

CAPITOLO 12

FUNZIONI

GONIOMETRICHE

Angoli a New York

È possibile calcolare la lunghezza o l'altezza di oggetti molto lontani da noi, misurando alcuni angoli e alcune distanze vicine a noi. Questo ha contribuito a perfezionare sempre di più gli strumenti per la misurazione degli angoli, i goniometri. Ce ne sono di tutti i tipi: manuali, laser, elettronici ad alta precisione. Hanno nomi specifici a seconda dei dispositivi che utilizzano (universale, con nonio, con alidada...) o dei tipi di angolo che misurano (azimutali, ecclimetri, teodoliti...).

Sei a New York e hai a disposizione solo un goniometro di precisione e un metro a nastro. Riesci a calcolare l'altezza della Statua della Libertà?

→ La risposta a pag. 706



1

TEORIA

1 Misura degli angoli

La **trigonometria** ha lo scopo di studiare i procedimenti di calcolo che permettono di determinare, con l'approssimazione che si vuole, la misura degli elementi di un triangolo (lati e angoli), noti alcuni di essi.

Trova applicazione, in particolare, in astronomia, meccanica, navigazione aerea e marittima, topografia. «Trigonometria» deriva dal greco *trigōnos*, che significa «triangolo», e *métron*, ossia «misura».

Lo studio della trigonometria è preceduto da quello della **goniometria**, ossia di quella parte della matematica che si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni.

• Misura in gradi

→ Esercizi a p. 725

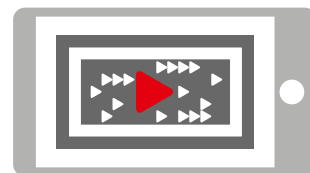
Nel *sistema sessagesimale*, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360^a parte dell'angolo giro.

Il grado sessagesimale viene indicato con $1^\circ = \frac{1}{360}$ dell'angolo giro.

Il grado è suddiviso in 60 *primi*, che vengono indicati con un apice ('): $1^\circ = 60'$.

Ogni primo viene suddiviso in 60 *secondi*, indicati con due apici ("): $1' = 60''$.

Queste suddivisioni in 60 parti danno il nome al sistema di misura.



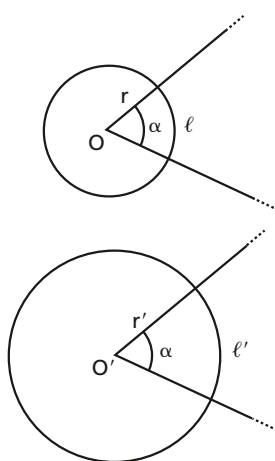
Scarica **GUARDA!**
e inquadrami per accedere
alle risorse digitali
del capitolo

► Calcola la somma di $30^{\circ}24'35''$ e $59^{\circ}35'25''$. È più o meno di un angolo retto?

- Calcola:
- $25^{\circ}12'37'' + 13^{\circ}51'41''$;
 - $180^{\circ} - 5^{\circ}3'2''$;
 - $9^{\circ}30'50'' \cdot 3$.

 **Animazione**
nell'eBook

TEORIA

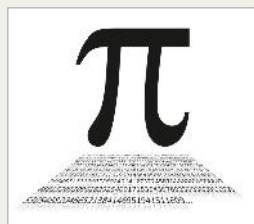


 **Listen to it**

A **radian** is the measure of the angle at the centre of a circle that intercepts an arc whose length is equal to the radius of the circle.

MATEMATICA E STORIA

► L'inafferrabile pi greco



• Perché π affascina tanto i matematici?

 **Risposta**

Un angolo di 32 gradi, 10 primi e 47 secondi viene scritto: $32^{\circ} 10' 47''$.

Il sistema di misura degli angoli con gradi, primi e secondi è il più antico. Risale ai Babilonesi (2000 a.C.), i quali dividevano anche l'anno solare in 360 giorni. Tuttavia, questo sistema presenta il problema di non basarsi su un sistema decimale e di avere quindi procedimenti di calcolo più complicati.

Anche soltanto il calcolo della somma o della differenza delle misure di due angoli non è immediato, come puoi vedere nell'animazione nell'eBook e negli esercizi.

Le calcolatrici scientifiche usano anche il sistema **sessadecimale**, in cui accanto ai gradi si usano decimi, centesimi, millesimi, ... di grado. Per esempio, nel sistema sessadecimale, $37,25^{\circ}$ significa $37^{\circ} + \left(\frac{2}{10}\right)^{\circ} + \left(\frac{5}{100}\right)^{\circ}$.

Misura in radianti

→ Esercizi a p. 726

Per semplificare i calcoli si usa il sistema che ha per unità di misura il radiante.

Per definirlo, consideriamo due circonferenze di raggi r e r' e i due archi l e l' su cui insistono angoli al centro della stessa ampiezza α (figura a lato).

Dalla proporzionalità fra archi e angoli al centro otteniamo

$$l : \alpha^{\circ} = 2\pi r : 360^{\circ} \quad \text{e} \quad l' : \alpha^{\circ} = 2\pi r' : 360^{\circ},$$

$$l = \frac{\alpha^{\circ}\pi}{180^{\circ}} r \quad \text{e} \quad l' = \frac{\alpha^{\circ}\pi}{180^{\circ}} r', \quad \text{) dividiamo membro a membro}$$

$$l : l' = r : r' \quad \rightarrow \quad l : r = l' : r' \quad \rightarrow \quad \frac{l}{r} = \frac{l'}{r'},$$

cioè gli archi sono proporzionali ai rispettivi raggi e il rapporto $\frac{l}{r}$ non varia al variare della circonferenza, ma dipende solo dall'angolo al centro α .

Pertanto, se ogni volta che si misura un arco l si usa come unità di misura il raggio della circonferenza cui appartiene, si ottiene un numero che non dipende dalla circonferenza considerata, ma solo dall'angolo α che sottende l'arco.

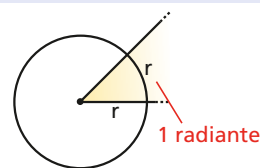
Il rapporto $\frac{l}{r}$ viene quindi assunto come misura, in radianti, dell'angolo α ,

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Come definizione di radiante possiamo allora dare la seguente.

DEFINIZIONE

Data una circonferenza, chiamiamo **radiante** l'angolo al centro che insiste su un arco di lunghezza uguale al raggio.



L'unità di misura viene indicata con rad, ma generalmente, se si esprime un angolo in radianti, si è soliti trascurare l'indicazione dell'unità di misura.

Poiché corrisponde all'intera circonferenza, l'angolo giro misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

L'angolo piatto, che corrisponde a metà circonferenza, misura π , l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ ecc.

Dai gradi ai radianti e viceversa

Date le misure di un angolo α in gradi e in radianti, valgono la proporzione e le seguenti uguaglianze.

$$\alpha^\circ : \alpha_{\text{rad}} = 360^\circ : 2\pi \rightarrow \alpha^\circ = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \quad \alpha_{\text{rad}} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

ESEMPIO

1. A quanti gradi corrisponde 1 radiante?

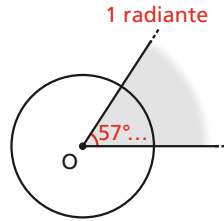
Applichiamo la prima formula:

$$\alpha^\circ = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57^\circ.$$

2. A quanti radianti corrispondono 60°?

Applichiamo la seconda formula:

$$\alpha_{\text{rad}} = \cancel{60^\circ}^1 \cdot \frac{\pi}{\cancel{180^\circ}_3} = \frac{\pi}{3}.$$



► Trasforma:

- a. in radianti le misure di 10°, 18°, 270°;
- b. in gradi sessagesimali le misure di $\frac{\pi}{9}$, 2, $\frac{3}{4}\pi$.

Animazione nell'eBook



Riportiamo in una tabella le misure in radianti e in gradi di alcuni angoli.

Misure degli angoli									
Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

Lunghezza di un arco di circonferenza

Dalla relazione $\alpha = \frac{l}{r}$ ricaviamo che la **lunghezza di un arco** è:

$$l = \alpha r, \quad \text{con } \alpha \text{ misurato in radianti.}$$

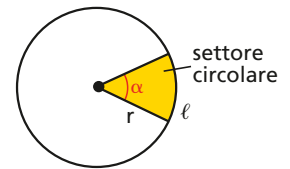
Area del settore circolare

Esprimiamo anche l'area di un settore circolare.

Dalla proporzione: $A_{\text{settore}} : A_{\text{cerchio}} = \alpha : 2\pi,$

ricaviamo: $A_{\text{settore}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot A_{\text{cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \alpha r^2,$

o, tenendo conto che $\alpha = \frac{l}{r}$: $A_{\text{settore}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{r} r^2 = \frac{1}{2} lr.$



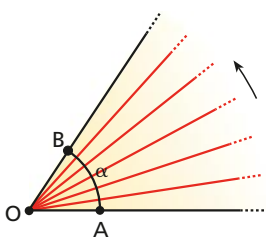
Angoli orientati

→ Esercizi a p. 729

La definizione di angolo come parte di piano delimitata da due semirette con l'origine in comune non è adatta per descrivere tutte le situazioni. Per esempio, nell'avvitare o svitare una vite si descrive un angolo che può essere maggiore di un angolo giro.

È più utile quindi collegare il concetto di angolo a quello di *rotazione*, cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

La rotazione è univoca quando ne specifichiamo il **verso**, **orario** o **antiorario**.

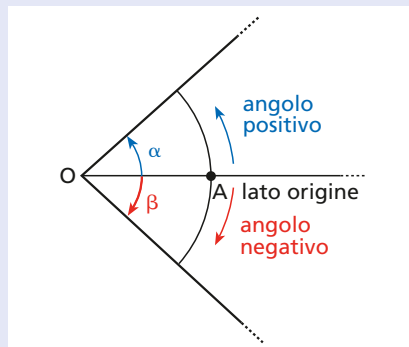


Consideriamo la semiretta OA che ruota in senso antiorario intorno al vertice O , fino a sovrapporsi alla semiretta OB , generando l'angolo $\alpha = \widehat{AOB}$. La semiretta OA si chiama **lato origine** dell'angolo α , la semiretta OB si chiama **lato termine**.

DEFINIZIONE

Un **angolo è orientato** quando sono stati scelti uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.

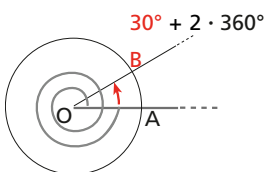
Un angolo orientato è **positivo** quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; è **negativo** quando la rotazione è in senso orario.



Un angolo orientato può anche essere maggiore di un angolo giro.

► **ESEMPIO**

Poiché $750^\circ = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, l'angolo di 750° si ottiene con la rotazione della semiretta OA di due giri completi e di altri 30° .



È possibile scrivere in forma sintetica un qualunque angolo α , minore di un angolo giro, e tutti gli infiniti angoli orientati che da α differiscono di un multiplo dell'angolo giro nel seguente modo:

in gradi: $\alpha + k360^\circ$, con $k \in \mathbb{Z}$; in radianti: $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Quando $k = 0$, otteniamo l'angolo α .

Nel seguito, in espressioni del tipo $\alpha + 2k\pi$, sottintenderemo che k è un numero intero, senza scrivere esplicitamente $k \in \mathbb{Z}$.

► **ESEMPIO**

La scrittura $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ indica gli angoli: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{\pi}{4} \pm 4\pi, \frac{\pi}{4} \pm 6\pi, \dots$

► **ESEMPIO Gira e svita**

Uno svitatore sotto sforzo compie circa 180 giri al minuto.

Per svitare una vite impiega 2 secondi.

- Qual è l'angolo, in gradi e in radianti, descritto dalla punta dello svitatore per svitare la vite?

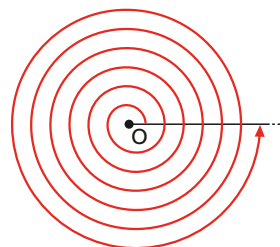


Per trovare il numero dei giri fatti dalla punta in 2 secondi dobbiamo risolvere la proporzione:

$$\frac{180}{\text{giri al minuto}} : \frac{60}{\text{1 minuto} = 60 \text{ secondi}} = x : 2 \rightarrow x = \frac{180 \cdot 2}{60} = 6.$$

In 2 secondi i giri sono 6.

Un giro equivale a un angolo di 360° , o 2π , quindi $6 \cdot 360^\circ = 2160^\circ$, o 12π .



► Scrivi in gradi la misura di almeno 4 angoli che si possono ottenere dall'espressione $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, per particolari valori di k .

Circonferenza goniometrica

Nel piano cartesiano, per **circonferenza goniometrica** intendiamo la circonferenza che ha come centro l'origine O degli assi e raggio di lunghezza 1, ossia la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

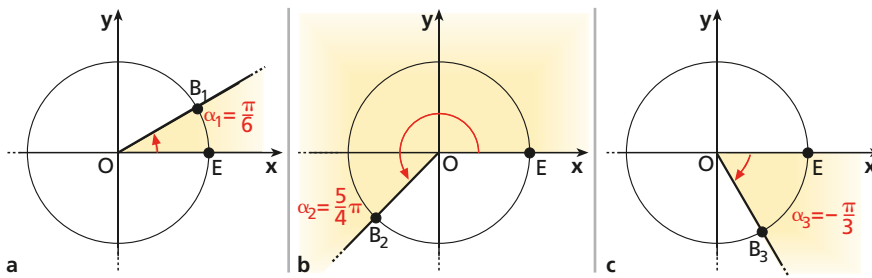
Il punto $E(1; 0)$ si dice **origine degli archi**.

Usando la circonferenza goniometrica, si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse x . In questo modo, a ogni angolo corrisponde un punto di intersezione B fra la circonferenza e il lato termine.

ESEMPIO

Rappresentiamo gli angoli $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \frac{5}{4}\pi$, $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$.

Essi individuano sulla circonferenza i punti B_1, B_2 e B_3 della figura.



Osserviamo che nella circonferenza goniometrica, essendo la lunghezza di un arco $l = \alpha r$ e $r = 1$, se l'angolo \widehat{EOB} è misurato in radianti, la misura della lunghezza dell'arco \widehat{EB} è uguale alla misura di \widehat{EOB} .

2 Funzioni seno e coseno → Esercizi a p. 730

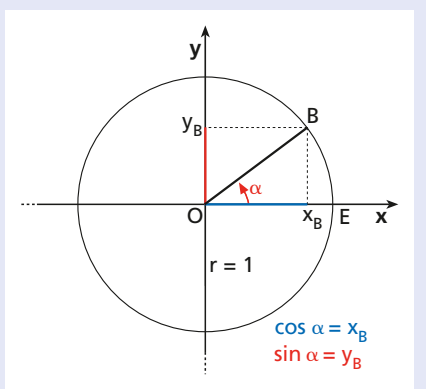
Introduciamo alcune **funzioni goniometriche** che alla misura dell'ampiezza di ogni angolo associano un numero reale.

DEFINIZIONE

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α , e sia B il punto della circonferenza associato ad α .

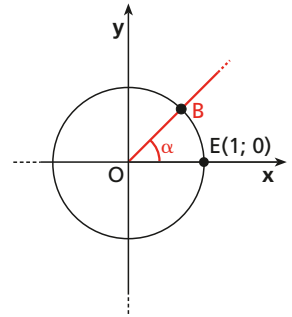
Definiamo **coseno** e **seno** dell'angolo α , e indichiamo con $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa e quello dell'ordinata del punto B :

$\cos \alpha = x_B, \quad \sin \alpha = y_B.$



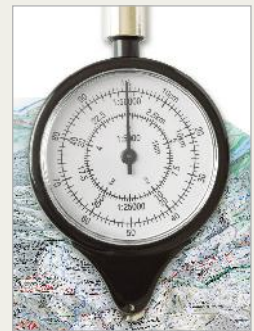
Consideriamo una circonferenza \mathcal{C}' con centro O e raggio qualsiasi $r' \neq 1$.

Prendiamo un angolo α appartenente al primo quadrante individuato dal punto B



MATEMATICA E TOPOGRAFIA

➤ **Rotolare per misurare**



- Come si misura con precisione la lunghezza di una strada?

Risposta

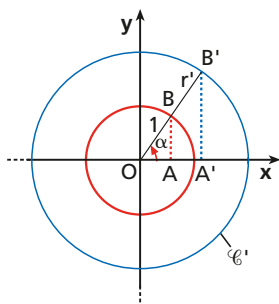


Listen to it

Let α be an oriented angle and B its associated point on the unit circle. The trigonometric functions **cosine** and **sine** are defined as follows:

$\cos \alpha = x_B, \sin \alpha = y_B.$

T
TEORIA



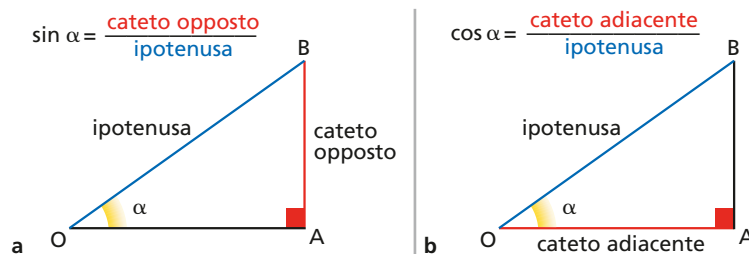
sulla circonferenza goniometrica. Su \mathcal{C}' il punto corrispondente ad α sia B' . Dalla similitudine dei triangoli OBA e $OB'A'$ deduciamo:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \cos \alpha, \quad \frac{\overline{B'A'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} = \sin \alpha.$$

I due rapporti, e quindi $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$, non dipendono dalla particolare circonferenza considerata, ma esclusivamente dall'angolo α .

Osserviamo inoltre che $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ sono numeri puri, perché rapporti di grandezze omogenee, quindi non hanno alcuna unità di misura.

Consideriamo ora un triangolo rettangolo OAB . Possiamo pensare all'ipotenusa OB come al raggio di una circonferenza di centro O , quindi il seno di α è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa, il coseno di α è uguale al rapporto fra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa.



Animazione
nell'eBook

Funzione seno

Animazione
nell'eBook

Funzione coseno

Nelle due animazioni trovi figure dinamiche per studiare:

- i grafici delle due funzioni;
- i loro domini e insiemi immagine;
- la periodicità;
- seno e coseno nei triangoli rettangoli.

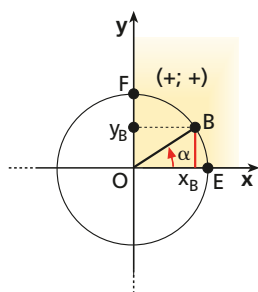
Variazioni delle funzioni seno e coseno

Seno e coseno di un angolo α sono funzioni che hanno come **dominio** \mathbb{R} , perché per ogni valore dell'angolo $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno e un solo punto B sulla circonferenza goniometrica.

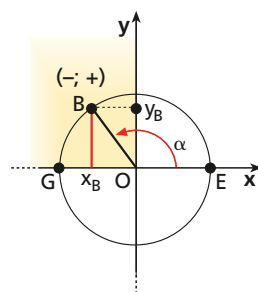
Supponiamo che un punto B percorra l'intera circonferenza goniometrica, a partire da E , in verso antiorario.

Se $\alpha = \widehat{EOB}$, come variano $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ al variare della posizione di B ?

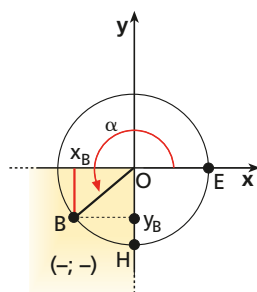
Basta osservare che cosa succede all'ascissa di B (ossia il coseno dell'angolo α) e alla sua ordinata (ossia il seno).



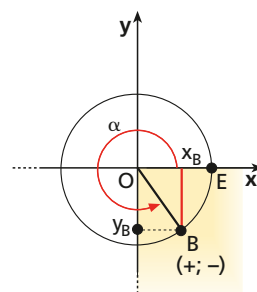
a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa x_B e la sua ordinata y_B sono positive. Man mano che B si avvicina al punto F , l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta. In F , $x_F = 0$, $y_F = 1$.



b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Mentre B si avvicina a G , sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono. In G , $x_G = -1$, $y_G = 0$.



c. Se B si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano che B si avvicina a H , l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce. In H , $x_H = 0$, $y_H = -1$.



d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a E , sia l'ascissa sia l'ordinata di B aumentano. In E , $x_E = 1$, $y_E = 0$.

Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra -1 e 1 , quindi:

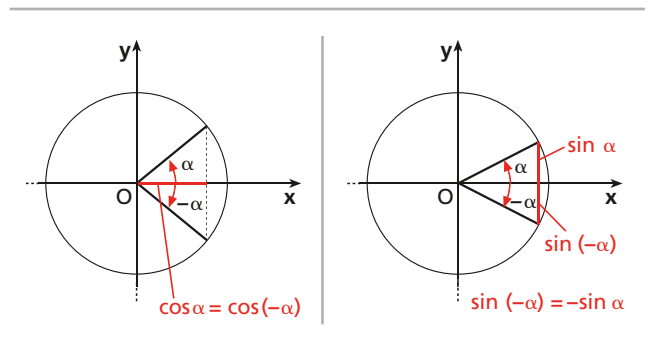
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

L'insieme immagine delle funzioni seno e coseno è quindi $[-1; 1]$.

Poiché $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$, allora il coseno è una funzione **pari**, mentre, essendo

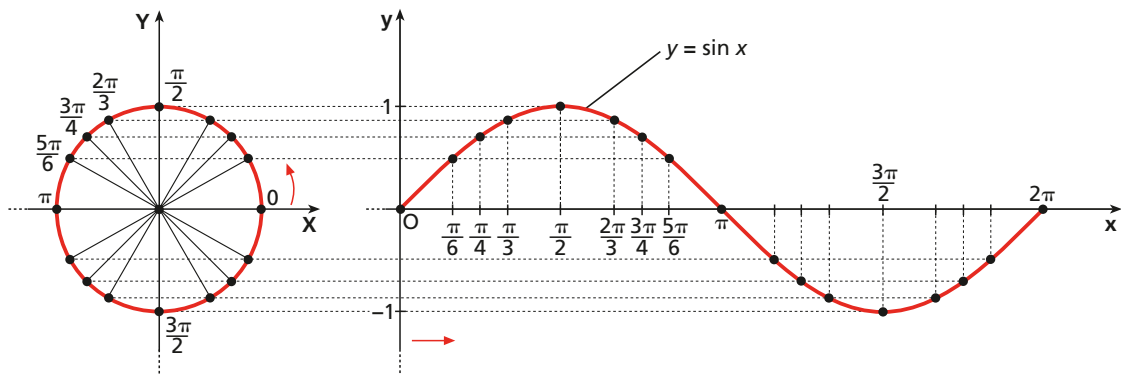
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

il seno è una funzione **dispari**.

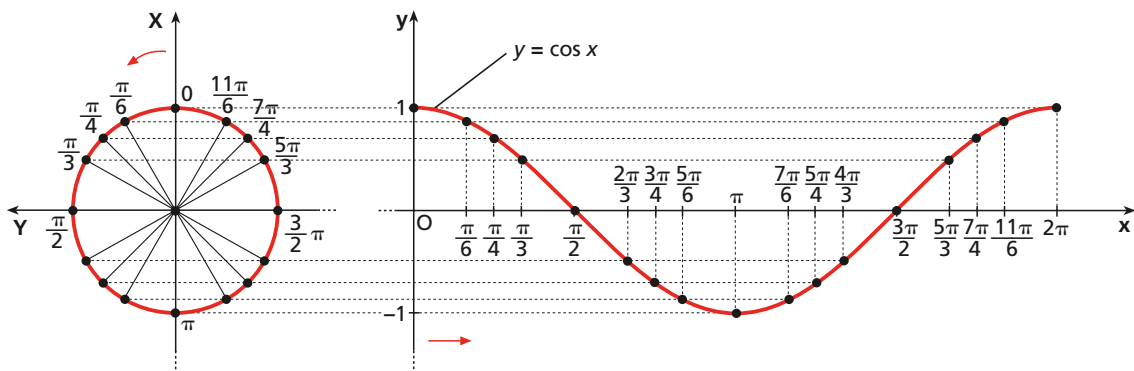


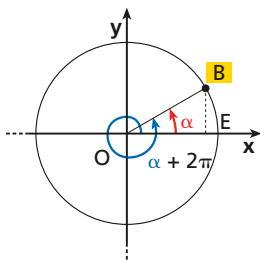
Grafici delle funzioni $y = \sin x$, $y = \cos x$

Per costruire il grafico della funzione $y = \sin x$ in $[0; 2\pi]$ riportiamo sull'asse x i valori degli angoli e, in corrispondenza, sull'asse y le ordinate dei punti B corrispondenti sulla circonferenza goniometrica.



Procediamo analogamente, per ottenere il grafico della funzione $y = \cos x$ in $[0; 2\pi]$. In questo caso, tuttavia, essendo il coseno l'ascissa del punto B , ruotiamo la circonferenza goniometrica di 90° . Riportiamo poi sulle ordinate di un piano cartesiano le ascisse dei punti B della circonferenza goniometrica in corrispondenza degli angoli.





Periodo delle funzioni seno e coseno

Dopo aver percorso un giro completo, il punto B può ripetere lo stesso movimento quante volte si vuole.

Le funzioni $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ assumono di nuovo gli stessi valori ottenuti al «primo giro», ossia:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 2 \cdot 2\pi) = \dots$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2 \cdot 2\pi) = \dots$$

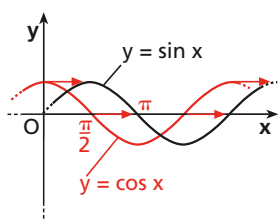
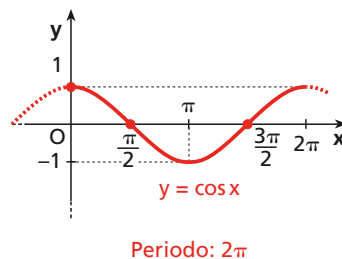
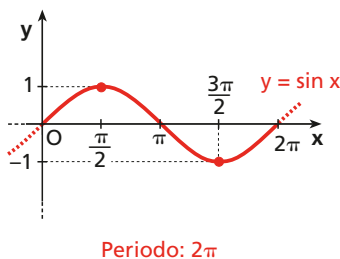
Sappiamo che, in generale, una funzione $y = f(x)$ è detta **periodica** di periodo p (con $p > 0$) se per ogni x e per qualsiasi numero k intero si ha $f(x) = f(x + kp)$.

Le funzioni seno e coseno sono quindi periodiche di periodo 2π e possiamo scrivere, in modo sintetico:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Sinusoide e cosinusoide

Il grafico completo della funzione seno si chiama **sinusoide**, quello della funzione coseno **cosinusoide**. Le funzioni sono periodiche di periodo 2π , quindi i grafici si ottengono ripetendo ogni 2π i grafici relativi all'intervallo $[0; 2\pi]$.



I grafici delle due funzioni sono sovrapponibili con una traslazione di vettore parallelo all'asse x e di modulo $\frac{\pi}{2}$.

In sintesi

$$y = \sin x$$

Dominio: \mathbb{R} .

Insieme immagine: $[-1; 1]$.

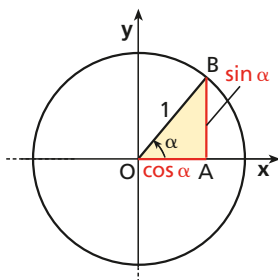
Funzione dispari: il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

$$y = \cos x$$

Dominio: \mathbb{R} .

Insieme immagine: $[-1; 1]$.

Funzione pari: il grafico è simmetrico rispetto all'asse y .



Prima relazione fondamentale

Poiché il punto $B(\cos \alpha; \sin \alpha)$ appartiene alla circonferenza goniometrica, le sue coordinate soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad \text{——— prima relazione fondamentale della goniometria}$$

La relazione esprime il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OAB .

Da questa relazione è possibile ricavare $\sin \alpha$ conoscendo $\cos \alpha$ e viceversa. Infatti, se è noto $\cos \alpha$, si ha $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Viceversa, se si conosce $\sin \alpha$, si ha $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

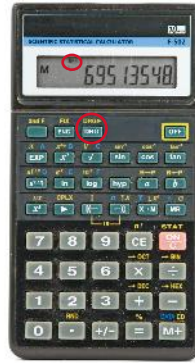
► Come utilizzare la calcolatrice scientifica

Utilizzare la calcolatrice scientifica per calcolare il seno, il coseno o la tangente di un angolo può portare a risultati errati se la calcolatrice non è stata impostata correttamente.

È importante scegliere con quale unità di misura si vuole inserire l'angolo.

Se vogliamo calcolare il seno, il coseno o la tangente di un angolo espresso in gradi sessadecimali, sullo schermo della calcolatrice deve essere presente la scritta **DEG**.

Se invece l'angolo è espresso in radianti, la calcolatrice deve essere impostata su **RAD**.



3 Funzione tangente

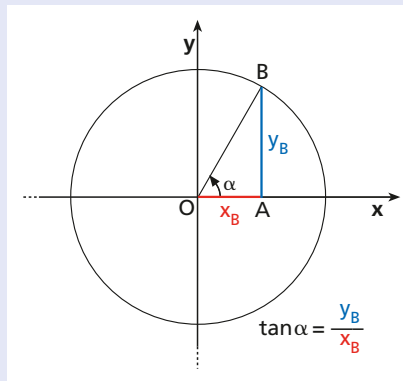
► Tangente di un angolo

→ Esercizi a p. 735

DEFINIZIONE

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica di centro O . Definiamo **tangente** di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa dal punto B :

$$\tan \alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$



Listen to it

For an oriented angle α and its associated point B on the unit circle, the **tangent** function is defined as

$$\tan \alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$

We exclude from the domain

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Il rapporto $\frac{y_B}{x_B}$ non esiste quando $x_B = 0$, ossia quando B si trova sull'asse y e l'angolo è uguale a $\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3}{2}\pi$ o a un altro valore che ottieni da $\frac{\pi}{2}$ aggiungendo multipli interi dell'angolo piatto. Quindi la tangente esiste solo se:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Consideriamo ancora la circonferenza goniometrica, un suo punto $B(x_B; y_B)$, la sua proiezione A sull'asse x e l'angolo orientato $\widehat{AOB} = \alpha$.

Anche in questo caso, come per il seno e il coseno, si può dimostrare che il rapporto $\frac{AB}{OA}$, e di conseguenza $\frac{y_B}{x_B}$, dipende solo dall'angolo α e non varia se cambiamo il raggio della circonferenza.

Infatti, considerata una seconda circonferenza di raggio OB' , i triangoli OAB e $OA'B'$ sono simili, quindi vale la proporzione

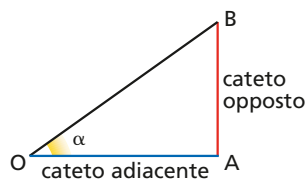
$$\overline{AB} : \overline{OA} = \overline{A'B'} : \overline{OA'}$$

ossia:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \tan \alpha.$$

Pertanto, il rapporto considerato non dipende dalla particolare circonferenza scelta, bensì solo dall'angolo.

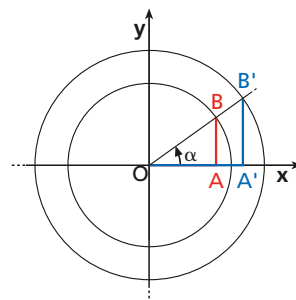
$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$



Anche $\tan \alpha$ è un numero puro, essendo un rapporto tra grandezze omogenee.

Consideriamo il triangolo rettangolo OAB . Possiamo pensare l'ipotenusa OB come raggio di una circonferenza di centro O .

Pertanto la tangente di α è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo α e il cateto adiacente.



Un altro modo di definire la tangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica, la retta tangente a essa nel punto E , origine degli archi, e un angolo α . Il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto T . La tangente di α può anche essere definita come il valore dell'ordinata di T : $\tan \alpha = y_T$.

Dimostriamo che le due definizioni date sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE

I triangoli rettangoli OAB e OET sono simili, quindi:

$$\overline{TE} : \overline{BA} = \overline{OE} : \overline{OA} \rightarrow y_T : y_B = 1 : x_B \rightarrow y_T = \frac{y_B}{x_B} \rightarrow \tan \alpha = \frac{y_B}{x_B} = y_T.$$

Vediamo con un esempio come è possibile misurare l'altezza di una costruzione molto alta utilizzando la funzione tangente.

ESEMPIO Con il metro e il goniometro

Hai a disposizione le misure indicate in figura.

► Qual è l'altezza della Statua della Libertà?

Schematizziamo il problema. Essendo

$$\overline{AD} = \overline{AB} + 4,$$

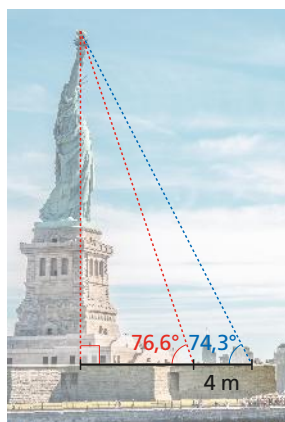
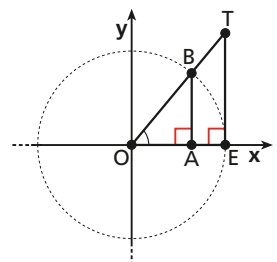
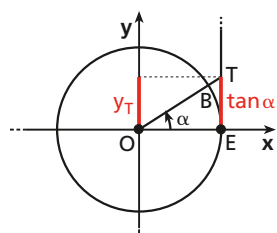
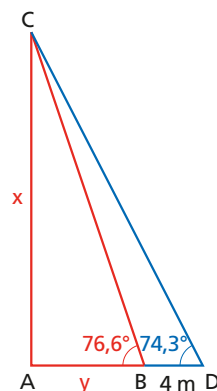
poniamo $\overline{AC} = x$ e $\overline{AB} = y$.

Nel triangolo ABC è

$$\frac{x}{y} = \tan 76,6^\circ \simeq 4,20,$$

con la calcolatrice

mentre nel triangolo ADC è: $\frac{x}{y+4} = \tan 74,3^\circ \simeq 3,56.$



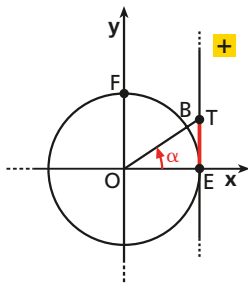
Impostiamo e risolviamo il sistema.

$$\begin{cases} x = 4,20y \\ x = 3,56(y + 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4,20y \\ 4,20y = 3,56(y + 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 93,45 \\ y = 22,25 \end{cases}$$

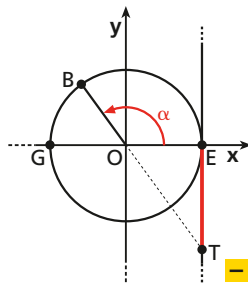
La Statua della Libertà è alta circa 93 m.

Variazioni della funzione tangente

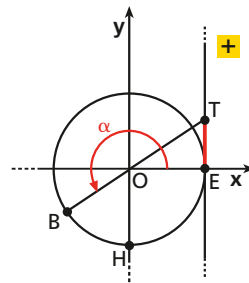
Studiamo come varia y_T al variare dell'angolo α .



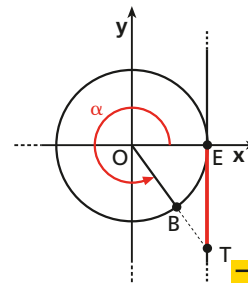
a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, l'ordinata di T è positiva e aumenta man mano che B si avvicina al punto F . Quando $B \equiv F$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e la tangente non esiste.



b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, l'ordinata T è negativa e aumenta fino a quando $B \equiv G$, in cui $y_T = 0$.



c. Se B si trova nel terzo quadrante, l'ordinata di T è di nuovo positiva e aumenta fino a quando $B \equiv H$ e T non esiste più. La tangente di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste.



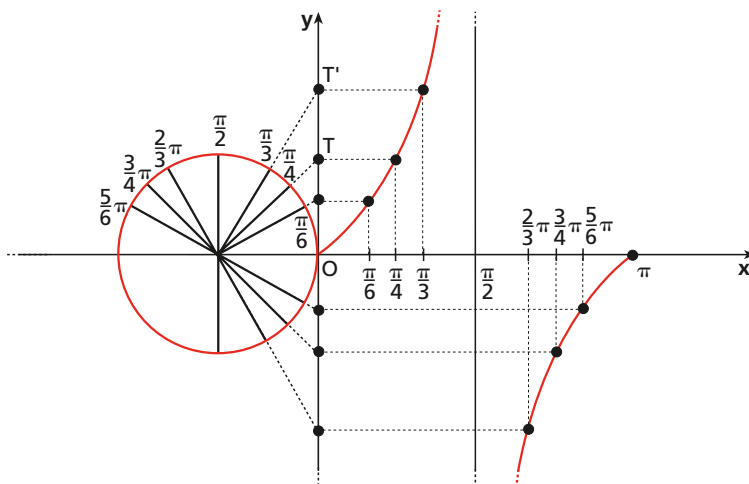
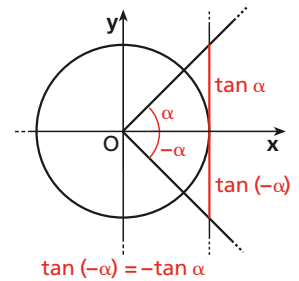
d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, l'ordinata di T ritorna negativa e aumenta fino allo 0.

A differenza delle funzioni seno e coseno, la funzione tangente può assumere qualunque valore reale. Il suo insieme immagine è quindi \mathbb{R} , mentre, come abbiamo visto, il suo dominio è: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Essendo $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$, la tangente è una funzione dispari.

Grafico della funzione $y = \tan x$

Tracciamo il grafico della funzione $y = \tan x$ nell'intervallo $[0; \pi]$, riportando sull'asse x i valori degli angoli e sull'asse y le ordinate dei punti corrispondenti sulla retta tangente.



Animazione
nell'eBook

L'animazione studia i due modi di definire la tangente e, con una figura dinamica, ti permette di vedere il suo grafico al variare dell'angolo fra 0 e 2π .

Notiamo come, man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$:

- «da sinistra», cioè assumendo valori minori di $\frac{\pi}{2}$, i valori della funzione crescono sempre di più; diremo che $\tan x \rightarrow +\infty$ per x che tende a $\frac{\pi}{2}^-$ e scriveremo $\tan x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$;
- «da destra», cioè assumendo valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, i valori della funzione decrescono sempre di più, ovvero $\tan x \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$.

Il grafico della tangente, per valori di x che si approssimano a $\frac{\pi}{2}$, si avvicina sempre più alla retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$, detta **asintoto verticale** del grafico.

Periodo della funzione tangente

La tangente è una funzione periodica di periodo π , cioè, qualunque sia l'angolo α del dominio, è:

$$\tan \alpha = \tan(\alpha + k\pi), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Questo si può vedere usando la definizione di tangente (figura a sinistra).

Il grafico completo della tangente si chiama **tangente**. Ha infiniti asintoti verticali: le rette di equazioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

In sintesi

La funzione $y = \tan x$ ha per dominio $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ e insieme immagine \mathbb{R} , ossia:

$$\tan x: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ha infiniti asintoti verticali di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

È una funzione dispari, quindi è simmetrica rispetto all'origine.

Seconda relazione fondamentale

Consideriamo la circonferenza goniometrica. Per definizione:

$$\tan \alpha = \frac{y_B}{x_B}, \quad y_B = \sin \alpha \quad \text{e} \quad x_B = \cos \alpha.$$

Sostituiamo $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ nell'espressione della tangente e otteniamo che la tangente di un angolo sia data dal rapporto, quando esiste, fra il seno e il coseno dello stesso angolo.

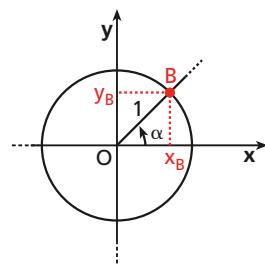
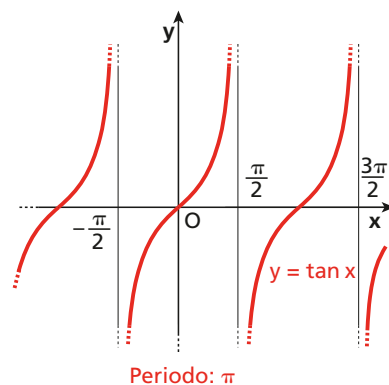
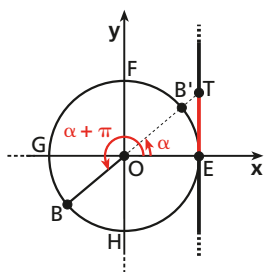
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{— seconda relazione fondamentale}$$

Significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta

→ Esercizi a p. 738

Tracciamo la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y = mx$, da cui:

$$m = \frac{y}{x}.$$

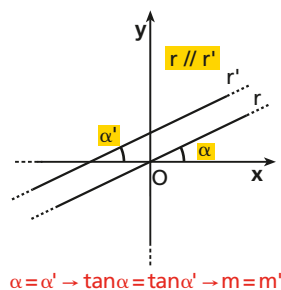
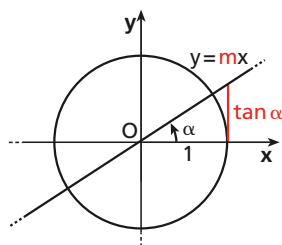


In particolare, se $x = 1, y = \tan \alpha$ e

$$m = \frac{\tan \alpha}{1} = \tan \alpha.$$

Il coefficiente angolare della retta $y = mx$ è uguale alla tangente dell'angolo fra la retta e l'asse x .

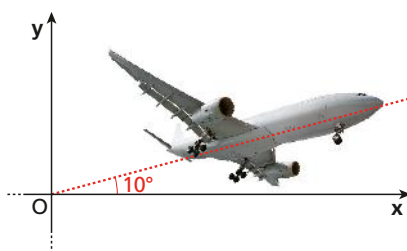
Dalla geometria analitica sappiamo che due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare e che esse formano angoli congruenti con l'asse x . Ciò permette di estendere il risultato ottenuto anche a rette che non passano per l'origine (figura sopra a destra).



ESEMPIO Nel decollo

Un aereo in fase di decollo forma un angolo di 10° con il suolo.

- Qual è l'equazione della semiretta che approssima la traiettoria dell'aereo in fase di decollo?



Immaginiamo che il piano cartesiano sia disposto come in figura.

La semiretta che descrive il decollo passa per l'origine, quindi ha equazione del tipo $y = mx, \text{ con } x \geq 0$.

$m = \tan 10^\circ \simeq 0,18$, perciò la semiretta cercata è $y = 0,18x, \text{ con } x \geq 0$.

4 Funzioni secante e cosecante

→ Esercizi a p. 739

DEFINIZIONE

Dato un angolo α , chiamiamo:

- **secante** di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\cos \alpha$, purché $\cos \alpha$ sia diverso da 0. Si indica con $\sec \alpha$:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- **cosecante** di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\sin \alpha$, purché $\sin \alpha$ sia diverso da 0. Si indica con $\csc \alpha$:

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Secante e cosecante, come seno e coseno, sono funzioni periodiche di periodo 2π .

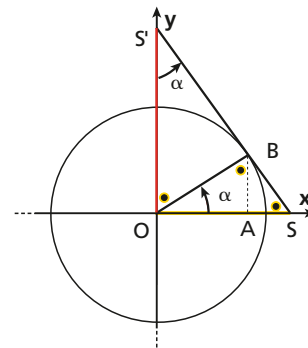
Un altro modo di definire la secante e la cosecante

Consideriamo la circonferenza goniometrica, l'angolo α e la tangente in B che interseca gli assi x e y rispettivamente in S e S' .

I triangoli OBA e OBS sono simili, quindi:

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS} \rightarrow \cos \alpha : 1 = 1 : \overline{OS},$$

da cui: $\overline{OS} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha.$



Analogamente, essendo simili i triangoli OAB e OBS' :

$$\overline{BA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS'} \rightarrow \sin \alpha : 1 = 1 : \overline{OS'}$$

da cui: $\overline{OS'} = \frac{1}{\sin \alpha} = \csc \alpha$.

La secante di α è quindi l'ascissa del punto S , intersezione della retta tangente nel punto B , associato ad α sulla circonferenza goniometrica, con l'asse x .

Analogamente, la cosecante di α è l'ordinata del punto S' , intersezione della retta tangente in B con l'asse y .

● Grafico del reciproco di una funzione

Dal grafico di una funzione $y = f(x)$ è possibile ricavare l'andamento del grafico della funzione reciproca:

$$y = g(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{definita per } f(x) \neq 0.$$

1. Se il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x in x_0 , ossia se $f(x_0) = 0$, per valori di x che tendono a x_0 , il valore del reciproco è:

- positivo e con valori sempre più grandi, man mano che ci si avvicina a x_0 , se $f(x) > 0$; diremo che $g(x)$ tende a $+\infty$;
- negativo e con valori sempre più grandi in valore assoluto, se $f(x) < 0$; diremo che $g(x)$ tende a $-\infty$.

Avvicinandosi al punto x_0 il grafico della funzione $g(x)$ si avvicina a quello della retta $x = x_0$, che viene detta **asintoto verticale** del grafico di $g(x)$.

2. Quando $f(x)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, il suo reciproco $g(x)$ si avvicina sempre più a 0, cioè $g(x)$ tende a 0.

3. Se $f(a) = 1$, è vero anche che $g(a) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{1} = 1$.

a è allora ascissa di un punto di intersezione dei grafici di $f(x)$ e di $\frac{1}{f(x)}$.

Analogamente, se $f(b) = -1$, abbiamo $g(b) = \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{-1} = -1$, cioè b è ascissa di un punto di intersezione.

► ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

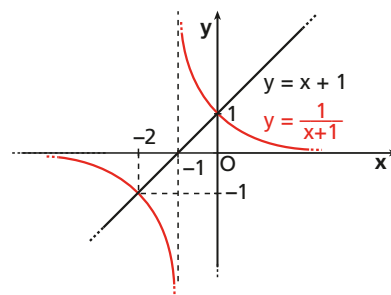
$$f(x) = x + 1.$$

- $f(x) = 0$ se $x = -1$. Il suo reciproco $g(x) = \frac{1}{x+1}$ tende a $+\infty$ quando x tende a -1^+ , poiché $f(x) > 0$ e $g(x)$ assume valori sempre più grandi.

Analogamente, $g(x)$ tende a $-\infty$

per x che tende a -1^- , dove $f(x) < 0$. La retta $x = -1$ è asintoto verticale per $g(x)$.

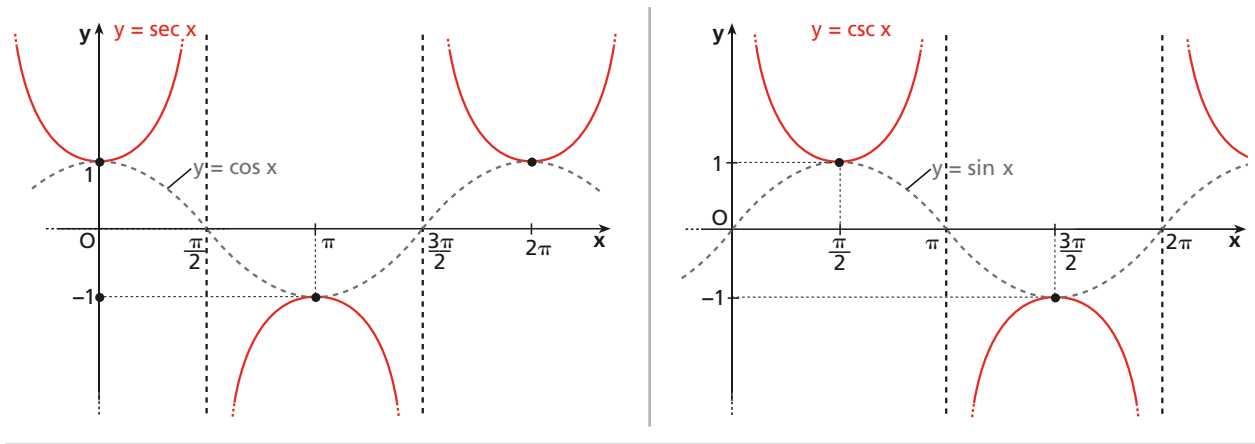
- $f(x)$ tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$, cioè quando x cresce; tende a $-\infty$ quando x tende a $-\infty$. Allora $g(x)$ tende a 0^+ quando x tende a $+\infty$, mentre tende a 0^- quando x tende a $-\infty$.



- $f(a) = 1$ se $a = 0$, $f(b) = -1$ se $b = -2$. Allora anche $g(0) = 1$ e $g(-2) = -1$.
- Le informazioni raccolte permettono di tracciare il grafico probabile di $g(x)$.

Grafici della secante e della cosecante

Possiamo utilizzare il metodo appena visto per disegnare i grafici della secante e della cosecante.



Il grafico di una funzione si ottiene da quello dell'altra con una traslazione di vettore parallelo all'asse x e modulo $\frac{\pi}{2}$.

I domini delle due funzioni, deducibili dalla loro definizione, sono:

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ per la secante; } \mathbb{R} - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ per la cosecante.}$$

Dalla figura si deduce che l'insieme immagine, sia della funzione secante, sia della funzione cosecante, è $\mathbb{R} -]-1; 1[$.

Sono asintoti verticali le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per il grafico della secante, $x = 0 + k\pi$ per il grafico della cosecante.

Come il coseno, la secante è una funzione pari; la cosecante è dispari, come il seno.



Animazione
nell'eBook

L'animazione studia i due modi di definire la secante e la cosecante e fornisce figure dinamiche per osservare i loro grafici al variare dell'angolo fra 0 e 2π .

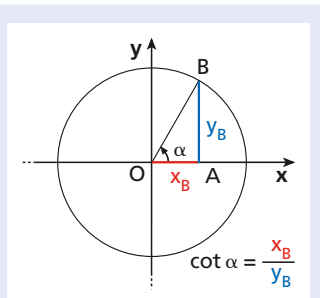
5 Funzione cotangente

→ Esercizi a p. 741

DEFINIZIONE

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica. Definiamo **cotangente** di α la funzione che associa ad α il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto B :

$$\cot \alpha = \frac{x_B}{y_B}$$



Il rapporto $\frac{x_B}{y_B}$ non esiste quando $y_B = 0$, ossia quando il punto B si trova sull'asse x , cioè quando l'angolo misura $0, \pi$ e tutti i multipli interi di π .
 $\cot \alpha$ esiste solo se $\alpha \neq k\pi$.

Dalla definizione di cotangente deriva che: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, con $\alpha \neq k\pi$.

Poiché $\tan \alpha = \frac{y_B}{x_B}$ e $\cot \alpha = \frac{x_B}{y_B}$, risulta $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, da cui:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq k \frac{\pi}{2}.$$

La condizione posta deriva dal fatto che consideriamo $\frac{1}{\tan \alpha}$, quindi la cotangente non è definita sia per gli angoli in cui non esiste $\tan \alpha$, cioè $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sia per quelli in cui $\tan \alpha = 0$, cioè $\alpha = 0 + k\pi$, perciò: $\alpha \neq k \frac{\pi}{2}$.

Un altro modo di definire la cotangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente a essa nel punto F . Il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto Q . La cotangente di α può anche essere definita come il valore dell'ascissa di Q :

$$\cot \alpha = x_Q.$$

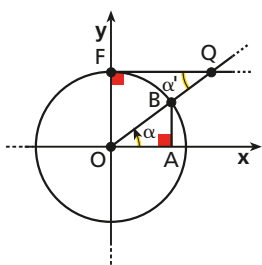
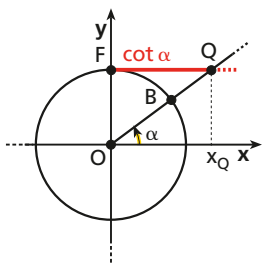
Dimostriamo che le due definizioni date sono equivalenti.

► DIMOSTRAZIONE

Consideriamo i due triangoli rettangoli OAB e OFQ . Essi sono simili, essendo $FQ \parallel OA$ e quindi $\alpha \cong \alpha'$, perché alterni interni di rette parallele tagliate da una trasversale. Scriviamo la proporzione fra le misure dei cateti corrispondenti,

$$\overline{FQ} : \overline{OA} = \overline{FO} : \overline{BA}, \quad \rightarrow \quad x_Q : x_B = 1 : y_B \quad \rightarrow \quad x_Q = \frac{x_B}{y_B}.$$

Pertanto: $\cot \alpha = \frac{x_B}{y_B} = x_Q.$



Animazione nell'eBook

Nell'animazione ci sono le due definizioni e una figura dinamica per osservare il grafico della cotangente fra 0 e 2π .

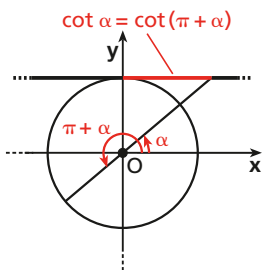


Grafico della funzione $y = \cot x$

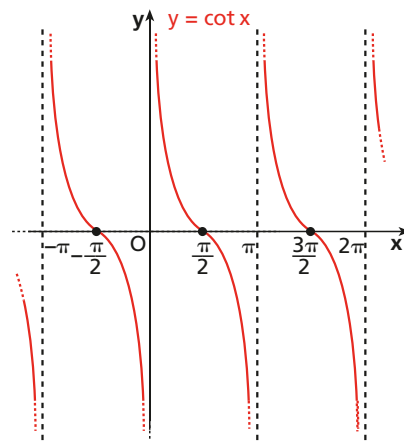
Come la tangente, anche la funzione cotangente può assumere qualunque valore reale. L'insieme immagine della cotangente è quindi \mathbb{R} , mentre il suo dominio è: $x \neq k \cdot \pi$.

Le rette di equazione $x = k\pi$ sono asintoti verticali del suo grafico.

Periodo della funzione cotangente

In analogia con la tangente, la funzione cotangente risulta periodica di periodo π :

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$



6 Funzioni goniometriche di angoli particolari

→ Esercizi a p. 744

Mediante le proprietà delle figure geometriche riusciamo a calcolare il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari.

L'angolo $\frac{\pi}{6}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB , rettangolo in A , con $\alpha = \widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$ e $\overline{OB} = 1$.

Poiché in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari $\widehat{OBA} = \frac{\pi}{3}$. Prolungando il lato BA , otteniamo sulla circonferenza il punto C .

Il triangolo OBC è equilatero, poiché ha gli angoli di $\frac{\pi}{3}$, quindi $\overline{BC} = 1$.

AB è la metà di BC , ossia $\overline{AB} = \frac{1}{2}$.

Ricaviamo \overline{OA} applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB :

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{6}$:

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Pertanto: $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

L'angolo $\frac{\pi}{4}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB , rettangolo in A , con $\alpha = \widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$ e $\overline{OB} = 1$. Anche $\widehat{OBA} = \frac{\pi}{4}$ e il triangolo OAB è isoscele.

Con il teorema di Pitagora otteniamo

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

e quindi: $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

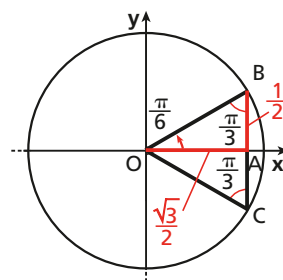
Calcolando i rapporti che definiscono le due funzioni, otteniamo:

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ e } \cot \frac{\pi}{4} = 1.$$



Animazione
nell'eBook

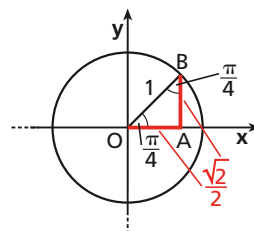
Nell'animazione puoi seguire passo passo il modo con cui si ricavano seno e coseno di $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

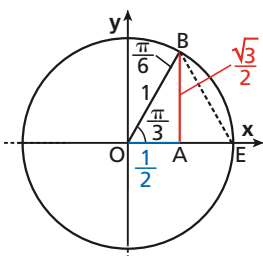


► Verifica con il calcolo che:

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3};$$

$$\csc \frac{\pi}{6} = 2.$$





L'angolo $\frac{\pi}{3}$

Nella circonferenza goniometrica consideriamo il triangolo OAB , rettangolo in A , con $\alpha = \widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ e, di conseguenza, $\widehat{OBA} = \frac{\pi}{6}$.

Congiungendo B con E , otteniamo il triangolo equilatero OEB .

BA è altezza e mediana del triangolo OEB , quindi $\overline{OA} = \frac{1}{2}$.

Ricaviamo \overline{AB} applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB :

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ e } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calcolando i rapporti fra seno e coseno, otteniamo:

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ e } \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

T

TEORIA

► Verifica con il calcolo che:

$$\sec \frac{\pi}{3} = 2;$$

$$\csc \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

7 Angoli associati

Consideriamo un angolo α . Chiamiamo **angoli associati** (o **archi associati**) ad α i seguenti angoli:

$$-\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha, \frac{3}{2}\pi - \alpha, \frac{3}{2}\pi + \alpha, 2\pi - \alpha.$$

Funzioni goniometriche di angoli associati

→ Esercizi a p. 745

Determiniamo seno, coseno, tangente e cotangente degli angoli associati ad α , in funzione di seno, coseno, tangente e cotangente dell'angolo α .

- I due angoli α e $-\alpha$ sono congruenti e orientati in verso opposto, ossia sono **angoli opposti**:

$$\sin(-\alpha) = y_{B'} = -y_B = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = x_{B'} = x_B = \cos \alpha.$$

Pertanto:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

- α e $2\pi - \alpha$ sono **angoli esplementari**, ossia la loro somma è un angolo giro. Per essi valgono considerazioni analoghe a quelle precedenti, quindi:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha, \quad \tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha,$$

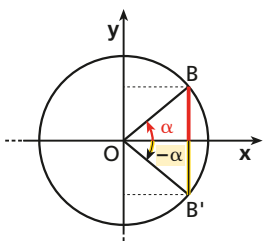
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$$



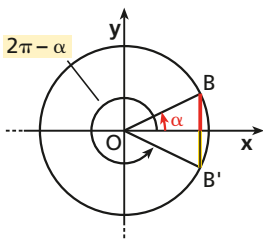
Video

Le formule degli angoli associati

- Quali sono le formule degli angoli associati?
- Come ricavarle senza doverle imparare a memoria?



α e $-\alpha$



α e $2\pi - \alpha$

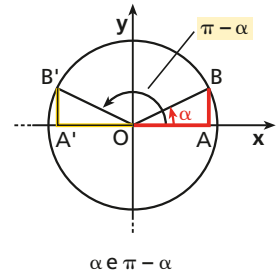
- α e $\pi - \alpha$ sono **angoli supplementari**.

I triangoli rettangoli OAB e $OA'B'$ sono congruenti perché hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto α :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= y_{B'} = y_B = \sin \alpha, \\ \cos(\pi - \alpha) &= x_{B'} = -x_B = -\cos \alpha.\end{aligned}$$

Pertanto:

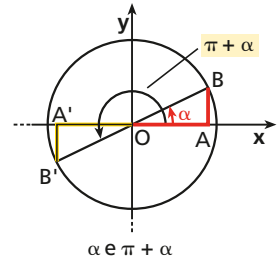
$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, & \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha, \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha, & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha.\end{aligned}$$



α e $\pi - \alpha$

- α e $\pi + \alpha$ sono **angoli che differiscono di un angolo piatto**. Con considerazioni analoghe a quelle del caso precedente otteniamo:

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, & \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha, \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, & \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha.\end{aligned}$$



α e $\pi + \alpha$

- α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sono **angoli complementari**.

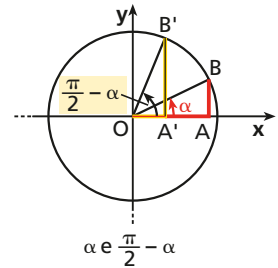
Nel triangolo rettangolo $OA'B'$ risulta $\widehat{A'OB'} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\widehat{OB'A'} = \alpha$, perché complementare del precedente.

I triangoli OAB e $OA'B'$ sono congruenti perché hanno congruente l'ipotenusa e l'angolo acuto α , pertanto $OA \cong A'B'$ e $AB \cong OA'$:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= y_{B'} = x_B = \cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= x_{B'} = y_B = \sin \alpha.\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha, & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$

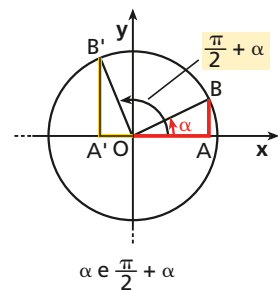


α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$

- α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sono **angoli che differiscono di un angolo retto**.

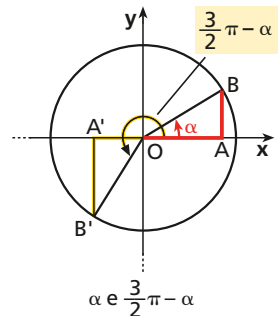
Nel triangolo rettangolo $OA'B'$ risulta $\widehat{A'OB'} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\widehat{A'B'O} = \alpha$. Quindi, in analogia con il caso precedente, tenuto conto che $A'B'O$ è nel secondo quadrante, otteniamo:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha, & \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha, & \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$



α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$

- Se consideriamo α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$, $\widehat{A'OB'} = \frac{3}{2}\pi - \alpha - \pi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\widehat{A'B'O} = \alpha$, quindi i triangoli AOB e $A'OB'$ sono congruenti. Per **angoli la cui somma è $\frac{3}{2}\pi$** otteniamo dunque:



α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$

Restrizione del dominio

Se restringiamo il dominio della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, la funzione $y = \sin x$ risulta biunivoca e dunque invertibile.

La funzione inversa del seno si chiama *arcoseno*.

DEFINIZIONE

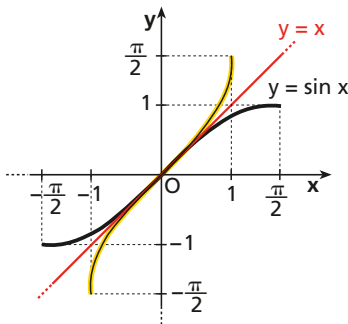
Dati i numeri reali x e y , con $-1 \leq x \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'**arcoseno** di x se x è il seno di y .

Scriviamo: $y = \arcsin x$, oppure $y = \sin^{-1}x$.

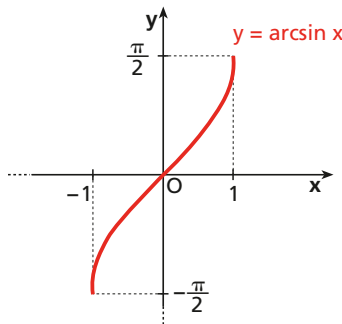
ESEMPIO

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Per ottenere il grafico della funzione $y = \arcsin x$, basta costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del grafico della funzione $y = \sin x$, considerata nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



a. Grafico di $y = \sin x$ in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



b. Grafico di $y = \arcsin x$.

Funzione inversa di $y = \cos x$

Se consideriamo $[0; \pi]$ come dominio, la funzione coseno è biunivoca e quindi invertibile. La funzione inversa del coseno si chiama *arcocoseno*.

DEFINIZIONE

Dati i numeri reali x e y , con $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \pi$, diciamo che y è l'**arcocoseno** di x se x è il coseno di y .

Scriviamo: $y = \arccos x$, oppure $y = \cos^{-1}x$.

ESEMPIO

$$\arccos(-1) = \pi \leftrightarrow \cos \pi = -1; \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$y = \arcsin x \quad D = [-1; 1]$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \sin y \quad \text{Im} = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

► Qual è l'arcoseno di $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

$$y = \arccos x \quad D = [-1; 1]$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \cos y \quad \text{Im} = [0; \pi]$$

► Qual è l'arcocoseno di $-\frac{1}{2}$?



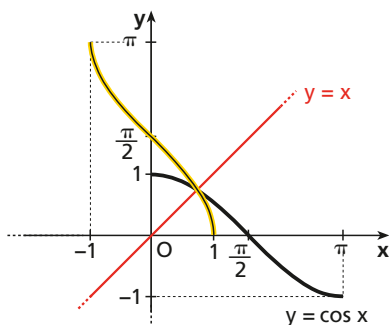


Nell'animazione vediamo, in pochi passi, come disegnare i grafici di:

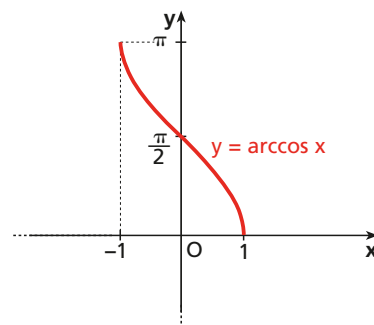
- $y = \arcsin x$;
- $y = \arccos x$;
- $y = \arctan x$;
- $y = \operatorname{arccot} x$.

TEORIA

La figura illustra il grafico della funzione arcocoseno.



a. Grafico di $y = \cos x$ in $[0; \pi]$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



b. Grafico di $y = \arccos x$.

Funzione inversa di $y = \tan x$

Se consideriamo $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ come dominio, la funzione tangente è biunivoca e di conseguenza invertibile.

La funzione inversa della tangente si chiama *arcotangente*.

DEFINIZIONE

Dati i numeri reali x e y , con $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'**arco-tangente** di x se x è la tangente di y .

Scriviamo: $y = \arctan x$, oppure $y = \tan^{-1}x$.

$$y = \arctan x \quad D = \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow \quad \operatorname{Im} = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

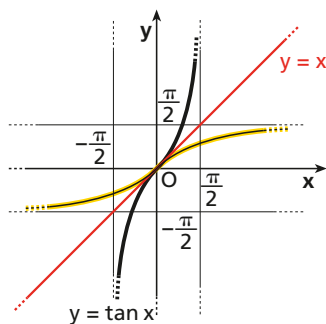
$$x = \tan y$$

► Qual è l'arcotangente di $-\frac{\sqrt{3}}{3}$?

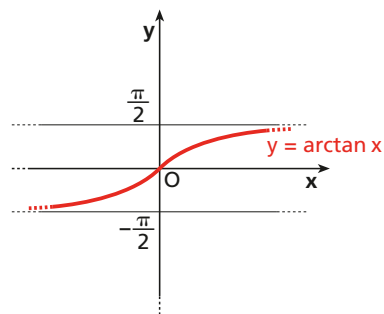
ESEMPIO

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1; \quad \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Studiamo il grafico della funzione arcotangente.



a. Grafico di $y = \tan x$ in $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



b. Grafico di $y = \arctan x$.

Funzione inversa di $y = \cot x$

DEFINIZIONE

Dati i numeri reali x e y , con $x \in \mathbb{R}$ e $0 < y < \pi$, diciamo che y è l'**arcocotangente** di x se x è la cotangente di y .

Scriviamo: $y = \text{arccot } x$, oppure $y = \cot^{-1}x$.

$$y = \text{arccot } x \quad D = \mathbb{R}$$

$$\updownarrow$$

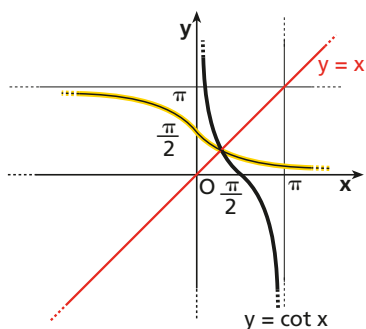
$$x = \cot y \quad \text{Im} =]0; \pi[$$

ESEMPIO

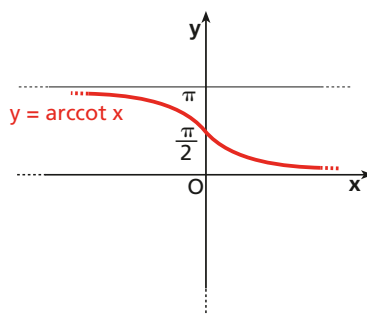
$$\text{arccot } 0 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \cot \frac{\pi}{2} = 0; \quad \text{arccot } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

► Qual è l'arcocotangente di $\sqrt{3}$?

Disegniamo il grafico della funzione arcocotangente.



a. Grafico di $y = \cot x$ in $]0; \pi[$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



b. Grafico di $y = \text{arccot } x$.

9 Funzioni goniometriche e trasformazioni geometriche

→ Esercizi a p. 757

Dai grafici delle funzioni goniometriche si ottengono grafici di altre funzioni mediante traslazioni, simmetrie, dilatazioni e contrazioni. Ne proponiamo alcuni negli esercizi, mentre qui ci occupiamo soltanto delle *funzioni sinusoidali*.

Funzioni sinusoidali

La funzione $y = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$, raccogliendo 2 all'interno della parentesi, si può riscrivere

$$y = 3 \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right],$$

quindi è possibile ottenere il suo grafico a partire da quello di $y = \sin x$ con le seguenti trasformazioni geometriche:

- contrazione orizzontale $y = f\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = \frac{1}{2}$;
- traslazione di vettore $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$;



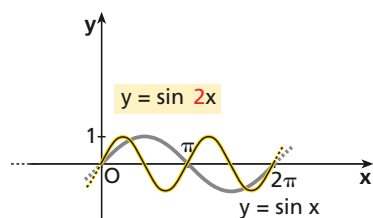
Animazione
nell'eBook

Studiamo in modo dinamico il grafico di

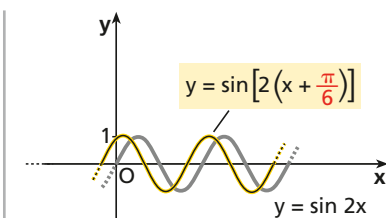
$$y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

al variare di A , ω , φ .

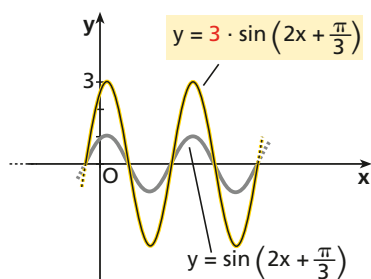
- dilatazione verticale $y = nf(x)$, con $n = 3$.



a. Grafico di $y = \sin 2x$.



b. Grafico di $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$.



c. Grafico di $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.



Video

Funzione sinusoidale

Studiamo insieme l'equazione di una funzione sinusoidale.

- Cosa rappresentano i parametri?
- Cosa sono il periodo, l'ampiezza e la fase di una funzione sinusoidale?

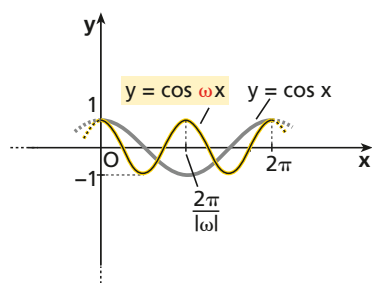
Una funzione di questo tipo è detta **sinusoidale** e viene applicata molto spesso nello studio di fenomeni fisici.

In generale, sono dette funzioni sinusoidali le funzioni del tipo:

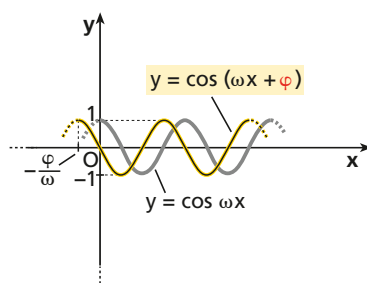
$$y = A \sin(\omega x + \varphi), \quad y = A \cos(\omega x + \varphi),$$

con $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ e A e ω diversi da 0.

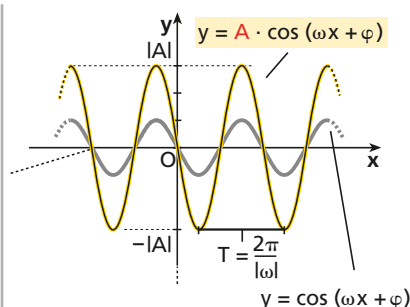
Studiamo il grafico di $y = A \cos(\omega x + \varphi)$.



a. Il cambiamento di ω modifica il periodo della funzione e genera una dilatazione e contrazione orizzontale.



b. Il cambiamento di φ produce una traslazione orizzontale.



c. Il cambiamento di $|A|$ genera una dilatazione o contrazione verticale.



Animazione nell'eBook

Studiamo in modo dinamico il grafico di

$$y = A \cos(\omega x + \varphi)$$

al variare di A, ω, φ .

L'insieme immagine di una funzione sinusoidale è $[-|A|; |A|]$.

Il numero $|A|$ è detto **ampiezza** della funzione sinusoidale, il numero ω **pulsazione** e φ **sfasamento** o **fase iniziale**.

$$\text{Il periodo } T \text{ è: } T = \frac{2\pi}{|\omega|}.$$

Infatti, la funzione seno è periodica di periodo 2π , quindi possiamo scrivere:

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin(\omega x + \varphi + 2k\pi) = A \sin[(\omega x + 2k\pi) + \varphi] =$$

$$A \sin\left[\omega\left(x + k \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right],$$

da cui deduciamo che il periodo è $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

Allo stesso modo si ottiene che il periodo di $y = \tan \omega x$ è $\frac{\pi}{|\omega|}$.

Periodo delle funzioni goniometriche

Nella tabella riassumiamo i periodi delle principali funzioni goniometriche che abbiamo studiato.

Funzione	Periodo
$\sin x, \cos x$	2π
$\sin(kx + \alpha), \cos(kx + \alpha)$	$\frac{2\pi}{ k }$
$\tan x, \cot x$	π
$\tan(kx + \alpha), \cot(kx + \alpha)$	$\frac{\pi}{ k }$

MATEMATICA E MUSICA



Qual è il legame tra le funzioni sinusoidali e la musica?

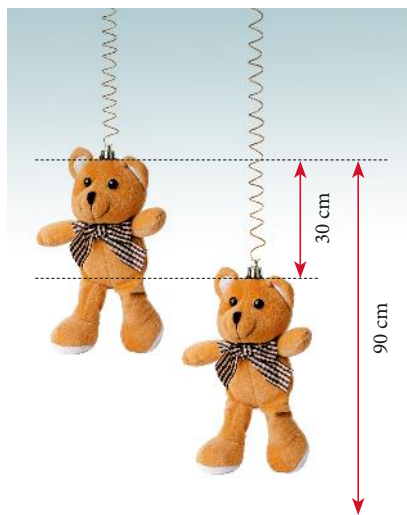
Cerca nel Web:

diapason, moto armonico, frequenza, timbro, altezza



ESEMPIO Pupazzetti salterini

Roberto gioca con un pupazetto a molla facendolo oscillare verticalmente, partendo da una posizione di equilibrio a un'altezza di 90 cm dal pavimento. Sappiamo che per effettuare un'oscillazione completa, di ampiezza 30 cm, e ritornare nella posizione iniziale impiega 3 secondi. La funzione che descrive l'altezza dal suolo del giocattolo al tempo t è del tipo $h(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + B$.

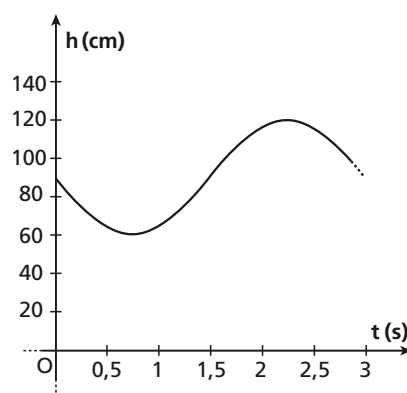


Quali sono i valori dei parametri che corrispondono alla situazione descritta?

Al tempo $t = 0$ la testa del pupazetto si trova a 90 cm da terra e per la stessa posizione passerà dopo 1,5 s (dato che per fare un'oscillazione completa impiega 3 s).

Nella posizione più bassa, a 60 cm dal suolo, passerà dopo $\frac{3}{4} = 0,75$ s e in quella più alta, a 120 cm, dopo $3 \cdot \frac{3}{4} = 2,25$ s.

Si tratta di una funzione sinusoidale del tipo $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 3$ s e ampiezza $A = 30$ cm,



traslata verso l'alto di 90 cm. Quindi $h(t) = 90 + 30 \sin\left(\frac{2\pi t}{3} + \varphi\right)$.

Per determinare la fase iniziale φ bisogna considerare che il giocattolo viene inizialmente tirato verso il basso, quindi

$$\varphi = \pi \text{ e } \sin\left(\frac{2\pi t}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{2\pi t}{3} \rightarrow h(t) = 90 - 30 \sin\frac{2\pi t}{3}.$$

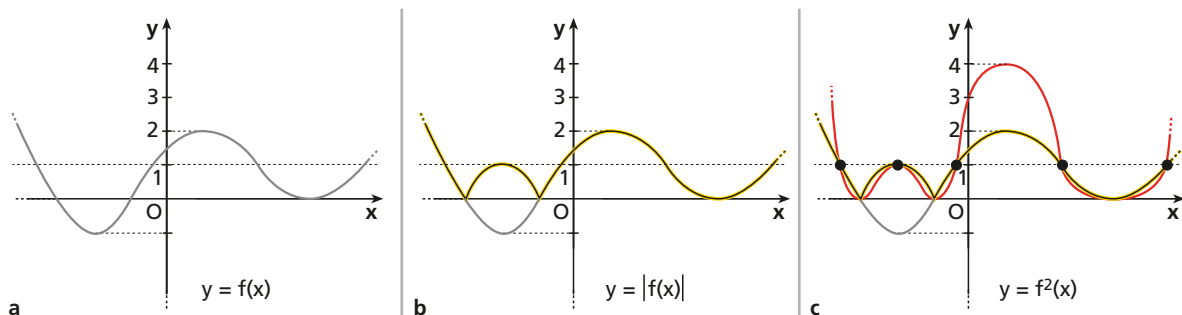
Il grafico di $y = f^2(x)$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, cerchiamo di ricavare da esso l'andamento di quello di $y = f^2(x)$.

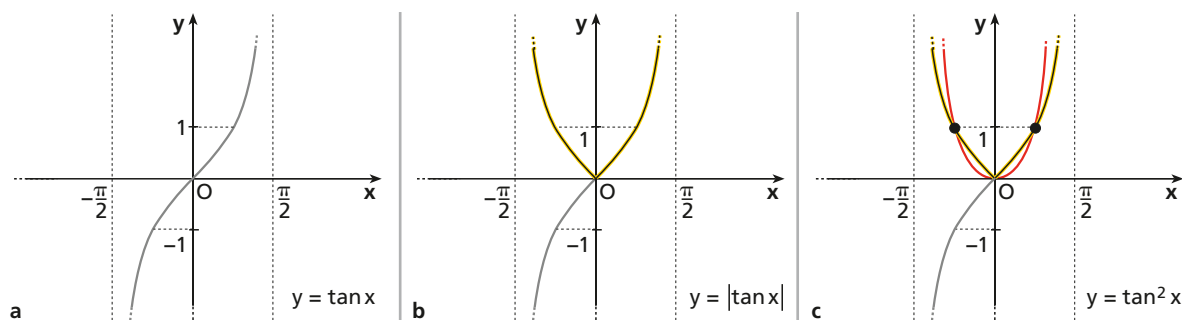
Tenendo conto che elevando al quadrato un numero, sia positivo sia negativo, si ottiene un numero positivo che non dipende dal segno del numero iniziale ma soltanto dal suo valore assoluto, disegniamo il grafico di $y = |f(x)|$ e teniamo conto delle seguenti proprietà:

1. se $|f(x)| = 1 \rightarrow f^2(x) = 1$;
2. se $f(x) = 0 \rightarrow f^2(x) = 0$;
3. se $|f(x)| < 1 \rightarrow f^2(x) < |f(x)|$;
4. se $|f(x)| > 1 \rightarrow f^2(x) > |f(x)|$.

Esaminiamo un esempio.



Ricaviamo anche l'andamento del grafico di $y = \tan^2 x$ in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.



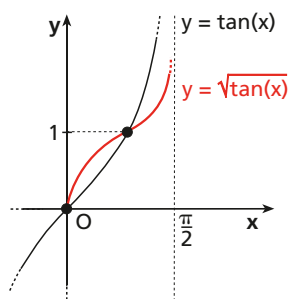
Il grafico di $y = \sqrt{f(x)}$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, ricaviamo l'andamento di quello di $y = \sqrt{f(x)}$.

Sfruttiamo queste informazioni:

1. se $f(x) < 0$, $\sqrt{f(x)}$ non esiste;
2. se $f(x) = 0$, $\sqrt{f(x)} = 0$;
3. se $f(x) = 1$, $\sqrt{f(x)} = 1$;
4. se $0 < f(x) < 1$, $f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;
5. se $f(x) > 1$, $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.

A fianco, come esempio, riportiamo il grafico di $y = \sqrt{\tan x}$ in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.



IN SINTESI

Funzioni goniometriche

Misura degli angoli

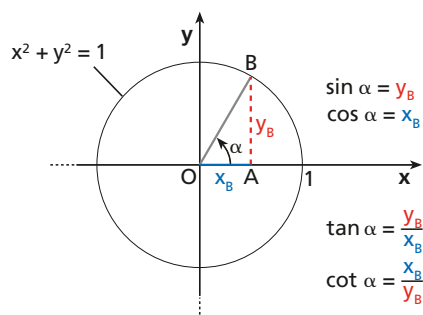
Un angolo può essere misurato in **gradi** oppure in **radiani**.

- Passaggio da gradi a radianti: si moltiplica la misura espressa in gradi per $\frac{\pi}{180^\circ}$.
- Passaggio da radianti a gradi: si moltiplica la misura in radianti per $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Funzioni goniometriche

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:

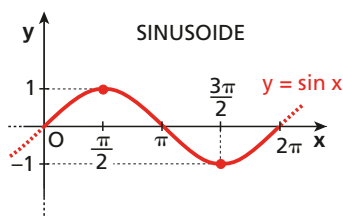
- **seno di α** ($\sin \alpha$) il valore dell'ordinata di B ;
- **coseno di α** ($\cos \alpha$) il valore dell'ascissa di B ;
- **tangente di α** ($\tan \alpha$) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di B ; è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
- **cotangente di α** ($\cot \alpha$) il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di B ; è definita per $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



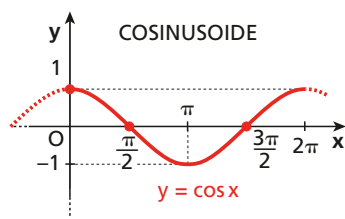
- **Relazioni fondamentali della goniometria:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ e } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

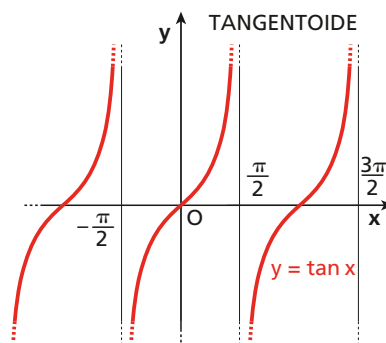
- **Secante di α :** $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, con $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- **Cosecante di α :** $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, con $\alpha \neq k\pi$.



Periodo: 2π



Periodo: 2π



Periodo: π

Funzioni goniometriche di angoli particolari

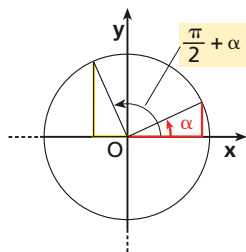
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

continua >>

Angoli associati

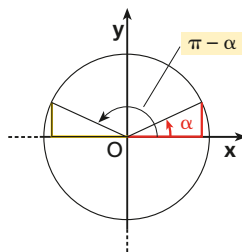
Disegnando gli angoli associati sulla circonferenza goniometrica, possiamo ottenere le relazioni fra le loro funzioni goniometriche.

ESEMPIO:



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$



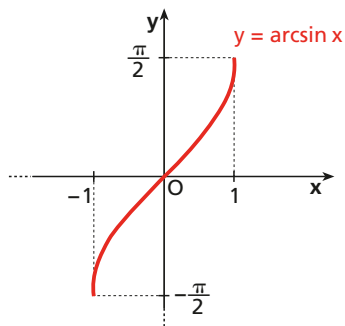
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

Funzioni goniometriche inverse

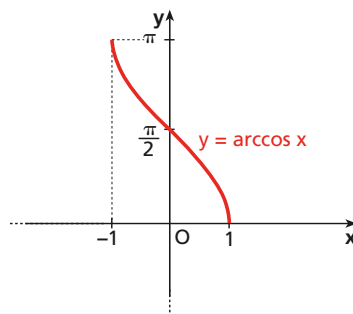
- **Arcoseno:** $y = \arcsin x$.

$$D: [-1; 1]; \quad Im: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$



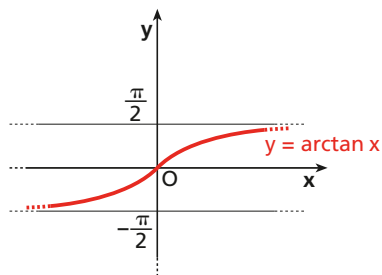
- **Arcocoseno:** $y = \arccos x$.

$$D: [-1; 1]; \quad Im: [0; \pi].$$



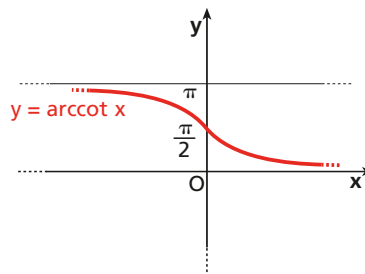
- **Arcotangente:** $y = \arctan x$.

$$D: \mathbb{R}; \quad Im: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$



- **Arcocotangente:** $y = \operatorname{arccot} x$.

$$D: \mathbb{R}; \quad Im:]0; \pi[.$$

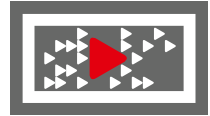


Funzioni goniometriche e trasformazioni geometriche

Funzioni sinusoidali: sono funzioni del tipo $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, $y = A \cos(\omega x + \varphi)$, con $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ e $|A|$ è l'ampiezza, ω la pulsazione e φ lo sfasamento. Il periodo è $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

ESERCIZI

Inquadrami
per fare
le attività
interattive



1 Misura degli angoli

Misura in gradi



Attività interattiva

→ Teoria a p. 697

AL VOLO Scrivi il complementare e il supplementare dei seguenti angoli

1 30°; 64°.

2 50°; 45°.

3 20°; 15°.

Le operazioni fra angoli espressi in gradi

4 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo la sottrazione $90^\circ - 32^\circ 46' 22''$.

Scriviamo 90° in termini di primi e secondi.

Poiché $1^\circ = 60'$, scriviamo:

$$90^\circ = 89^\circ 60'$$

Poiché $1' = 60''$, scriviamo:

$$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$$

Ora è possibile eseguire la sottrazione in colonna, fra gradi, primi e secondi:

$$\begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' - \\ 32^\circ 46' 22'' = \\ \hline 57^\circ 13' 38'' \end{array}$$

Esegui le seguenti operazioni fra le misure di angoli.

5 $15^\circ 32' 52'' + 2^\circ 12' 8''$

[$17^\circ 45'$]

8 $270^\circ - 120^\circ 29' 32''$

[$149^\circ 30' 28''$]

6 $185^\circ 2' + 6^\circ 59' 12''$

[$192^\circ 1' 12''$]

9 $360^\circ - 322^\circ 40' 50''$

[$37^\circ 19' 10''$]

7 $27^\circ 2' 3'' + 42^\circ 12' 56'' + 1^\circ 2' 4''$

[$70^\circ 17' 3''$]

10 $26^\circ - 1^\circ 1' 1''$

[$24^\circ 58' 59''$]

Trova il complementare e il supplementare dei seguenti angoli.

11 $36^\circ 25'$

12 $55^\circ 2' 25''$

13 $42^\circ 11' 80''$

Dai gradi sessagesimali ai gradi sessadecimali

14 ESERCIZIO GUIDA Esprimiamo $25^\circ 32' 40''$ in forma sessadecimale.

Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$, scriviamo $32' = \left(32 \cdot \frac{1}{60}\right)^\circ$.

Poiché $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$, scriviamo $40'' = \left(40 \cdot \frac{1}{3600}\right)^\circ$.

Trasformiamo la misura:

$$25^\circ 32' 40'' = 25^\circ + \left(\frac{32}{60}\right)^\circ + \left(\frac{40}{3600}\right)^\circ = 25^\circ + 0,5\bar{3}^\circ + 0,0\bar{1}^\circ \simeq 25,54^\circ$$

La trasformazione richiesta è la seguente:

$$25^\circ 32' 40'' \simeq 25,54^\circ$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

Esprimi in forma sessadecimale le seguenti misure di angoli.

- 15 $0^\circ 59' 59''$; $0^\circ 30'$ [1°; 0,5°] 17 $15^\circ 30' 30''$; $30^\circ 30' 30''$ [15,51°; 30,51°]
 16 $1^\circ 59' 30''$; $2^\circ 40''$ [1,99°; 2,01°] 18 $44^\circ 59' 32''$; $45^\circ 59' 60''$ [44,99°; 46°]

Dai gradi sessadecimali ai gradi sessagesimali

19 **ESERCIZIO GUIDA** Trasformiamo $28,07^\circ$ in gradi, primi e secondi.

Possiamo scrivere $28,07^\circ = 28^\circ + 0,07^\circ$.

Trasformiamo $0,07^\circ$ in primi, moltiplicando $0,07$ per 60 (poiché $1^\circ = 60'$):

$$0,07^\circ = (0,07 \cdot 60)' = 4,2'.$$

Scriviamo $4,2' = 4' + 0,2'$.

Trasformiamo $0,2'$ in secondi, moltiplicando $0,2$ per 60 (poiché $1' = 60''$):

$$0,2' = (0,2 \cdot 60)'' = 12''.$$

Pertanto: $28,07^\circ = 28^\circ 4' 12''$.

Esprimi in gradi, primi e secondi le seguenti misure di angoli, espresse in forma sessadecimale (arrotondando eventualmente i secondi).

- 20 $28,3^\circ$ [28° 18'] 22 $120,36^\circ$ [120° 21' 36"] 24 $90,05^\circ$ [90° 3']
 21 $2,23^\circ$ [2° 13' 48"] 23 $90,5^\circ$ [90° 30'] 25 $1,567^\circ$ [1° 34' 1"]

Misura in radianti



Attività interattiva

→ Teoria a p. 698

Dai gradi sessagesimali ai radianti e viceversa

26 **ASSOCIA**

- | | |
|----------------|---------------------|
| a. 90° | 1. $\frac{5}{3}\pi$ |
| b. 30° | 2. $\frac{\pi}{2}$ |
| c. 300° | 3. $\frac{3}{4}\pi$ |
| d. 270° | 4. $\frac{\pi}{6}$ |
| e. 135° | 5. $\frac{3}{2}\pi$ |

27 **TEST** L'angolo $\frac{\pi}{4}$:

- A è metà dell'angolo retto.
 B è metà dell'angolo piatto.
 C è un quarto dell'angolo giro.
 D corrisponde a 90° .

28 **COMPLETA** la seguente tabella.

Gradi	0°	<input type="text"/>	180°	<input type="text"/>	<input type="text"/>	270°
Radianti	<input type="text"/>	$\frac{\pi}{3}$	<input type="text"/>	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	<input type="text"/>

Trasforma in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi sessagesimali.

- 29 15° , 36° , 210° , 300° . 30 20° , 80° , 100° , 160° .
In 2 passi 31 70° , 5° , 150° , 225° .
 1 Applica la proporzione $\alpha^\circ : \alpha_{\text{rad}} = 360^\circ : 2\pi$. 32 $121^\circ 3'$, $200^\circ 36'$, $15^\circ 12' 58''$.
 2 Sostituisci il valore di α° e calcola il valore di α_{rad} .

Trasforma in gradi sessagesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.

33 $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{9}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$.

35 4π , 4 , $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$.

34 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$.

36 $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$, 3 .

37 **COMPLETA** la seguente tabella.

Gradi sessagesimali	22° 30'	<input type="text"/>	<input type="text"/>	31° 12'	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Radiani	<input type="text"/>	$\frac{3}{8}\pi$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	8	<input type="text"/>
Gradi sessadecimali	<input type="text"/>	<input type="text"/>	12,5°	<input type="text"/>	<input type="text"/>	120,34°

38 Un angolo α misura $\frac{3}{7}\pi$. Trova la misura del suo supplementare in gradi. [102° 51' 36"]

In un triangolo rettangolo trova le misure in gradi degli angoli acuti α e β utilizzando la condizione indicata.

39 $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ [$\alpha = 22^\circ 30'$, $\beta = 67^\circ 30'$]

40 $\alpha = \beta - 20^\circ$ [$\alpha = 35^\circ$, $\beta = 55^\circ$]

41 α supera il doppio di β di 15°. [$\alpha = 65^\circ$, $\beta = 25^\circ$]

42 Un triangolo isoscele ha ciascun angolo alla base di 27°. Trova l'angolo al vertice in radianti. [2,2]

43 Un triangolo ha due angoli che misurano 52° e 20°. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e radianti. [108°; $\frac{3}{5}\pi$]

44 Un angolo di un triangolo misura 32°, un secondo angolo è $\frac{2}{3}\pi$ radianti. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e in radianti. [28°; 0,49]

45 Un triangolo ha un angolo doppio di un altro e il terzo angolo misura 24°. Trova la misura in radianti dei tre angoli del triangolo. [0,42; 0,91; 1,82]

Trova la misura, in gradi o in radianti, di due angoli supplementari α e β , utilizzando la condizione indicata.

46 $\alpha - 3\beta = 27^\circ$ [$\alpha = 141^\circ 45'$, $\beta = 38^\circ 15'$]

47 $\beta - 2\alpha = 80^\circ$ [$\alpha = 33^\circ 20'$, $\beta = 146^\circ 40'$]

48 $\alpha = \beta + \frac{\pi}{3}$ [$\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{3}$]

Lunghezza di un arco di circonferenza

49 Calcola la misura, in gradi sessagesimali e in radianti, di un angolo al centro di una circonferenza il cui raggio è uguale a 5 cm e che insiste su un arco lungo 23 cm. [263° 33' 38"; 4,6]

50 Calcola la lunghezza di un arco di circonferenza, con il raggio lungo 7 cm, che corrisponde a un angolo al centro uguale a 4,2 radianti. [29,4 cm]

