventa

$$x-5 = 3x-1 \qquad \text{per } x \geq 5,$$

$$-x+5 = 3x-1 \qquad \text{per } x < 5.$$

Questo significa che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è l'**unione** degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x-5 = 3x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ -2x = 4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 5 \\ -x+5 = 3x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ -4x = -6 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$x = -2$ non è accettabile perché non è maggiore o uguale a 5, mentre $x = \dfrac{3}{2}$ è accettabile perché minore di 5: l'equazione iniziale ha per soluzione $x = \dfrac{3}{2}$.

▶ Risolvi l'equazione $|2x+2| + x = 1$.
$\left[x = -\dfrac{1}{3} \vee x = -3\right]$

Equazioni del tipo $|A(x)| = a$, con $a \in \mathbb{R}$

ESEMPIO

1. Risolviamo l'equazione $|3-x| = 2$.
Utilizziamo la proprietà **4** del valore assoluto:

$$|3-x| = 2 \to |3-x| = |2| \to 3-x = \pm 2, \text{ da cui:}$$

$$3-x=2 \quad \vee \quad 3-x=-2 \quad \to \quad x=1 \quad \vee \quad x=5.$$

2. L'equazione $|7+x| = -3$ non ha soluzioni perché il valore assoluto di un'espressione non può essere un numero negativo.

Animazione nell'eBook

Risolvi $|2x+5| = 3$. $[x=-4 \vee x=-1]$

In generale, $|A(x)| = a$:
se $a \geq 0$, è equivalente ad $A(x) = a \vee A(x) = -a$;
se $a < 0$, l'equazione non ha soluzioni.

Equazioni con più valori assoluti

Esaminiamo un esempio di equazione con più valori assoluti che risolviamo utilizzando alcune delle proprietà del valore assoluto che abbiamo elencato.

ESEMPIO

Animazione nell'eBook

Risolviamo $\dfrac{2|x|}{|x+2|} = |x-1|$.

C.E.: $|x+2| = 0 \to x \neq -2$.

Al primo membro applichiamo la proprietà **3**, letta da destra verso sinistra:

$$\frac{2|x|}{|x+2|} = 2\left|\frac{x}{x+2}\right| = \left|\frac{2x}{x+2}\right|.$$

Scriviamo questa espressione al primo membro dell'equazione e applichiamo la proprietà **4**:

$$\left|\frac{2x}{x+2}\right| = |x-1| \to \frac{2x}{x+2} = \pm(x-1).$$

Quindi dobbiamo risolvere due equazioni e considerare l'unione delle soluzioni:

$$\frac{2x}{x+2} = x-1 \to x^2-x-2=0 \to x=-1 \vee x=2;$$

$$\frac{2x}{x+2} = -x+1 \to x^2+3x-2=0 \to x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Tutti i valori ottenuti soddisfano le C.E., quindi le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=\frac{-3-\sqrt{17}}{2},\ x_4=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$$

Risolvi $\dfrac{|x|}{|x+4|} = 2$. $\left[x=-\frac{8}{3} \vee x=-8\right]$

TEORIA

▸ Risolvi la disequazione $|x-4| > -2x+1$.

Animazione nell'eBook

Animazione nell'eBook

▸ Risolvi la disequazione $|x^2-9| < 7$.
$[-4 < x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < 4]$

Animazione nell'eBook

▸ Risolvi $\dfrac{3-|x-1|}{|x^2-16|} \geq 0$.

Animazione nell'eBook

Animazione nell'eBook

T TEORIA

Disequazioni con valori assoluti

→ Esercizi a p. 53

Per le disequazioni con valori assoluti si procede come per le equazioni.

Casi particolari

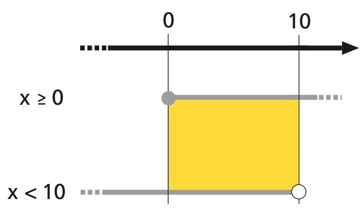
Disequazioni del tipo $|A(x)| < k$, con $k > 0$

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $|x| < 10$.
Dobbiamo risolvere i seguenti sistemi e poi unire le soluzioni trovate.

Primo sistema

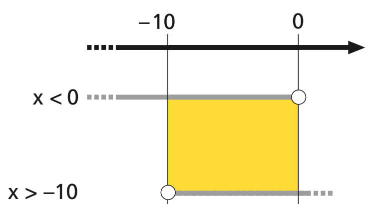
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 10 \end{cases}$$



Soluzioni: $0 \leq x < 10$.

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x < 10 \rightarrow x > -10 \end{cases}$$



Soluzioni: $-10 < x < 0$.

Uniamo le soluzioni dei due sistemi e otteniamo le soluzioni della disequazione:

$$-10 < x < 0 \ \vee \ 0 \leq x < 10 \ \rightarrow \ -10 < x < 10.$$

In generale, con lo stesso procedimento, se $A(x)$ è una qualsiasi espressione contenente x, si ricava che

$|A(x)| < k$, con $k > 0$, è equivalente a:

$$-k < A(x) < k \quad \text{ossia al sistema} \quad \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}.$$

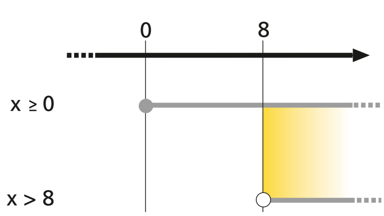
Disequazioni del tipo $|A(x)| > k$, con $k > 0$

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $|x| > 8$.
Cerchiamo le soluzioni dei seguenti sistemi.

Primo sistema

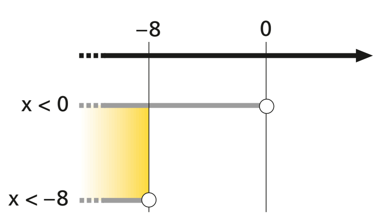
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 8 \end{cases}$$



Soluzioni: $x > 8$.

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x > 8 \rightarrow x < -8 \end{cases}$$



Soluzioni: $x < -8$.

L'unione delle soluzioni dei due sistemi dà le soluzioni della disequazione:
$x < -8 \quad \vee \quad x > 8.$

In generale, con lo stesso procedimento, si ricava che:

$$|A(x)| > k, \text{ con } k > 0, \quad \text{è equivalente ad} \quad A(x) < -k \quad \vee \quad A(x) > k.$$

Se $k = 0$, basta imporre $A(x) \neq 0$.

▸ Risolvi la disequazione
$|x^2 - x| > 6.$
$[x < -2 \vee x > 3]$

Animazione nell'eBook

8 Equazioni e disequazioni irrazionali

Un'**equazione** o **disequazione** è **irrazionale** se in essa ci sono radicali contenenti l'incognita.

MATEMATICA E STORIA

▸ **Quantità irrazionali**
Nell'*Algebra* di Eulero del 1770 troviamo, con un simbolismo quasi identico al nostro, vari problemi che riguardano le equazioni irrazionali, o meglio i modi per rendere razionali espressioni radicali, sostituendo alla variabile opportuni valori.

Problemi – Risoluzioni

TEORIA

Equazioni irrazionali

→ Esercizi a p. 59

Consideriamo l'equazione del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x), \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2.$$

- Se ***n*** è ***dispari***, l'equazione si risolve elevando alla potenza n-esima entrambi i membri, cioè:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \text{è equivalente ad} \quad A(x) = [B(x)]^n \quad (\text{se } n \text{ è dispari}).$$

ESEMPIO

Risolviamo $\sqrt[3]{4 + x - x^3} = -x.$

Poiché $n = 3$ è dispari, l'equazione è equivalente a

$$4 + x - x^3 = -x^3 \rightarrow 4 + x = 0 \rightarrow x = -4.$$

La soluzione è $x = -4$.

▸ Risolvi le equazioni:
a. $\sqrt[3]{3x + 1} = 1;$
b. $\sqrt[3]{x - 3} = -3;$
c. $\sqrt[3]{x^3 - x} = x - 1.$

- Se ***n*** è ***pari***, è necessario porre alcune condizioni.
La condizione di esistenza del radicale:

$$A(x) \geq 0.$$

La condizione di concordanza di segno per $B(x)$: un radicale con indice pari è sempre uguale a un numero positivo o nullo, quindi nell'uguaglianza deve essere positivo o nullo anche il secondo membro. Abbiamo allora:

$$B(x) \geq 0.$$

Per risolvere l'equazione, eleviamo poi alla potenza n-esima entrambi i membri e otteniamo

$$A(x) = [B(x)]^n.$$

Osserviamo che se è verificata questa uguaglianza, essendo $[B(x)]^n \geq 0$, è anche verificata la condizione di esistenza $A(x) \geq 0$, che possiamo quindi tralasciare.

In sintesi, se n è pari, l'equazione $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}.$$

Animazione nell'eBook

Nell'animazione c'è anche la verifica relativa alle soluzioni delle due disequazioni.

ESEMPIO

Risolviamo $\sqrt{2x^2 + x + 4} = 2x - 1$.

Poiché $n = 2$ è pari, l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 4 = (2x-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + x + 4 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \ \vee \ x = 3 \end{cases}.$$

Il valore $x = -\dfrac{1}{2}$ non soddisfa la disequazione del sistema, per cui non è accettabile, mentre $x = 3$ soddisfa la disequazione, quindi è la soluzione del sistema e dell'equazione irrazionale.

▶ Risolvi le equazioni:

a. $\sqrt{3 - x} = 2$;

b. $\sqrt{x + 5} = -6$;

c. $\sqrt{x^2 + 4x} = x + 1$.

Disequazioni irrazionali

→ Esercizi a p. 62

Esaminiamo disequazioni del tipo $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ oppure $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Indice dispari

Se n è *dispari*, le disequazioni si risolvono elevando alla potenza n-esima entrambi i membri, ottenendo così una disequazione equivalente a quella data, cioè:

se n è dispari,

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ è equivalente a $A(x) < [B(x)]^n$;

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ è equivalente a $A(x) > [B(x)]^n$.

▶ Risolvi:

a. $\sqrt[3]{2 - 3x} > -2$;

b. $\sqrt[3]{4x^2 + 5x} \leq x$.

Animazione nell'eBook

ESEMPIO

Risolviamo $\sqrt[3]{-1 + 7x} \leq x - 1$.

Eleviamo al cubo i due membri e svolgiamo i calcoli:

$$\sqrt[3]{-1 + 7x} \leq x - 1 \rightarrow -1 + 7x \leq (x-1)^3 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x \geq 0.$$

Scomponiamo in fattori:

$$x^3 - 3x^2 - 4x \geq 0 \rightarrow x(x^2 - 3x - 4) \geq 0 \rightarrow x(x-4)(x+1) \geq 0.$$

Studiamo il segno dei tre fattori e del prodotto.

F_1: $x > 0$;

F_2: $x - 4 > 0 \rightarrow x > 4$;

F_3: $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$.

		−1		0		4	
F_1	−		−	0	+		+
F_2	−		−		−	0	+
F_3	−	0	+		+		+
$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$	−	0	+	0	−	0	+

La disequazione è verificata per: $-1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4$.

Indice pari

Se n è *pari*, consideriamo il caso $n = 2$ e teniamo conto della seguente proprietà.

Se a e b sono due numeri reali positivi o nulli, la relazione di disuguaglianza che c'è fra i due numeri è la stessa che c'è fra i loro quadrati:

$$\forall\, a, b \geq 0\colon\ a < b \quad \leftrightarrow \quad a^2 < b^2.$$

Per esempio: $5 > 3 \leftrightarrow 5^2 > 3^2$.
La relazione può non essere valida se i due numeri non sono entrambi positivi o nulli. Per esempio: $-5 < 3$ ma non è vero che $25 < 9$.

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$
Data la disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$, per risolverla, dobbiamo porre la condizione di esistenza del radicale:

$$A(x) \geq 0.$$

Inoltre, poiché il radicale quadratico è un numero positivo o nullo, perché sia vera la disuguaglianza deve essere:

$$B(x) > 0.$$

Poste queste due condizioni, i due membri della disequazione sono entrambi positivi o nulli, quindi possiamo elevarli al quadrato, ottenendo:

$$A(x) < [B(x)]^2.$$

In sintesi, la disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$ è equivalente al sistema:

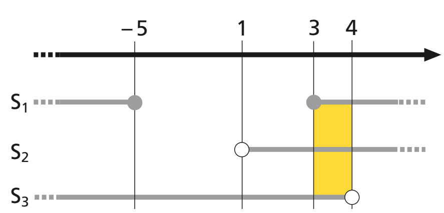
$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}.$$

ESEMPIO
Risolviamo la disequazione $\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$.

Essa è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < (x-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -5 \ \vee\ x \geq 3 \\ x > 1 \\ 4x < 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \ \vee\ x \geq 3 \ \text{—— } S_1 \\ x > 1 \ \text{—— } S_2 \\ x < 4 \ \text{—— } S_3 \end{cases}.$$



Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione, sono

$$3 \leq x < 4.$$

Animazione nell'eBook

▸ Risolvi
$\sqrt{x^2 - 9} \leq 4 - x$.

Animazione nell'eBook

Se la disequazione è del tipo $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^2 \end{cases}.$$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Poniamo la condizione di esistenza del radicale: $A(x) \geq 0$.

Dobbiamo poi risolvere due sistemi, distinguendo il caso in cui $B(x)$ è minore di 0 e quello in cui è maggiore o uguale a 0.

- Se $B(x) < 0$, la disequazione iniziale è senz'altro soddisfatta, perché il secondo membro che è negativo risulta sicuramente minore del primo, che è positivo o nullo. Quindi una parte delle soluzioni della disequazione irrazionale è data da:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}.$$

- Se $B(x) \geq 0$, entrambi i membri della disuguaglianza sono positivi o nulli, quindi, se li eleviamo al quadrato, otteniamo una disuguaglianza con lo stesso verso:

$$A(x) > [B(x)]^2.$$

Se è verificata questa relazione, $A(x)$, essendo maggiore di un quadrato, è certamente positivo: la condizione di esistenza del radicale, $A(x) \geq 0$, è superflua. Otteniamo pertanto le restanti soluzioni della disequazione iniziale da:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}.$$

In sintesi, l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}.$$

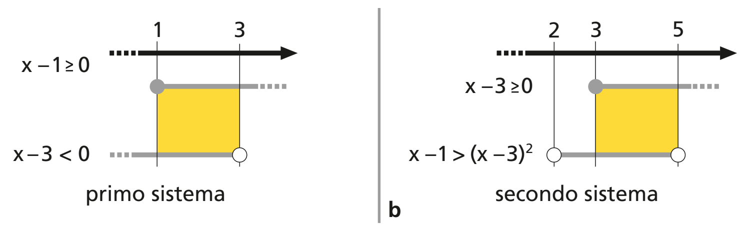
Animazione nell'eBook

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\sqrt{x-1} > x-3$. Otteniamo:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \;\rightarrow\; 2 < x < 5. \end{cases}$$



a primo sistema

b secondo sistema

Il primo sistema ha come soluzioni $1 \leq x < 3$, il secondo $3 \leq x < 5$. L'unione dei due intervalli dà l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$1 \leq x < 5.$$

Risolvi
$\sqrt{x^2 + x - 2} \geq 2 - x$.

Animazione nell'eBook

Risolvi
$\sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt[3]{x^3 + 1}$.

Animazione nell'eBook

T TEORIA

IN SINTESI
Equazioni e disequazioni

Disequazioni e princìpi di equivalenza

- **Disequazione**: è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si cercano i valori di una o più lettere (le **incognite**) che la rendono vera.
  Tali valori sono le **soluzioni** della disequazione.

- **Princìpi di equivalenza**
  Data una disequazione, si ottiene una a essa equivalente:
  - aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero (o espressione);
  - moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *positivo*;
  - moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *negativo* e *cambiando il verso* della disuguaglianza.

Disequazioni di primo grado

Risoluzione della **disequazione di primo grado intera $ax > b$**:

- se $a > 0$, $\quad x > \frac{b}{a}$;
- se $a = 0$, $\quad 0 \cdot x > b$ $\begin{cases} \text{se } b \geq 0, & \nexists x \in \mathbb{R}; \\ \text{se } b < 0, & \forall x \in \mathbb{R}; \end{cases}$
- se $a < 0$, $\quad x < \frac{b}{a}$.

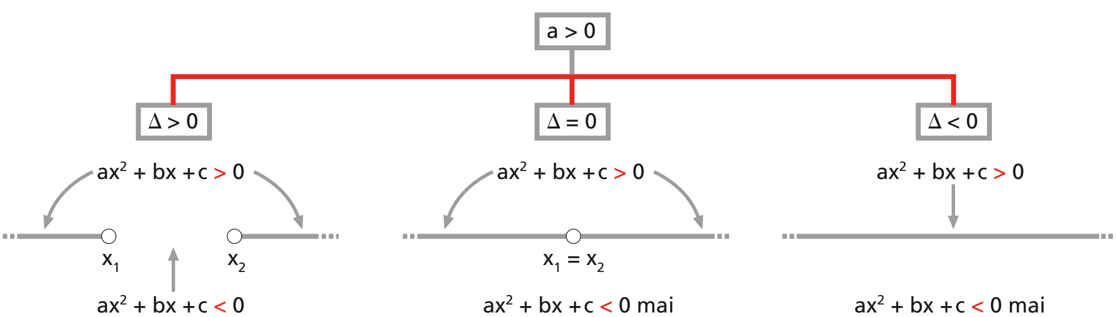
Disequazioni di secondo grado

- **Disequazione intera di secondo grado**: può essere ricondotta alla forma normale

  $$ax^2 + bx + c > 0, \quad \text{con} \quad a > 0,$$

  o alle analoghe che si ottengono con i segni $<$, $\leq$ o $\geq$.

- Per risolverla consideriamo l'*equazione associata* $ax^2 + bx + c = 0$, di cui chiamiamo x_1 e x_2 le soluzioni (quando esistono).



continua »

TEORIA

Disequazioni di grado superiore al secondo e disequazioni fratte

- Una disequazione del tipo $P(x) > 0$, con $P(x)$ polinomio di grado maggiore di 2, può essere risolta scomponendo in fattori di primo e secondo grado il polinomio $P(x)$ e **studiando il segno** del prodotto.
- Analogamente, per risolvere una **disequazione fratta** del tipo

  $$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \text{ posto } B(x) \neq 0,$$

  dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$.

Sistemi di disequazioni

Sistema di disequazioni: è un insieme di più disequazioni nella stessa incognita, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.

Equazioni e disequazioni con valori assoluti

- Per risolvere **equazioni** o **disequazioni con il valore assoluto** di espressioni contenenti l'incognita, si esamina il segno di ogni espressione che sia all'interno di un valore assoluto.
- L'equazione $|\boldsymbol{A(x)}| = \boldsymbol{a}$ non ha soluzione se $a < 0$, altrimenti si risolve ponendo $A(x) = \pm a$.
- La disequazione $|\boldsymbol{A(x)}| < \boldsymbol{k}$, con $k > 0$, è equivalente a $-k < A(x) < k$, ossia al sistema:

  $$\begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$$

- Le soluzioni della disequazione $|\boldsymbol{A(x)}| > \boldsymbol{k}$, con $k > 0$, sono date dall'unione delle soluzioni delle disequazioni $A(x) < -k$ e di $A(x) > k$.

Equazioni e disequazioni irrazionali

Un'**equazione** o **disequazione** è **irrazionale** se contiene radicali con l'incognita nel radicando.

Equazioni irrazionali	
L'equazione	**equivale a**
$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$	• $A(x) = [B(x)]^n$ se n è dispari • $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$ se n è pari

Disequazioni irrazionali	
La disequazione	**equivale a**
$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$	• $A(x) < [B(x)]^n$ se n è dispari • $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$ se n è pari
$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$	• $A(x) > [B(x)]^n$ se n è dispari • $\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$ se n è pari

TEORIA

ESERCIZI

1 Disequazioni

1 **VERO O FALSO?**

a. La disequazione $\frac{2x^3}{5} - \frac{x}{4} + 3 < 0$ nell'incognita x è di terzo grado fratta. V F

b. $\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{3}\,x > 1$ è una disequazione intera. V F

c. La disequazione $\frac{x-1}{k+3} > 0$ è letterale fratta nell'incognita x. V F

d. In una disequazione intera non ci sono condizioni di esistenza. V F

Rappresentazione delle soluzioni

→ Teoria a p. 2

2 **TEST** L'intervallo $]0; 50]$ è:

A limitato. B chiuso. C illimitato. D infinito.

Stabilisci se i seguenti insiemi sono intervalli e, in caso affermativo, stabilisci se sono aperti o chiusi. Rappresentali sulla retta orientata e utilizzando la notazione con le parentesi quadre.

3 $\{x \mid x \in \mathbb{R}; 3 \le x \le 7\}$

4 $\{7, 9\}$

5 $\{x \mid x \in \mathbb{R}; -5 \le x < 8\}$

6 $\{x \mid x \in \mathbb{R}; -3 < x < -2\}$

7 $\{x \mid x \in \mathbb{R}; x \ge 7\}$

8 $\{x \mid x \in \mathbb{R}; x < 5\}$

Rappresenta i seguenti intervalli (o unioni di intervalli) mediante disuguaglianze e parentesi quadre.

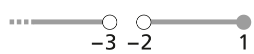
9 

10 

11 

12 

13 

14 

15 **VERO O FALSO?**

a. L'intervallo $]2; 10]$ comprende tutti i numeri maggiori di 2 e minori di 10, estremi esclusi. V F

b. L'intervallo $]-\infty; 4]$ comprende tutti i numeri minori o uguali a 4. V F

c. Un intervallo limitato è chiuso se sono compresi i due estremi. V F

d. L'insieme dei numeri minori di $-$ o maggiori di 7 è l'unione di due intervalli. V F

Scrivi i seguenti intervalli con le disuguaglianze e con le parentesi quadre. Indica tutti i numeri reali che sono:

16 compresi tra -2 e 9, estremi inclusi.

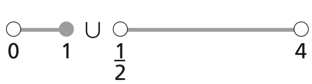
17 compresi tra -4 e 5, con -4 incluso e 5 escluso.

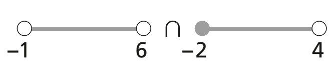
18 positivi e minori o uguali a 4.

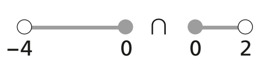
19 minori o uguali a -3 o maggiori di 1.

Rappresenta su una stessa retta orientata i seguenti insiemi e scrivi il risultato anche con le disuguaglianze e con le parentesi quadre.

20 

21 

22 

23 

24 $\varnothing \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\}$

25 $]1; 9] \cap [-4; 3[$

D Disequazioni equivalenti

→ Teoria a p. 3

26 **VERO O FALSO?** Sono equivalenti le disequazioni:

a. $x - 2x^2 < -x + 5$ e $2x^2 - 2x + 5 > 0$. V F

b. $-6b - 1 > 3$ e $6b + 1 > -3$. V F

c. $\frac{x^2+2}{x} < \frac{3}{x}$ e $x^2 + 2 < 3$. V F

d. $\frac{x+1}{x^2} > \frac{2}{x^2}$ e $x + 1 > 2$. V F

2 Disequazioni di primo grado

Attività interattiva

→ Teoria a p. 4

Disequazioni numeriche intere

27 **ASSOCIA** ogni disequazione alle sue soluzioni.

a. $x > x + 1$ **b.** $a + 2 \geq a + 2$ **c.** $-4x < 0$ **d.** $a < -a$

1.  0 **2.** $\varnothing$ **3.** $\mathbb{R}$ **4.**  0

28 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Gabriele risolve la disequazione $(1 - \sqrt{3})x > 2$ ottenendo $x > \frac{2}{1 - \sqrt{3}}$. Alice non è d'accordo. Perché?

Risolvi le seguenti disequazioni numeriche intere.

29 $2x < \frac{1 - 7x}{-4}$ $[x < -1]$

30 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq x(x - 6)$ $\left[x \geq \frac{1}{3}\right]$

31 $\frac{x - 6}{1 - \sqrt{3}} > \frac{3}{1 - \sqrt{3}}$ $[x < 9]$

32 $\frac{3x + 5}{2} - \frac{8x - 5}{7} < \frac{x - 1}{14}$ $\left[x < -\frac{23}{2}\right]$

33 $\frac{3 - x^2}{2} + 7\left(\frac{1}{2} + x\right) < \frac{1}{2}(8 - x^2)$ $\left[x < -\frac{1}{7}\right]$

34 $\frac{7x(x - 1)}{3} - 5(x^2 - 2x - 1) > \frac{1}{3} - 8x\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{3}x\right)$ $\left[x > -\frac{7}{10}\right]$

35 $(x - 3)(x + 3) - \frac{1}{2}(3 - 2x) + 1 - 7\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{7}x^2\right) < 0$ $[x < 20]$

36 $x(2 - x)^2 + (x - 6)(x + 1) - x^3 - 2 > -3(x - 1)(x + 1)$ $[x < -11]$

37 $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 + (x - 4)(x + 4) > -\frac{2x + 14}{2} + \frac{5}{4}x^2$ $[x > 4]$

38 $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x + 1)^2 - 5x > 5(1 - x) + x^2(1 + x) + 2$ $\left[x > \frac{5}{2}\right]$

39 $x\left(\frac{1}{4}x + 1\right) + \frac{1}{3}x > -\frac{1}{4}(4x - 3)(4x + 3) - \frac{1}{4}(13 - x^2) + 4x\left(x + \frac{1}{3}\right)$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

40 $\frac{x + 4}{12} - \frac{x + 2}{8} + \frac{5}{24}(x - 1) > \frac{x - 1}{4} - \frac{x - 6}{24}$ $[x < -3]$

41 $\frac{3x - 2}{5} + \frac{5x - 6}{15} + \frac{x - 3}{10} - \frac{x - 3}{30} \geq 0$ $[x \geq 1]$

42 $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}(x + 3) - 2\left(\frac{15}{4} + 3x\right) > (x - 3)^2$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

43 $\left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2\left(x^2 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{72} > 0$ $\left[x > -\frac{11}{24}\right]$

44 $x^2+1+\sqrt{3}(x+\sqrt{2})-\sqrt{2}(x+\sqrt{3})<-\sqrt{3}x+(x+\sqrt{3})^2$ $[x>-\sqrt{2}]$

45 $\dfrac{x}{3-\sqrt{5}}+\dfrac{2-x}{3+\sqrt{5}}+1>-\dfrac{2\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$ $[x>-\sqrt{5}]$

46 $(x-\sqrt{2})^2-(x+\sqrt{2})^2<\sqrt{2}(-4x+\sqrt{2})$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

47 Trova per quali valori di a l'equazione $ax^2-4x+2=0$ non ha soluzioni reali. $[a>2]$

48 Calcola per quali valori di k la soluzione dell'equazione $2x-3k=6-7k$ è maggiore di 4. $\left[k<-\frac{1}{2}\right]$

49 REALTÀ E MODELLI **Che colazione!** Quanti biscotti può mangiare al massimo Carolina, insieme al latte, per non superare le 650 kcal? $[4]$

50 La somma di tre numeri naturali consecutivi deve essere maggiore di 24. Qual è la terna con i numeri più piccoli che soddisfa la richiesta? $[8, 9, 10]$

51 REALTÀ E MODELLI **Compito in classe** Un test è composto da 10 domande. Ogni risposta esatta vale un punto; per ogni risposta mancata o errata vengono tolti 0,25 punti. Quante risposte esatte bisogna dare per ottenere almeno 6 punti? [risposte esatte ≥ 7]

E ESERCIZI

Disequazioni letterali intere

52 VERO O FALSO?

a. La disequazione $ax>a$ ha come soluzione $x>1$, $\forall a\in\mathbb{R}$. V F

b. La disequazione $(a-1)x>1$, se $a<1$, ha come soluzione $x<\dfrac{1}{a-1}$. V F

c. La disequazione $b(x+1)\geq 0$ è equivalente a $x+1\geq 0$ se $b\neq 0$. V F

d. La disequazione $k^2x<2$ è equivalente a $x<\dfrac{2}{k^2}$ se $k\neq 0$. V F

53 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo la disequazione $(x+a)^2-(x-a)(x+a)\leq 0$.

Eseguiamo i calcoli che permettono di arrivare alla forma $ax\leq b$:

$$x^2+2ax+a^2-x^2+a^2\leq 0 \quad\rightarrow\quad 2ax+2a^2\leq 0 \quad\rightarrow\quad ax\leq -a^2.$$

Discussione. Abbiamo casi diversi a seconda del segno del coefficiente a di x.

- $a>0$: possiamo dividere entrambi i membri per a senza cambiare verso alla disequazione: $x\leq -a$.
- $a=0$: sostituendo, otteniamo $0x\leq 0$, vera per qualunque valore della x: $\forall x\in\mathbb{R}$.
- $a<0$: dividiamo per una quantità negativa, quindi cambiamo il verso: $x\geq -a$.

Risolvi le seguenti disequazioni intere letterali nell'incognita x, discutendo al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

54 $a(x-1)<3(1-a)$ $\left[a>0, x<\dfrac{3-2a}{a}; a=0, \forall x\in\mathbb{R}; a<0, x>\dfrac{3-2a}{a}\right]$

55 $1-ax \geq -2(a-1)$ $\left[a>0, x \leq \frac{2a-1}{a}; a=0, \forall x \in \mathbb{R}; a<0, x \geq \frac{2a-1}{a}\right]$

56 $bx-1<b(1-x)$ $\left[b>0, x<\frac{b+1}{2b}; b=0, \forall x \in \mathbb{R}; b<0, x>\frac{b+1}{2b}\right]$

57 $b(x-2)>b(b+3)$ $[b>0, x>b+5; b=0, \nexists x \in \mathbb{R}; b<0, x<b+5]$

58 $x(3a+2x)+2a(x-1)<2x^2$ $\left[a>0, x<\frac{2}{5}; a<0, x>\frac{2}{5}; a=0, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

59 $(x-a)(a+1)<(x+2)(a-1)+4-ax$ $[a<-2, x>a+1; a=-2, \nexists x \in \mathbb{R}; a>-2, x<a+1]$

60 $(kx+1)(1-kx)+k^2x(x+3)+3k>2(1+k)$ $\left[k \neq 0, x>\frac{1-k}{3k^2}; k=0, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

61 $(2x+a)(a-1) \leq 2a^2-2$ $\left[a>1, x \leq \frac{a+2}{2}; a=1, \forall x \in \mathbb{R}; a<1, x \geq \frac{a+2}{2}\right]$

62 $bx-1<2(x-2b)$ $\left[b<2, x>\frac{1-4b}{b-2}; b=2, \nexists x \in \mathbb{R}; b>2, x<\frac{1-4b}{b-2}\right]$

63 $(x-2a)^2-(2ax-1)^2>2a(1-x)+x^2(1-4a^2)-1$
$[a>0, x>1-2a; a<0, x<1-2a; a=0, \nexists x \in \mathbb{R}]$

64 $2a(x+a)-a(x+2a)<a-2x$ $\left[a>-2, x<\frac{a}{a+2}; a<-2, x>\frac{a}{a+2}; a=-2, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

65 $3x-a \leq 2a(1-x)$ $\left[a>-\frac{3}{2}, x \leq \frac{3a}{3+2a}; a<-\frac{3}{2}, x \geq \frac{3a}{3+2a}; a=-\frac{3}{2}, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

66 $\frac{1-x}{2}+\frac{3bx-1}{4}-b<0$ $\left[b>\frac{2}{3}, x<\frac{4b-1}{3b-2}; b=\frac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}; b<\frac{2}{3}, x>\frac{4b-1}{3b-2}\right]$

67 $a(a+x)+x>2(a^2-a-2)+2+a$ $[a<-1, x<a-2; a=-1, \nexists x \in \mathbb{R}; a>-1, x>a-2]$

68 $\frac{kx-2}{k} \geq \frac{x}{2}+1$ $\left[k \neq 0, x \geq \frac{2k+4}{k}; k=0, \text{priva di significato}\right]$

69 $\frac{ax+2}{a-1}<3x$
$\left[a<1 \vee a>\frac{3}{2}, x>\frac{2}{2a-3}; a=1, \text{priva di significato}; 1<a<\frac{3}{2}, x<\frac{2}{2a-3}; a=\frac{3}{2}, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

70 $1-2x>\frac{x}{a}$
$\left[a<-\frac{1}{2} \vee a>0, x<\frac{a}{1+2a}; a=-\frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{2}<a<0, x>\frac{a}{1+2a}; a=0, \text{priva di significato}\right]$

71 Dati i tre numeri a, $a+x$, $a+2x$, trova per quali valori di x il prodotto dei primi due è maggiore del terzo al variare di a.
$\left[a>2, x>\frac{a(1-a)}{a-2}; a=2, \forall x \in \mathbb{R}; a<2, x<\frac{a(1-a)}{a-2}\right]$

72 Un rettangolo ha i lati che misurano $2b$ e $b+x$. Trova per quali valori di x l'area è minore di 2.
$\left[b>0, -b \leq x<\frac{1-b^2}{b}\right]$

Studio del segno di un prodotto

AL VOLO Spiega perché le seguenti disequazioni hanno lo stesso insieme di soluzioni.

73 $(x+2)(x-1)>0$, $\frac{100}{7}(x+2)(x-1)>0$.

74 $x(x+1)>0$, $-2x(x+1)<0$.

75 $-\frac{1}{5}x(2x-1)<0$, $\frac{1}{5}x(1-2x)<0$.

76 $(3-x)(x-5)>0$, $(x-3)(5-x)>0$.

77 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo la disequazione $-\frac{1}{2}x(x-2)(4-x) \geq 0$.

Studiamo il segno di ognuno dei fattori, cercando i valori di x per i quali ciascun fattore è positivo:

$$-\frac{1}{2}x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 0$$

$$x - 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 2$$

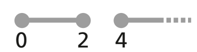
$$4 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 4.$$

Compiliamo il quadro dei segni.

		0		2		4	
$-\frac{1}{2}x$	+	0	−		−		−
$x-2$	−		−	0	+		+
$4-x$	+		+		+	0	−
$-\frac{1}{2}x(x-2)(4-x)$	−	0	+	0	−	0	+

Poiché si richiede che il prodotto sia positivo o nullo, le soluzioni della disequazione sono:

$$0 \leq x \leq 2 \ \vee \ x \geq 4.$$



Risolvi le seguenti disequazioni.

78 $3(x-8)(2-4x) \leq 0$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 8\right]$

79 $(-x-3)\left(\frac{1}{2}x - 1\right) < 0$ $[x < -3 \vee x > 2]$

80 $6x(10x+2) \leq 0$ $\left[-\frac{1}{5} \leq x \leq 0\right]$

81 $-\frac{1}{3}(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0$ $\left[-2 < x < \frac{1}{3}\right]$

82 $-(2x+5)(1-x) < 0$ $\left[-\frac{5}{2} < x < 1\right]$

83 $\frac{(2x-1)(1+x)}{-2} < 0$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{1}{2}\right]$

84 $(15 + 30x)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) > 0$ $\left[x < -2 \ \vee \ x > -\frac{1}{2}\right]$

85 $x(x-1)(6+2x)(4x-8) < 0$ $[-3 < x < 0 \vee 1 < x < 2]$

86 Se $A(x)$ e $B(x)$ sono binomi di primo grado, trova le soluzioni delle disequazioni

a. $A(x) \cdot x \geq 0$, con $A(x) \geq 0$ per $x \leq 4$;

b. $-A(x) \cdot B(x) > 0$, con $A(x) > 0$ per $x < -1$ e $B(x) > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$. $\left[\text{a) } 0 \leq x \leq 4; \text{ b) } x < -1 \ \vee \ x > -\frac{1}{2}\right]$

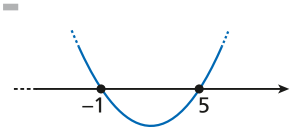
3 Disequazioni di secondo grado

Segno di un trinomio di secondo grado

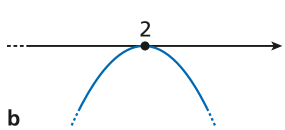
Attività interattiva → Teoria a p. 5

LEGGI IL GRAFICO In ogni figura è rappresentata una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$. Indica il segno dei trinomi associati a ciascuna parabola.

87

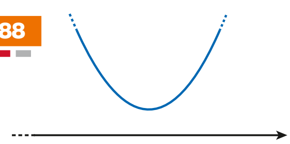


a

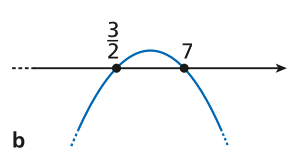


b

88



a



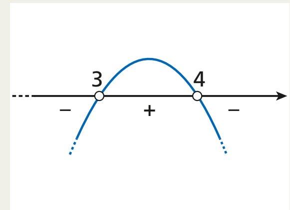
b

89 **ESERCIZIO GUIDA** Studiamo il segno dei seguenti trinomi di secondo grado:

a. $-x^2+7x-12$; **b.** $-x^2+10x-25$; **c.** $4x^2+x+3$.

a. Risolviamo l'equazione associata $-x^2+7x-12=0$.

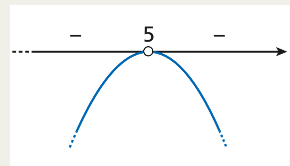
$$\Delta = 49-48=1>0 \quad \to \quad x=\frac{-7\pm 1}{-2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$



Disegniamo la parabola associata, che è rivolta verso il basso perché il coefficiente di x^2 è negativo. Deduciamo dal grafico che il trinomio è positivo per $3<x<4$, negativo per $x<3 \vee x>4$ e nullo per $x=3 \vee x=4$.

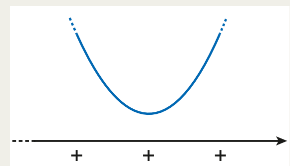
b. L'equazione associata $-x^2+10x-25=0$ ha:

$$\frac{\Delta}{4}=25-25=0 \quad \to \quad x_1=x_2=5.$$



Il coefficiente di x^2 è negativo, quindi la parabola rivolge la concavità verso il basso e il trinomio è negativo per $x \neq 5$, nullo per $x=5$.

c. L'equazione associata $4x^2+x+3=0$ ha $\Delta=1-48=-47<0$, pertanto è impossibile. Il coefficiente di x^2 è positivo, quindi la parabola associata è rivolta verso l'alto e ha tutti i punti con ordinata positiva. Il trinomio è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$.



Studia il segno dei seguenti trinomi di secondo grado.

90 x^2-6x+9 $[\text{positivo se } x \neq 3]$

91 $3x^2-4x+1$ $\left[\text{positivo se } x<\frac{1}{3} \vee x>1\right]$

92 $-4x^2+3x-2$ $[\text{negativo } \forall x \in \mathbb{R}]$

93 $a^2+2a-24$ $[\text{positivo se } a<-6 \vee a>4]$

94 $-x^2+x+2$ $[\text{positivo se } -1<x<2]$

95 b^2+2b+1 $[\text{positivo se } b \neq -1]$

96 $5x^2+2x+1$ $[\text{positivo } \forall x \in \mathbb{R}]$

97 $-7a^2+5a-3$ $[\text{negativo } \forall a \in \mathbb{R}]$

98 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Perché per studiare il segno di $3x^2+4$ e $-x^2-5$ non serve eseguire calcoli?

AL VOLO **Studia il segno delle seguenti espressioni senza fare calcoli.**

99 x^2+2; $(x-3)^2$.

100 $(-x-2)^2$; $-4-9x^2$.

101 $-(1-x)^2$; $\sqrt{2}+x^2$.

Risoluzione di una disequazione di secondo grado

→ Teoria a p. 7

Attività interattiva

AL VOLO **Risolvi senza fare calcoli.**

102 $-3(2x-5)^2 \geq 0$

103 $(\sqrt{2}-2)x^2 \leq (1+x)^2$

104 $(x-8)^2 \geq -x^2$

105 $3 \leq 5+2x^2$

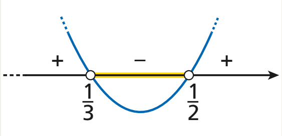
L'equazione associata ha $\Delta > 0$

106 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo la disequazione $5x(x-1)+x^2+1<0$.

Sviluppiamo i calcoli e otteniamo: $6x^2 - 5x + 1 < 0$.

Risolviamo l'equazione associata $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \pm 1}{12} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{2}$$



Il trinomio è negativo per valori interni all'intervallo delle radici, pertanto la disequazione è verificata per $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

107 $3x^2 - 12 > 0$ $\quad [x < -2 \vee x > 2]$

108 $x^2 + 3x - 18 \geq 0$ $\quad [x \leq -6 \ \vee \ x \geq 3]$

109 $-2x^2 + 3x + 2 < 0$ $\quad \left[x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > 2\right]$

110 $-x^2 - 6x + 7 > 0$ $\quad [-7 < x < 1]$

111 $3x^2 - 2x - 5 > 0$ $\quad \left[x < -1 \vee x > \frac{5}{3}\right]$

112 $10x^2 + 4x - \frac{1}{2} \leq 0$ $\quad \left[-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{10}\right]$

113 $\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x - 7 < 0$ $\quad [-7 < x < 3]$

114 $x^2 - \frac{11}{2}x - 3 \geq 0$ $\quad \left[x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 6\right]$

115 **COMPLETA** la tabella con le soluzioni della disequazione indicata, considerando $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

Disequazione	$f(x) > 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \leq 0$
Soluzione				

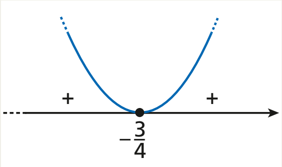
L'equazione associata ha $\Delta = 0$

116 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo la disequazione $9 + 8x(3 + 2x) \leq 0$.

Svolgiamo i calcoli e otteniamo: $16x^2 + 24x + 9 \leq 0$.

Risolviamo l'equazione associata $16x^2 + 24x + 9 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 144 - 144 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2 = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$



Il trinomio è positivo per ogni valore di $x \neq -\frac{3}{4}$ e si annulla per $x = -\frac{3}{4}$.

Pertanto l'unica soluzione della disequazione è $x = -\frac{3}{4}$.

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

117 $9x^2 - 12x + 4 < 0$ $\quad [\nexists x \in \mathbb{R}]$

118 $-16x^2 - 9 + 24x \leq 0$ $\quad [\forall x \in \mathbb{R}]$

119 $20x - 4x^2 - 25 < 0$ $\quad \left[x \neq \frac{5}{2}\right]$

120 $-\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25 > 0$ $\quad [\nexists x \in \mathbb{R}]$

121 $4x^2 + \frac{1}{4} - 2x \geq 0$ $\quad [\forall x \in \mathbb{R}]$

122 $3(4x - 3) \geq 4x^2$ $\quad \left[x = \frac{3}{2}\right]$

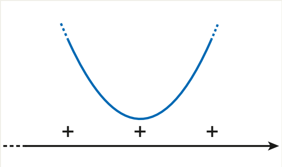
L'equazione associata ha $\Delta < 0$

123 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo la disequazione $5(2x + 7) < -x^2$.

Sviluppiamo i calcoli e otteniamo: $x^2 + 10x + 35 < 0$.

Risolviamo l'equazione associata $x^2 + 10x + 35 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 35 = -10 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{equazione impossibile.}$$



Il trinomio è sempre positivo, pertanto la disequazione è impossibile.

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

124 $3x^2 + 2x + 5 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

125 $\frac{1}{9}x^2 + x + 9 \leq 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

126 $x^2 + x + 7 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

127 $x(2 - x) < 6$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

128 $-x^2 - 6 > 3x$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

129 $2(x^2 + 4) < x$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

130 **TEST** Solo una delle seguenti disequazioni è sempre verificata. Quale?

A $x^2 + 3x + 12 < 0$ B $9x^2 + 6x + 1 > 0$ C $-x^2 + x - 5 \leq 0$ D $x^2 - 2x + 1 > 0$

131 **FAI UN ESEMPIO** di disequazione di secondo grado verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ e di una impossibile.

E ESERCIZI

Riepilogo: Disequazioni di secondo grado intere

Disequazioni numeriche

132 **CACCIA ALL'ERRORE** Correggi le risoluzioni delle seguenti disequazioni.

a. $x^2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0$ **b.** $x^2 \geq 36 \quad \rightarrow \quad x \geq \pm 6$ **c.** $x^2 \geq 5x \quad \rightarrow \quad x \geq 5$

133 **VERO O FALSO?**

a. L'equazione $x^2 + 6x + 10 = 0$ è impossibile, quindi la disequazione $x^2 + 6x + 10 > 0$ è impossibile. V F

b. La disequazione $-3x^2 - 5 < 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

c. Il trinomio $x^2 - 8x + 16$ è sempre positivo. V F

d. Il trinomio $-2x^2 + 5x - 5$ è sempre negativo. V F

134 **TEST** Se una disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \leq 0$ ha equazione associata con discriminante nullo, allora:

A la disequazione non è mai verificata.

B la disequazione è verificata per qualunque valore di x.

C se $a > 0$, la disequazione è verificata per qualunque valore di x.

D se $a < 0$, la disequazione è verificata per qualunque valore di x.

135 **COMPLETA**

a. $x^2 \; \square \; 7 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. $x^2 \; \square \; 1 < 0$ per $-1 < x < 1$.

c. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ per $\square$.

d. $-x^2 + 2x - 10 > 0$ per $\square$.

e. $x^2 \; \square \; 9 < 0$ per nessun valore di x.

f. $-x^2 + 4x - 3 \; \square \; 0$ per $1 \leq x \leq 3$.

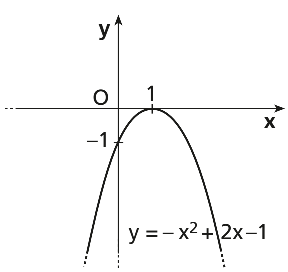
136 **TEST** Osservando il grafico in figura puoi dedurre che il segno del trinomio $-x^2 + 2x - 1$ *non* è negativo:

A $\forall x \in \mathbb{R}$.

B $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

C $\nexists x \in \mathbb{R}$.

D per $x = 1$.



137 **TEST** In figura sono rappresentate le soluzioni di *una sola* fra le seguenti disequazioni. Quale?

A $x^2 + 2x > 0$

B $x^2 - 2x < 0$

C $x^2 + 4x + 4 > 0$

D $2x^2 + 4 > 0$