CAPITOLO 1
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

T TEORIA

Plastica green: quale fornitore?

Per acquistare le materie prime necessarie per la produzione di oggetti in plastica biodegradabile, un'azienda può rivolgersi a più fornitori, che offrono condizioni diverse. Scegliere il fornitore più conveniente consente di risparmiare sui costi.

Come possono le disequazioni aiutare nella scelta?

→ La risposta a pag. 9

1 Definizioni e princìpi di equivalenza

→ Esercizi a p. 23

Richiamiamo alcuni concetti sulle disequazioni.
Le disuguaglianze sono enunciati fra espressioni che confrontiamo mediante i seguenti simboli.

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$
minore	minore o uguale	maggiore	maggiore o uguale

DEFINIZIONE
Una **disequazione** è una disuguaglianza in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che rendono la disuguaglianza vera.

Le lettere per le quali si cercano valori sono le **incognite**. I valori delle incognite che rendono vera la disuguaglianza sono le **soluzioni** della disequazione.

Ci occuperemo di disequazioni a una sola incognita e cercheremo di determinare l'**insieme delle soluzioni** S nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Listen to it

An **inequality** is a relation that compares two expressions, one greater than the other. If the expressions contain unknown quantities, we **solve the inequality** by finding the values for which the **inequality** holds.

Scarica la app **GUARDA!** e inquadrami

3 Video
4 Listen to it

ESEMPIO
La disequazione $5-x>0$ ha come insieme delle soluzioni $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<5\}$, che indichiamo, per brevità, con $x<5$.

Diversi tipi di disequazioni

Una disequazione è:

- **numerica** se non compaiono altre lettere oltre all'incognita, altrimenti è **letterale**;
- **intera** se l'incognita compare soltanto nei numeratori delle eventuali frazioni presenti nella disequazione, altrimenti è **fratta**.

DEFINIZIONE
Le **condizioni di esistenza** di una disequazione sono le condizioni che le variabili devono soddisfare affinché tutte le espressioni scritte nella disequazione abbiano significato. Le indichiamo con C.E.

ESEMPIO
La disequazione $\frac{2}{x+5}>3x-1$ è numerica fratta e ha senso solo quando

$$x+5\neq 0\rightarrow x\neq -5$$

perché non possono esistere, cioè non hanno significato, frazioni con denominatore nullo. Diciamo anche che la sua condizione di esistenza è $x\neq -5$.

Se $P(x)$ è un polinomio ridotto in forma normale, otteniamo una disequazione intera in **forma normale** ponendo $P(x)>0$ (o, analogamente, $P(x)<0$, $P(x)\geq 0$, $P(x)\leq 0$). Il grado del polinomio $P(x)$ è detto **grado della disequazione**; se il grado è 1, si parla di disequazioni intere di primo grado o **lineari**.

Rappresentazione delle soluzioni

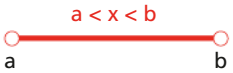
Per scrivere o rappresentare graficamente le soluzioni delle disequazioni sono utili gli **intervalli**.

DEFINIZIONE
Dati due numeri reali a e b, con $a<b$, chiamiamo **intervallo limitato** l'insieme dei numeri reali x compresi fra a e b; i numeri a e b sono gli **estremi** dell'intervallo (a è l'estremo **inferiore**, b l'estremo **superiore**).
Dato un numero reale a, chiamiamo **intervallo illimitato** l'insieme dei numeri reali x che precedono a (intervallo illimitato **inferiormente**), o l'insieme dei numeri reali x che seguono a (intervallo illimitato **superiormente**).

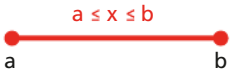
Rispetto a un estremo, un intervallo è **chiuso** quando include l'estremo stesso, **aperto** quando non lo include.

Distinguiamo i seguenti casi, dove rappresentiamo gli intervalli in tre modi diversi: con le disuguaglianze, mediante parentesi quadre o con una rappresentazione grafica mediante segmenti (intervalli limitati) o semirette (intervalli illimitati).

Intervalli limitati



a. Intervallo aperto $]a; b[$.

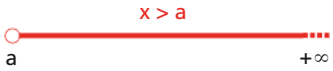


b. Intervallo chiuso $[a; b]$.

c. Intervallo aperto a destra $[a; b[$.

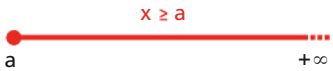
d. Intervallo aperto a sinistra $]a; b]$.

Intervalli illimitati



a. Intervallo aperto illimitato superiormente $]a; +\infty[$.

b. Intervallo aperto illimitato inferiormente $]-\infty; a[$.



c. Intervallo chiuso illimitato superiormente $[a; +\infty[$.

d. Intervallo chiuso illimitato inferiormente $]-\infty; a]$.

ESEMPIO

1. $\left[2; \frac{17}{5}\right]$, ossia $2 \leq x \leq \frac{17}{5}$, è un intervallo limitato chiuso; 2 è l'estremo inferiore, $\frac{17}{5}$ l'estremo superiore.

2. $]-\infty; 5[$, ossia $x < 5$, è un intervallo aperto illimitato inferiormente.

PROVA SUBITO

Rappresenta negli altri modi possibili i seguenti intervalli:

a. $]-3; 7[$;

b. $5 < x \leq 8$;

c. $x \geq 2$.

Disequazioni equivalenti

Due **disequazioni** sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.
Valgono i seguenti princìpi.

Primo principio di equivalenza
Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero o una stessa espressione letterale che non restringa le condizioni di esistenza.

In base a questo principio un termine può essere *trasportato* da un membro all'altro cambiandogli il segno e un termine presente in entrambi i membri può essere *cancellato*.

Secondo principio di equivalenza
Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente moltiplicando o dividendo i due membri per uno stesso numero o una stessa espressione letterale diversi da 0 e:

- mantenendo lo *stesso verso*, se il numero o l'espressione per cui moltiplichiamo (o dividiamo) sono *positivi*;
- *cambiando verso*, se il numero o l'espressione sono *negativi*.

PROVA SUBITO

a. La disequazione $-x^2 > -7x^2$ è equivalente alla disequazione $6x^2 > 0$?

b. $2x - 1 > -1 + x$ è equivalente a $x > 0$?

In particolare, **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il verso della disuguaglianza, si ottiene una disequazione equivalente**.

Questa operazione equivale a moltiplicare per -1 i due membri della disequazione e a invertire il verso della disuguaglianza.

PROVA SUBITO

a. La disequazione $-5x < 10$ è equivalente alla disequazione $x < -2$?

b. $3x + 1 \geq 4x - 3$ è equivalente a $x \leq 4$?

ESEMPIO

$-x^2 > -9$ è equivalente a $x^2 < 9$. La seconda disequazione si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per -1 (ovvero cambiando il segno di tutti i termini) e invertendo il verso della disuguaglianza.

T TEORIA

2 Disequazioni di primo grado

→ Esercizi a p. 24

Le disequazioni intere di primo grado, o **lineari**, possono sempre essere scritte in una delle seguenti forme, dopo aver applicato i princìpi di equivalenza:

$$ax > b, \quad ax \geq b, \quad ax < b, \quad ax \leq b, \quad \text{dove } x \text{ è l'incognita e } a, b \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo $ax > b$, otteniamo, a seconda dei valori di a, i casi in tabella.

Segno di a	Soluzioni	Esempio
$a > 0$	$ax > b \rightarrow x > \frac{b}{a}$	$3x > -2 \rightarrow x > -\frac{2}{3}$
$a < 0$	$ax > b \rightarrow x < \frac{b}{a}$	$-3x > 6 \rightarrow x < -2$
$a = 0$	$0x > b$: se $b > 0$, $S = \varnothing$, disequazione impossibile; se $b = 0$, $S = \varnothing$, disequazione impossibile; se $b < 0$, $S = \mathbb{R}$, disequazione sempre verificata.	$0x > 5 \rightarrow S = \varnothing$ $0x > 0 \rightarrow S = \varnothing$ $0x > -4 \rightarrow S = \mathbb{R}$

PROVA SUBITO

Risolvi le disequazioni:

a. $4x + 1 > 6 + 5x$;

b. $x \geq 1 + x$.

Un ragionamento analogo vale anche per le altre tre disequazioni.
Risolviamo una disequazione numerica intera, applicando i princìpi di equivalenza:

$$2 + \frac{x}{4} \leq 1 + x \xrightarrow[\text{primo principio di equivalenza}]{} \frac{x}{4} - x \leq 1 - 2 \xrightarrow[\text{svolgiamo i calcoli}]{} -\frac{3}{4}x \leq -1 \xrightarrow[\text{secondo principio di equivalenza}]{} x \geq \frac{4}{3}.$$

ESEMPIO Conti al cinema

Un cinema ha 400 posti e il biglietto per la visione di un film costa 8 € a prezzo pieno e 5 € ridotto. Il gestore è sicuro che per lo spettacolo delle 20:00 ci sarà il pieno di spettatori.

► Quanti biglietti ridotti devono essere venduti, al massimo, per avere un incasso di almeno 2750 €?

Chiamiamo x il numero di biglietti ridotti venduti. Quando la sala del cinema è piena, i biglietti a prezzo pieno sono $400 - x$ e l'incasso è, pertanto:

$$5 \cdot x + 8(400 - x).$$

Dobbiamo risolvere la disequazione:

$$5x + 8(400 - x) \geq 2750 \rightarrow 5x + 3200 - 8x \geq 2750 \rightarrow x \leq 150.$$

Per incassare almeno 2750 € non si devono vendere più di 150 biglietti ridotti.

Studio del segno di un prodotto

ESEMPIO

Consideriamo una disequazione costituita da un prodotto di binomi di primo grado messo a confronto con il numero 0.

$$(x-1)(3x+2)(x+4) > 0$$

Per risolverla **studiamo il segno** di ogni fattore e poi deduciamo quello del prodotto al variare di x.

$$x-1>0 \quad \rightarrow \quad x>1$$
$$3x+2>0 \quad \rightarrow \quad x>-\frac{2}{3}$$
$$x+4>0 \quad \rightarrow \quad x>-4$$

Rappresentiamo i risultati in uno schema grafico in cui indichiamo i segni dei fattori nei diversi intervalli e il segno del prodotto, ottenuto con la regola dei segni. Evidenziamo in giallo gli intervalli in cui la disequazione è verificata, cioè quelli in cui il prodotto risulta essere positivo.

L'insieme delle soluzioni è:

$$-4<x<-\frac{2}{3} \quad \vee \quad x>1.$$

		-4		$-\frac{2}{3}$		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)(3x+2)(x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Animazione nell'ebook

Nell'animazione, scomponendo in fattori e applicando lo stesso metodo, risolviamo anche:
$x^3-4x \le 0$.

PROVA SUBITO

Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $(7x+2)(4x-5) \ge 0$;

b. $x(1-x)(x-6) < 0$.

Animazione nell'ebook

PROVA SUBITO

Risolvi la disequazione $x(4-2x)(x+3) \le 0$.

3 Disequazioni di secondo grado

Ogni disequazione di secondo grado intera nell'incognita x può essere ricondotta alla forma normale $ax^2+bx+c>0$ (o in quelle analoghe con $\ge, <, \le$), con $a \ne 0$.

Per risolverla usiamo un metodo che si basa sullo studio del segno del trinomio ax^2+bx+c associato.

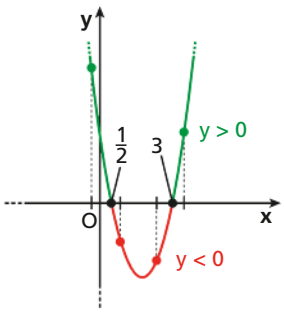
Segno di un trinomio di secondo grado

→ Esercizi a p. 26

Per studiare il segno di un trinomio di secondo grado ax^2+bx+c, con $a \ne 0$, possiamo considerare la funzione $y=ax^2+bx+c$ e utilizzare il suo grafico, che è una parabola.

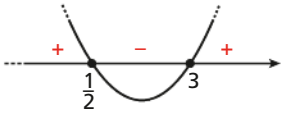
ESEMPIO

Studiamo il segno del trinomio di secondo grado $2x^2-7x+3$.
La funzione $y=2x^2-7x+3$ ha per grafico una parabola che ha la concavità rivolta verso l'alto e interseca l'asse x nei punti di ascissa $\frac{1}{2}$ e 3.
Per $\frac{1}{2}<x<3$, i punti del grafico hanno ordinata negativa; per $x<\frac{1}{2}$ o $x>3$, hanno ordinata positiva.



Per lo studio del segno non servono altre informazioni. Possiamo utilizzare lo schema semplificato della figura e concludere che il trinomio $2x^2 - 7x + 3$ è

- negativo se $\frac{1}{2} < x < 3$;
- nullo se $x = \frac{1}{2} \vee x = 3$;
- positivo se $x < \frac{1}{2} \vee x > 3$.

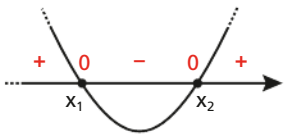
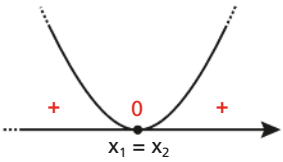
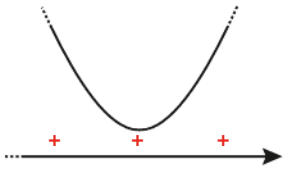
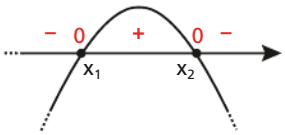
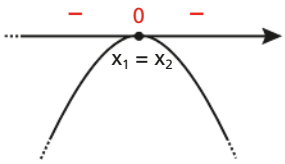
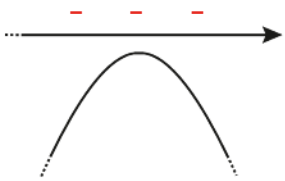


Riassumiamo nella tabella le possibili posizioni di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ rispetto all'asse x.

x_1 e x_2 sono le eventuali radici dell'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

cioè i valori per i quali il trinomio è nullo. I segni + e − indicano gli intervalli in cui la parabola è sopra o sotto l'asse x, e quindi anche dove il trinomio è positivo o negativo.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Quando $\Delta > 0$, chiamiamo **intervallo delle radici** l'intervallo dei valori compresi fra x_1 e x_2.
Osserviamo i grafici nella prima colonna della tabella precedente, che si riferiscono al caso $\Delta > 0$. Per valori di x esterni all'intervallo delle radici:

- se $a > 0$, cioè ha segno +, anche il trinomio ha segno +;
- se $a < 0$, cioè ha segno −, anche il trinomio ha segno −.

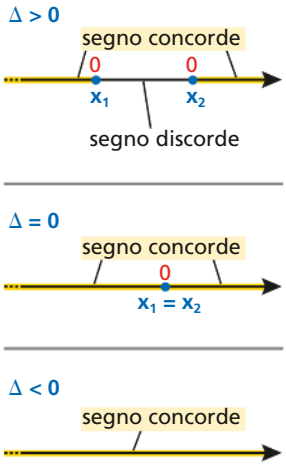
Quindi il trinomio assume sempre *segno concorde* con quello del primo coefficiente a per *valori esterni all'intervallo delle radici*.
Ragionando nello stesso modo, otteniamo che, con $\Delta > 0$, il trinomio assume *segno discorde* da quello di a per *valori di x interni all'intervallo delle radici*.
Quindi, per formulare una regola che valga sia per $a > 0$ sia per $a < 0$, basta confrontare il segno del trinomio con quello di a per i valori interni o esterni all'intervallo delle radici.
Procedendo nello stesso modo anche nei casi $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, otteniamo lo schema all'inizio del colonnino nella pagina seguente, che possiamo utilizzare senza tracciare il grafico della parabola.

In sintesi, vale la regola seguente.

Segno di un trinomio di secondo grado
Quando l'equazione associata al trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, ha:

- $\Delta > 0$, il trinomio e il coefficiente a hanno
  - *segno concorde* per valori di x *esterni* all'intervallo delle radici;
  - *segno discorde* per valori di x *interni* all'intervallo delle radici;
- $\Delta = 0$, il trinomio e il coefficiente a hanno *segno concorde* per *tutti* i valori di x *diversi* dalla radice doppia dell'equazione;
- $\Delta < 0$, il trinomio e il coefficiente a hanno *segno concorde* per *ogni* valore reale di x.

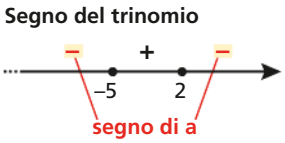
confronto dei segni di $ax^2 + bx + c$ e di a:



Facciamo alcuni esempi.

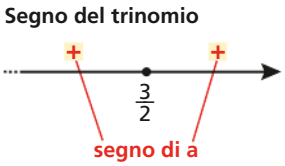
ESEMPIO

a. Il trinomio $-x^2 - 3x + 10$ ha equazione associata $-x^2 - 3x + 10 = 0$, con $\Delta > 0$ e $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.



b. Il trinomio $+4x^2 - 12x + 9$ ha equazione associata $4x^2 - 12x + 9 = 0$, con $\Delta = 0$ e

$$x_1 = x_2 = \frac{3}{2}.$$



c. Il trinomio $-7x^2 + x - 1$ ha equazione associata $-7x^2 + x - 1 = 0$, con $\Delta < 0$ e nessuna radice reale.

PROVA SUBITO

Studia il segno dei seguenti trinomi:

a. $x^2 + 5x + 6$;

b. $3x^2 + x + 1$;

c. $x^2 - 2x + 1$.

Studio algebrico del segno

La regola che abbiamo ottenuto mediante interpretazione grafica, osservando le caratteristiche della parabola, può anche essere dimostrata con lo studio algebrico del segno, come proponiamo nell'animazione nell'ebook.

Animazione nell'ebook

Risoluzione di una disequazione di secondo grado

→ Esercizi a p. 27

La regola dello studio del segno di un trinomio di secondo grado è utile per risolvere una disequazione di secondo grado. Possiamo procedere come segue.

- Portiamo la disequazione nella forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c > 0}$ (o in quelle analoghe con $\geq$, $<$, $\leq$), dove per comodità consideriamo $\boldsymbol{a > 0}$. Possiamo sempre ricondurci al caso $a > 0$ perché, se nella disequazione data è $a < 0$, basta moltiplicare i due membri della disequazione per -1 e cambiare il verso della disequazione applicando il secondo principio di equivalenza.
- Risolviamo l'equazione associata, determinando il segno del discriminante e le radici, quando esistono.
- Applichiamo la regola dello studio del segno, individuando l'intervallo o gli intervalli in cui il trinomio è o positivo o negativo, a seconda della richiesta della disequazione.

Abbiamo scelto di portare sempre la disequazione nella forma con $a > 0$ perché così, nella risoluzione, possiamo studiare il segno del trinomio usando solo parabole con la concavità rivolta verso l'alto. Negli esercizi vedremo anche studi del segno del trinomio nella forma con $a < 0$, usando parabole con la concavità rivolta verso il basso.

Listen to it

To solve a **quadratic inequality**, just sketch some basic features of the **graph** of the associated quadratic function, as shown in the figures.

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	x_1 x_2 $x < x_1 \vee x > x_2$	x_1 x_2 $x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	x_1 $x \neq x_1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

ESEMPIO

Animazione nell'ebook

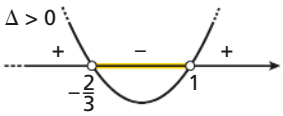
1. $\Delta > 0$

Risolviamo la disequazione $-3x^2 + x + 2 > 0$.
Il coefficiente di x^2 è negativo. Per ricondurci al caso $a > 0$, moltiplichiamo entrambi i membri per -1 e cambiamo il verso:

$$-3x^2 + x + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - x - 2 < 0.$$

Risolviamo la disequazione $3x^2 - x - 2 < 0$.
L'equazione associata è $3x^2 - x - 2 = 0$, con radici $x_1 = -\frac{2}{3}$ e $x_2 = 1$.

Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 3 di x^2 per valori esterni all'intervallo $\left[-\frac{2}{3}; 1\right]$ e ha segno discorde per valori interni.

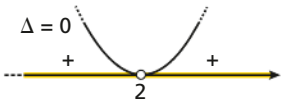


La disequazione chiede che il trinomio sia negativo, quindi le soluzioni sono: $-\frac{2}{3} < x < 1$.

Animazione nell'ebook

2. $\Delta = 0$

Risolviamo la disequazione $x^2 - 4x + 4 > 0$.
L'equazione associata $x^2 - 4x + 4 = 0$ ha $\Delta = 0$, con due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = 2$.

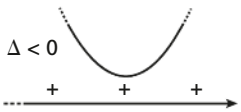


Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 1 di x^2 per qualunque valore diverso da 2. La disequazione chiede che il trinomio sia positivo, quindi le soluzioni sono: $x \neq 2$.

Animazione nell'ebook

3. $\Delta < 0$

Risolviamo la disequazione $2x^2 - x + 1 < 0$.
L'equazione associata $2x^2 - x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$.
Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 2 di x^2 per qualsiasi valore di x. La disequazione chiede che il trinomio sia negativo, quindi non è mai verificata.



PROVA SUBITO

Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $2x^2 + 8x - 10 < 0$;

b. $2x^2 - 12x + 18 \geq 0$;

c. $4x^2 + 2x + 1 < 0$.

IDEE E PROBLEMI ECONOMIA

Prendere decisioni con le disequazioni

Quando occorre individuare la più conveniente tra due opzioni che dipendono da una stessa variabile, la scelta può dipendere dai valori assunti dalla variabile. In questi casi, le disequazioni aiutano a stabilire quando conviene l'una o l'altra opzione.

Uno sconto molto particolare Un'azienda che produce oggetti in plastica riciclabile, per rifornirsi della materia prima necessaria, deve scegliere l'offerta migliore fra quelle di due fornitori.
Il fornitore A propone un prezzo di 160 €/quintale, mentre il fornitore B chiede 180 €/quintale con uno sconto in euro, per ogni quintale acquistato, pari al doppio del numero totale dei quintali dell'ordine.
Per entrambi i fornitori l'ordine massimo è di 30 q e le spese di spedizione sono uguali, quindi si possono trascurare.

► Qual è l'opzione più conveniente?

Chiamiamo x il numero dei quintali di materia prima da ordinare, con $0 \leq x \leq 30$.
Con il fornitore A, la spesa ammonta a $160x$. Se invece si opta per il fornitore B, il prezzo risulta

$$(180 - 2x)\,x = 180x - 2x^2.$$

Il fornitore A è più conveniente del fornitore B quando permette di avere una spesa inferiore, e cioè quando è verificata la disequazione:

$$160x < 180x - 2x^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 20x < 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 10x < 0.$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x^2 - 10x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x - 10) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 10.$$

Il binomio $x^2 - 10x$ può essere considerato un trinomio del tipo $ax^2 + bx + c$, dove $a = 1$, $b = -10$ e $c = 0$; ha segno concorde con il coefficiente di x^2, ossia positivo, per valori esterni all'intervallo delle soluzioni, e segno discorde, ossia negativo, per valori interni.
Poiché la disequazione chiede che il trinomio sia negativo, le soluzioni sono: $0 < x < 10$.
Per ordini inferiori a 10 q conviene rivolgersi al fornitore A; per ordini superiori a 10 q conviene optare per il fornitore B; per ordini pari a 10 q le due offerte sono equivalenti.

4 Disequazioni di grado superiore al secondo

→ Esercizi a p. 34

Disequazioni risolvibili con scomposizioni in fattori

Dato un polinomio $P(x)$ di grado maggiore di 2, le disequazioni del tipo $P(x) < 0$ o $P(x) > 0$ sono di grado superiore al secondo. Possono essere risolte scomponendo in fattori di primo e secondo grado il polinomio $P(x)$ e studiando il segno del prodotto di polinomi che si ottiene.

Animazione nell'ebook

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Scomponiamo $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ in fattori mediante la regola di Ruffini.

Se sostituiamo nel polinomio i divisori del termine noto 6, scopriamo che 1 è uno zero del polinomio, che è quindi divisibile per $(x - 1)$.

Applichiamo la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

La disequazione iniziale è equivalente a:

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) > 0.$$

Esaminiamo il segno dei polinomi fattori e del prodotto:

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1;$$

$$x^2 - x - 6 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \ \vee \ x > 3.$$

Nel quadro dei segni vediamo che la disequazione ha soluzioni

$$-2 < x < 1 \ \vee \ x > 3.$$

		−2		1		3	
$x-1$	−		−	0	+		+
x^2-x-6	+	0	−		−	0	+
$(x-1)(x^2-x-6)$	−	0	+	0	−	0	+

PROVA SUBITO

Risolvi:

a. $x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0$;

b. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \leq 0$.

In particolari casi di disequazioni, possiamo utilizzare metodi specifici.

Disequazioni binomie

Una **disequazione binomia** può essere ricondotta alla forma $\boldsymbol{ax^n + b \gtreqless 0}$, con $a \neq 0$ e n intero positivo.

Se $b = 0$ la disequazione si dice **monomia**.

Animazione nell'ebook

ESEMPIO

Risolviamo

$$x^3 - 8 \leq 0.$$

Scomponiamo in fattori ricordando che $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Otteniamo $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \leq 0$.

Poiché il trinomio $x^2 + 2x + 4$, che ha $\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 < 0$, assume sempre segno positivo, il segno di $x^3 - 8$ dipende solo dal segno del fattore $(x - 2)$.

La disequazione è verificata per $x \leq 2$.

Per brevità possiamo scrivere direttamente

$$x^3 - 8 \leq 0 \rightarrow x^3 \leq 8 \rightarrow x \leq 2.$$

In generale, le disequazioni del tipo $\boldsymbol{x^n > a}$ e $\boldsymbol{x^n < a}$, con n dispari, si risolvono direttamente scrivendo $\boldsymbol{x > \sqrt[n]{a}}$ e $\boldsymbol{x < \sqrt[n]{a}}$. Vale anche nel caso di disuguaglianza non stretta.

Vediamo ora il caso in cui n è pari.

ESEMPIO

Risolviamo $x^4 - 16 > 0$.
Scomponiamo in fattori $x^4 - 16$: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$.
Il binomio $x^2 + 4$ è sempre positivo, quindi il segno di $x^4 - 16$ dipende solo dal segno del fattore $x^2 - 4$.

$$x^4 - 16 > 0 \rightarrow x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 2.$$

PROVA SUBITO

a. Risolvi $x^5 + 125 \leq 0$.

b. Risolvi $x^4 - 81 > 0$ e $x^4 + 81 > 0$, e confronta i risultati con il caso di esponente dispari di x.

In generale, le disequazioni del tipo $\boldsymbol{x^n > a}$ e $\boldsymbol{x^n < a}$, con n pari e $a \geq 0$, hanno rispettivamente soluzioni $\boldsymbol{x < -\sqrt[n]{a} \vee x > \sqrt[n]{a}}$ e $\boldsymbol{-\sqrt[n]{a} < x < \sqrt[n]{a}}$.

Disequazioni biquadratiche

Una **disequazione biquadratica** è riconducibile alla forma $\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c \gtreqless 0}$, con $a, b, c \neq 0$.

ESEMPIO

Risolviamo $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$.

L'equazione associata $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ è un'*equazione biquadratica*, perché è nella forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a, b, c \neq 0$. Poniamo $x^2 = z$:

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 4, z_2 = 9.$$

La disequazione iniziale è riconducibile alla disequazione in z:

$$z^2 - 13z + 36 \geq 0,$$

le cui soluzioni sono $z \leq 4 \vee z \geq 9$; da ciò, essendo $x^2 = z$:

$$x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0 \quad \text{per} \quad x^2 \leq 4 \ \vee \ x^2 \geq 9,$$

ossia: $-2 \leq x \leq 2 \ \vee \ (x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3)$.

Animazione nell'ebook

PROVA SUBITO

Risolvi $x^4 - 24x^2 - 25 > 0$.

PROVA SUBITO

Risolvi $4x^5 + 7x^3 - 36x > 0$.

Animazione nell'ebook

Disequazioni trinomie

Una **disequazione trinomia** può essere ricondotta alla forma $\boldsymbol{ax^{2n} + bx^n + c \gtreqless 0}$, con $a, b, c \neq 0$ e n intero positivo.

ESEMPIO

Risolviamo $x^6 - 3x^3 + 2 > 0$.

L'equazione associata $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ è un'*equazione trinomia*, perché è nella forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, con $a, b, c \neq 0$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Poniamo $x^3 = z$:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 1, z_2 = 2.$$

La disequazione $x^6 - 3x^3 + 2 > 0$ si trasforma in

$$z^2 - 3z + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad z < 1 \ \vee \ z > 2,$$

da cui:

$$x^6 - 3x^3 + 2 > 0 \quad \text{per} \quad x^3 < 1 \ \vee \ x^3 > 2.$$

Risolvendo le disequazioni binomie, otteniamo: $x < 1 \vee x > \sqrt[3]{2}$.

Animazione nell'ebook

PROVA SUBITO

Risolvi $-x^{10} - x^5 + 2 \leq 0$.

5 Disequazioni fratte

→ Esercizi a p. 37

Video

Disequazioni fratte
Risolvi la disequazione $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x+2}$.

T TEORIA

Una disequazione è **fratta** se contiene l'incognita in almeno un denominatore. Per risolverla dobbiamo trasformarla in una disequazione del tipo

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

o nelle analoghe $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$.

$A(x)$ e $B(x)$ sono funzioni dell'incognita x. Noi studiamo il caso in cui $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi.
Per risolvere una disequazione fratta dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$, esaminando i segni di $A(x)$ e di $B(x)$. Dobbiamo imporre $B(x) \neq 0$ per la condizione di esistenza della frazione.

Animazione nell'ebook

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4} \geq 0$.

Il denominatore deve essere non nullo, perciò:

$$\text{C.E.: } 2x^2-7x-4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -\frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq 4.$$

Studiamo il segno del numeratore:

$$x^2-1 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -1 \ \vee \ x > 1.$$

Studiamo il segno del denominatore.

Le radici dell'equazione associata sono $-\frac{1}{2}$ e 4, quindi:

$$2x^2-7x-4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > 4.$$

La frazione è uguale a 0 quando si annulla il suo numeratore, mentre se il denominatore è uguale a 0 la frazione non esiste. In quest'ultimo caso, nello schema, utilizziamo il simbolo $\nexists$.

		-1		$-\frac{1}{2}$		1		4	
x^2-1	+	0	−		−	0	+		+
$2x^2-7x-4$	+		+	0	−		−	0	+
$\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4}$	+	0	−	$\nexists$	+	0	−	$\nexists$	+

La disequazione fratta è verificata per:

$$x \leq -1 \ \vee \ -\frac{1}{2} < x \leq 1 \ \vee \ x > 4.$$

PROVA SUBITO

Risolvi la disequazione $\frac{x^2-4x}{x-3} \leq 0$.

Osservazione. Per brevità possiamo anche non scrivere le condizioni di esistenza e segnare direttamente nel quadro dei segni i valori per cui la frazione non esiste.

6 Sistemi di disequazioni

→ Esercizi a p. 41

Come sappiamo, un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni che devono essere soddisfatte *contemporaneamente*.
Per risolverlo, procediamo in questo modo:

- risolviamo ciascuna delle disequazioni;
- costruiamo uno schema grafico con gli intervalli che rappresentano gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni;
- determiniamo l'intersezione di tutti gli insiemi delle soluzioni.

Listen to it

To solve a **system of inequalities**, we have to find the values that satisfy all the inequalities involved.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema $\begin{cases} x^2 < 81 \\ x^2 - 7(2x-7) > 0 \\ 5x + 3 \geq 0 \end{cases}$.

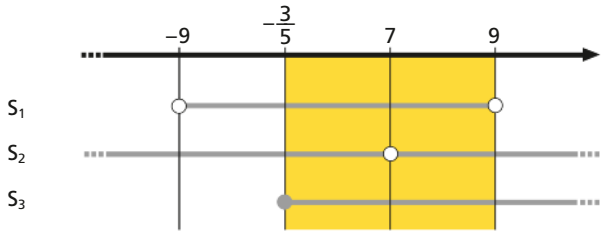
- Risolviamo ognuna delle tre disequazioni.

  Prima disequazione: $x^2 - 81 < 0 \rightarrow -9 < x < 9$. —— S_1

  Seconda disequazione: $x^2 - 14x + 49 > 0 \rightarrow \underbrace{x \neq 7}_{S_2}$. $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$ è sempre positivo tranne che per $x = 7$, valore per cui si annulla

  Terza disequazione: $5x + 3 \geq 0 \rightarrow 5x \geq -3 \rightarrow x \geq -\frac{3}{5}$. —— S_3

- Costruiamo lo schema grafico con gli intervalli delle soluzioni.



- Determiniamo l'intersezione dei tre insiemi di soluzioni, colorando la zona del grafico in cui ci sono soluzioni comuni alle **tre** disequazioni.

  Le soluzioni del sistema sono: $-\frac{3}{5} \leq x < 7 \vee 7 < x < 9$.

PROVA SUBITO

Risolvi il sistema $\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 3x - 21 \leq 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$.

Animazione nell'ebook

PROVA SUBITO

Risolvi il sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 6x \geq 0 \end{cases}$.

7 Equazioni e disequazioni con valori assoluti

Il **valore assoluto** di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero se questo è negativo. In simboli:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Per esempio: $|+5| = 5$; $|0| = 0$; $|-5| = 5$.

Il *valore assoluto* di un numero è per definizione *sempre positivo o nullo*.
Più in generale, se consideriamo il valore assoluto di un'espressione, si ha:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}.$$

PROVA SUBITO

Esplicita i valori assoluti $|-2x|$; $|3x-1|$; $|x^2-5x|$.

Per esempio: $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}.$

Elenchiamo alcune utili proprietà del valore assoluto:

1. $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$;
4. $|x| = |y| \leftrightarrow x = \pm y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
5. $|x| \leq |y| \leftrightarrow x^2 \leq y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
6. $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Equazioni con valori assoluti

→ Esercizi a p. 44

Risolviamo ora equazioni nelle quali compaiono valori assoluti dell'incognita o di espressioni che la contengono.

Equazioni del tipo $|A(x)| = B(x)$

Animazione nell'ebook

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $|x-5| = 3x-1$.

Per la definizione di valore assoluto:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 5, \\ -x+5 & \text{se } x < 5. \end{cases}$$

		5	
$x-5$	$-$	0	$+$
$\lvert x-5 \rvert$	$-x+5$		$x-5$

Le soluzioni dell'equazione si ottengono dall'**unione** degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x-5 = 3x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ -2x = 4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 5 \\ -x+5 = 3x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ -4x = -6 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$x = -2$ non è accettabile perché non è maggiore o uguale a 5, mentre $x = \dfrac{3}{2}$ è accettabile perché minore di 5: l'equazione iniziale ha per soluzione $x = \dfrac{3}{2}$.

Metodo alternativo

Osserviamo che per l'equazione $|x-5| = 3x-1$ deve necessariamente valere $3x-1 \geq 0$, poiché il primo membro è una quantità non negativa.
Applichiamo la proprietà **4** del valore assoluto e otteniamo:

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-5 = \pm(3x-1) \end{cases}.$$

Risolvendo, otteniamo nuovamente la soluzione $x = \dfrac{3}{2}$.

Video

Equazioni con un valore assoluto
Risolvi l'equazione:
$|x^2-2| - (x^2+4) = x(x-6) - |2-x^2|$.

PROVA SUBITO

Risolvi l'equazione $|2x+2| + x = 1$.

Caso particolare: equazioni del tipo $|A(x)| = a$, con $a \in \mathbb{R}$

La proprietà **4** del valore assoluto permette di risolvere, per esempio, equazioni del tipo $|A(x)| = a$, con $a > 0$, senza distinguere i due casi $A(x) \geq 0$ o $A(x) < 0$. Infatti, se $a > 0$, si può scrivere $|A(x)| = |a|$ e risolvere direttamente le equazioni $A(x) = \pm a$.

ESEMPIO

1. $|3 - x| = 2 \rightarrow |3 - x| = |2| \rightarrow 3 - x = \pm 2$,

   da cui:

   $$3 - x = 2 \quad \vee \quad 3 - x = -2 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 5.$$

2. L'equazione $|7 + x| = -3$ non ha soluzioni perché il valore assoluto di un'espressione non può essere un numero negativo.

Animazione nell'ebook

PROVA SUBITO

Risolvi $|2x + 5| = 3$.

In generale, $|A(x)| = a$:

se $a \geq 0$, è equivalente ad $A(x) = a \vee A(x) = -a$;
se $a < 0$, l'equazione non ha soluzioni.

Vedremo negli esercizi anche esempi di equazioni che contengono più valori assoluti.

Disequazioni con valori assoluti

→ Esercizi a p. 46

Per le disequazioni con valori assoluti si procede come per le equazioni.

Disequazioni del tipo $|A(x)| > B(x)$ e $|A(x)| < B(x)$

ESEMPIO

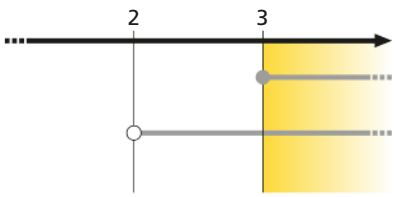
Risolviamo la disequazione

$$|x - 3| > -3x + 5.$$

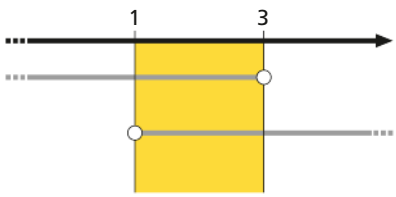
Applichiamo la definizione di valore assoluto e otteniamo i due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x - 3 > -3x + 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 3 \\ -x + 3 > -3x + 5 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 4x > 8 \rightarrow x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \end{cases}.$$



Soluzione: $x \geq 3$.



Soluzione: $1 < x < 3$.

Le soluzioni della disequazione sono i valori $x > 1$.

PROVA SUBITO

Risolvi la disequazione $|x - 4| > -2x + 1$.

Animazione nell'ebook

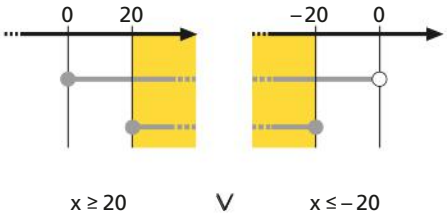
Analizziamo i seguenti casi particolari.

Disequazioni del tipo $|A(x)| > k$, con $k > 0$

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $|x| \geq 20$. Dobbiamo risolvere i due sistemi e poi unire le loro soluzioni.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 20 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x \geq 20 \rightarrow x \leq -20 \end{cases}$$



Le soluzioni della disequazione sono: $x \leq -20 \vee x \geq 20$.

Questo vale in generale, qualsiasi sia l'espressione $A(x)$:

$$|A(x)| \geq k, \quad \text{con } k > 0,$$

è equivalente ad

$$A(x) \leq -k \ \vee \ A(x) \geq k.$$

PROVA SUBITO

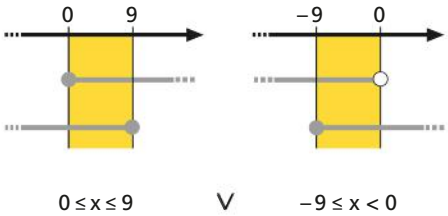
Risolvi $|2x+1| \geq 5$.

Disequazioni del tipo $|A(x)| < k$, con $k > 0$

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $|x| \leq 9$. Dobbiamo risolvere i due sistemi e poi unire le loro soluzioni.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x \leq 9 \rightarrow x \geq -9 \end{cases}$$



Le soluzioni della disequazione sono: $-9 \leq x \leq 9$.

Anche in questo caso possiamo generalizzare:

$$|A(x)| \leq k, \quad \text{con } k > 0,$$

è equivalente a

$$-k \leq A(x) \leq k,$$

ossia al sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq -k \\ A(x) \leq k \end{cases}.$$

PROVA SUBITO

Risolvi $|x^2 - 9| < 7$.

Animazione nell'ebook

ESEMPIO Racconti, cartelle, battute

La *cartella* è l'unità di misura della lunghezza di un testo, mentre le *battute* sono tutti i caratteri che lo compongono, compresi gli spazi vuoti. Un *racconto lungo* è costituito, in media, da 54 900 battute. La sua lunghezza può differire dalla media di al più 19,5 cartelle.

► Se una cartella comprende 1800 battute, in quale intervallo di battute può variare la lunghezza di un racconto lungo?

La lunghezza media, in cartelle, di un racconto lungo è $54\,900 : 1800 = 30,5$. Chiamiamo x la generica lunghezza di un racconto lungo in cartelle. Questa può differire dal valore medio 19,5 sia in eccesso sia in difetto, quindi:

$$|x - 30,5| \leq 19,5.$$

Risolviamo la disequazione, che è del tipo $|A(x)| \leq k$, con $k > 0$:

$$|x - 30,5| \leq 19,5 \quad \rightarrow \quad -19,5 \leq x - 30,5 \leq 19,5 \quad \underset{\text{aggiungiamo 30,5 a ogni membro}}{\rightarrow} \quad 11 \leq x \leq 50.$$

Dunque, nel caso di cartelle da 1800 battute ciascuna, un racconto lungo varia dalle 11 alle 50 cartelle, ossia dalle 19 800 alle 90 000 battute.

T TEORIA

8 Equazioni e disequazioni irrazionali

Un'**equazione** o **disequazione** è **irrazionale** se in essa ci sono radicali contenenti l'incognita.

Listen to it

An equation or an inequality is irrational if it involves one or more radical expressions containing an unknown variable.

Per esempio, $\sqrt{x^2 - 9} = 2$ e $4 - \sqrt{2x} > x$ sono irrazionali, mentre $\sqrt{2}\,x^2 - 3x = 0$ e $x - 2\sqrt{3}\,x > 2$ non lo sono.

Equazioni irrazionali

→ Esercizi a p. 50

Consideriamo l'equazione del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x), \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2.$$

Per risolvere l'equazione, dobbiamo ricondurci a un'equazione equivalente senza radicali contenenti l'incognita.

Distinguiamo due casi.

- Se ***n*** è ***dispari***, l'equazione si risolve elevando alla potenza n-esima entrambi i membri, cioè:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \text{è equivalente ad} \quad A(x) = [B(x)]^n \quad (\text{se } n \text{ è dispari}).$$

ESEMPIO

Risolviamo $\sqrt[3]{4 + x - x^3} = -x$.

Poiché $n = 3$ è dispari, l'equazione è equivalente a

$$4 + x - x^3 = -x^3 \rightarrow 4 + x = 0 \rightarrow x = -4.$$

La soluzione è $x = -4$.

PROVA SUBITO

Risolvi le equazioni:

a. $\sqrt[3]{3x + 1} = 1$;
b. $\sqrt[3]{x - 3} = -3$;
c. $\sqrt[3]{x^3 - x} = x - 1$.

- Se ***n*** è ***pari***, è necessario porre alcune condizioni.

  La condizione di esistenza del radicale è $A(x) \geq 0$.
  La condizione di concordanza di segno per $B(x)$: un radicale con indice pari è sempre positivo o nullo, quindi nell'uguaglianza deve essere positivo o nullo anche il secondo membro.

Abbiamo allora:

$$B(x) \geq 0.$$

Eleviamo poi alla potenza n-esima entrambi i membri e otteniamo

$$A(x) = [B(x)]^n.$$

Osserviamo che se è verificata questa uguaglianza, essendo $[B(x)]^n \geq 0$, è anche verificata la condizione di esistenza $A(x) \geq 0$, che possiamo quindi tralasciare.

In sintesi, se n è pari, l'equazione $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}.$$

T TEORIA

Animazione nell'ebook

Nell'animazione proponiamo lo svolgimento dell'esempio della pagina precedente e di questo, oltre alla verifica delle relative soluzioni.

ESEMPIO

Risolviamo $\sqrt{2x^2 + x + 4} = 2x - 1$.

Poiché $n = 2$ è pari, l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 4 = (2x-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 + x + 4 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \vee x = 3 \end{cases}.$$

Il valore $x = -\frac{1}{2}$ non soddisfa la disequazione del sistema, per cui non è accettabile, mentre $x = 3$ soddisfa la disequazione, quindi è la soluzione del sistema e dell'equazione irrazionale.

PROVA SUBITO

Risolvi le equazioni:

a. $\sqrt{3 - x} = 2$;

b. $\sqrt{x + 5} = -6$;

c. $\sqrt{x^2 + 4x} = x + 1$.

Osservazione. In alternativa al metodo precedente, per risolvere $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$, con n pari, possiamo risolvere l'equazione $A(x) = [B(x)]^n$ e poi eseguire la **verifica** dei valori trovati, sostituendo ciascuno di essi nell'equazione iniziale $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$.

Disequazioni irrazionali

→ Esercizi a p. 51

Esaminiamo disequazioni del tipo $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ oppure $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Per risolvere le disequazioni irrazionali, osserviamo che, in una disuguaglianza fra numeri, se si elevano entrambi i membri a potenza, abbiamo due casi.

- Se l'*esponente è dispari*, il verso della disuguaglianza rimane sempre lo stesso. Per esempio, in

$$+5 > +3 \rightarrow (+5)^3 > (+3)^3 \quad \text{e} \quad -4 < +1 \rightarrow (-4)^3 < (+1)^3,$$

se eleviamo al cubo, entrambe le disuguaglianze rimangono vere.

- Se l'*esponente è pari*, il verso della disuguaglianza rimane sicuramente lo stesso solo se entrambi i membri sono positivi o nulli. Per esempio:
  - se eleviamo al quadrato $+5 > +3$, otteniamo $25 > 9$;
  - se eleviamo al quadrato $-4 < +1$, otteniamo $16 < 1$, che è *falso*.

Teniamo conto delle osservazioni precedenti per risolvere le disequazioni irrazionali e distinguiamo due casi.

Indice dispari

Se ***n*** è **dispari**, le disequazioni si risolvono elevando alla potenza n-esima entrambi i membri, ottenendo così una disequazione equivalente a quella data, cioè:

se n è dispari,

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \text{è equivalente a} \quad A(x) < [B(x)]^n;$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \text{è equivalente a} \quad A(x) > [B(x)]^n.$$

ESEMPIO

Risolviamo $\sqrt[3]{6 - x + x^3} \leq x$.

Eleviamo al cubo i due membri e risolviamo:

$$\sqrt[3]{6 - x + x^3} \leq x \quad \rightarrow \quad 6 - x + x^3 \leq x^3 \quad \rightarrow \quad 6 - x \leq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 6.$$

La disequazione è verificata per: $x \geq 6$.

PROVA SUBITO

Risolvi:

a. $\sqrt[3]{2x - x^3} \leq -x$;

b. $\sqrt[5]{1 - 3x} > -2$.

Indice pari

Se ***n*** è **pari**, consideriamo il caso $n = 2$.

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

Dobbiamo porre la condizione di esistenza del radicale: $A(x) \geq 0$.
Per poter elevare al quadrato occorre che i due membri siano positivi.
Poiché $\sqrt{A(x)}$ è positivo o nullo, deve essere: $B(x) > 0$.
Poste queste condizioni, possiamo elevare al quadrato, ottenendo:

$$A(x) < [B(x)]^2.$$

In sintesi, la disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}.$$

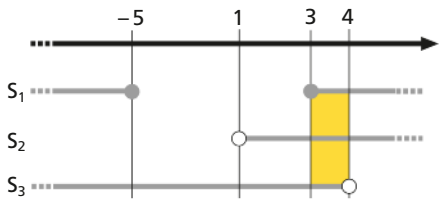
ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$.

Essa è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < (x-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -5 \ \vee \ x \geq 3 \\ x > 1 \\ 4x < 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \ \vee \ x \geq 3 \quad \text{—— } S_1 \\ x > 1 \quad \text{—— } S_2 \\ x < 4 \quad \text{—— } S_3 \end{cases}.$$



Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione, sono

$$3 \leq x < 4.$$

Animazione nell'ebook

PROVA SUBITO

Risolvi $\sqrt{x^2-9} \leq 4-x$.

Animazione nell'ebook

Se la disequazione è del tipo $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^2 \end{cases}.$$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Poniamo la condizione di esistenza del radicale: $A(x) \geq 0$.
Dobbiamo poi risolvere due sistemi, distinguendo due casi.

- Se $B(x) < 0$, la disequazione iniziale è senz'altro soddisfatta, perché il secondo membro, che è negativo, risulta sicuramente minore del primo, che è positivo o nullo. Quindi una parte delle soluzioni della disequazione irrazionale è data da:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}.$$

- Se $B(x) \geq 0$, entrambi i membri della disuguaglianza sono positivi o nulli, quindi, se li eleviamo al quadrato, otteniamo una disuguaglianza con lo stesso verso:

$$A(x) > [B(x)]^2.$$

Se è verificata questa relazione, $A(x)$, essendo maggiore di un quadrato, è certamente positivo: la condizione di esistenza del radicale, $A(x) \geq 0$, è superflua. Otteniamo pertanto le restanti soluzioni della disequazione iniziale da:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}.$$

Video

Disequazioni irrazionali
Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a. $\sqrt{4-x} < x+2$

b. $\sqrt{2x+5} > x+1$

In sintesi, l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}.$$

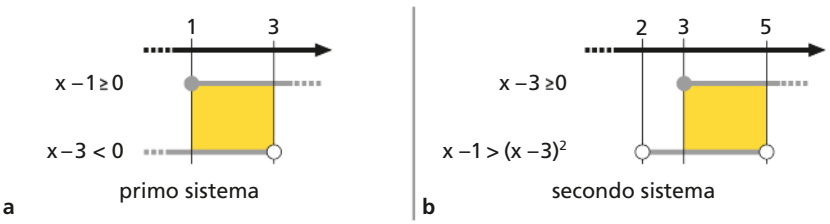
Animazione nell'ebook

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\sqrt{x-1} > x-3$. Otteniamo:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-7x+10 < 0 \rightarrow 2 < x < 5 \end{cases}.$$



Il primo sistema ha come soluzioni $1 \leq x < 3$, il secondo $3 \leq x < 5$. L'unione dei due intervalli dà l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$1 \leq x < 5.$$

PROVA SUBITO

Risolvi $\sqrt{x^2+x-2} \geq 2-x$.

Animazione nell'ebook

MAPPA DEI FONDAMENTALI

Disequazioni di primo grado intere

Con i princìpi di equivalenza otteniamo una delle forme: $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$.

- $2x > 6 \rightarrow x > 3$ — determinata
- $-4x \geq 8 \rightarrow x \leq -2$ — determinata
- $0x > 2 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ — impossibile
- $0x > -3 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ — sempre verificata

Studio del segno di un prodotto

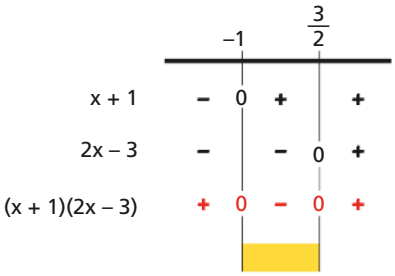
1. Studiamo il segno di ogni fattore.
2. Determiniamo il segno del prodotto al variare di x.

- $(x + 1)(2x - 3) < 0$

  $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

  $2x - 3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2}$

  L'insieme delle soluzioni è: $-1 < x < \frac{3}{2}$.



Disequazioni di secondo grado intere

Disequazioni riconducibili alle forme seguenti, con $a \neq 0$:

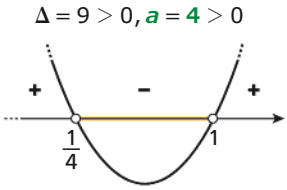
$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$.

1. Risolviamo l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Studiamo il segno del trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$.

- $-4x^2 + 5x - 1 > 0 \rightarrow 4x^2 - 5x + 1 < 0$

  Equazione associata: $4x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 1$.

  L'insieme delle soluzioni è: $\frac{1}{4} < x < 1$.



Disequazioni di grado superiore al secondo

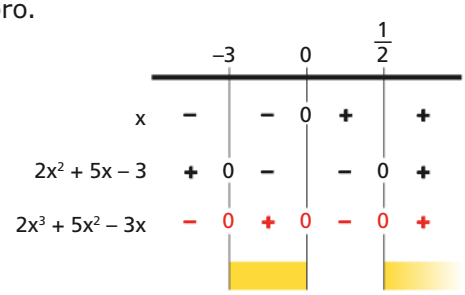
1. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro.
2. Studiamo il segno del prodotto.

- $2x^3 + 5x^2 - 3x \geq 0 \rightarrow x(2x^2 + 5x - 3) \geq 0$

  $x > 0$

  $2x^2 + 5x - 3 > 0 \rightarrow x < -3 \vee x > \frac{1}{2}$

  L'insieme delle soluzioni è: $-3 \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2}$.



continua »

T TEORIA

Disequazioni fratte

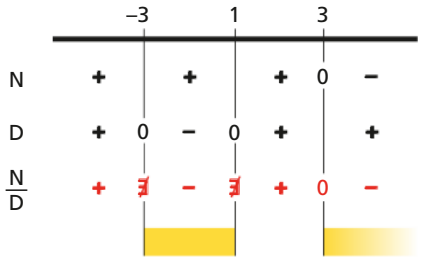
1. Determiniamo le condizioni di esistenza.
2. Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.
3. Compiliamo il quadro dei segni.

▶ $\dfrac{-2x+6}{x^2+2x-3} \leq 0$ C.E.: $x \neq -3 \wedge x \neq 1$.

N: $-2x+6 > 0 \quad \rightarrow \quad x < 3$

D: $x^2+2x-3 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -3 \vee x > 1$

La disequazione è verificata per: $-3 < x < 1 \vee x \geq 3$.

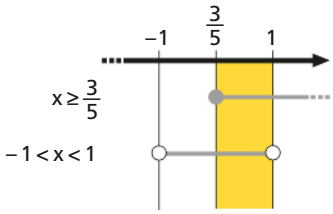


Sistemi di disequazioni

1. Risolviamo le singole disequazioni.
2. Rappresentiamo le soluzioni per trovare quelle comuni a tutte le disequazioni del sistema.

▶ $\begin{cases} 3-5x \leq 0 \\ x^2-1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{5} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

Le soluzioni del sistema sono: $\dfrac{3}{5} \leq x < 1$.



Equazioni e disequazioni con valore assoluto

Sappiamo che, per definizione:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei sistemi generati dallo studio del segno di $f(x)$.

Equazioni irrazionali

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

Se n è **dispari** è equivalente a

$A(x) = [B(x)]^n$.

Se n è **pari** è equivalente a

$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$.

Disequazioni irrazionali

Se n è **dispari**:

- $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ è equivalente ad $A(x) < [B(x)]^n$;
- $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ è equivalente ad $A(x) > [B(x)]^n$.

Se n = **2**:

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ è equivalente al sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente all'**unione** di due sistemi: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$.

FAI IL PUNTO SUI FONDAMENTALI → p. 56

ESERCIZI

GUARDA!
21 Attività interattive

1 Definizioni e princìpi di equivalenza

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1

1 **VERO O FALSO?**

a. La disequazione $\frac{2x^3}{5} - \frac{x}{4} + 3 < 0$ nell'incognita x è di terzo grado fratta. V F

b. $\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{3}\,x > 1$ è una disequazione intera. V F

c. La disequazione $\frac{x-1}{k+3} > 0$ è letterale fratta nell'incognita x. V F

d. In una disequazione intera non ci sono condizioni di esistenza. V F

Intervalli

2 **TEST** L'intervallo rappresentato a fianco corrisponde a:

A $]5; +\infty[$. B $[5; +\infty[$. C $]5; +\infty]$. D $[5; +\infty]$.

Rappresenta i seguenti intervalli (o unioni di intervalli) graficamente e mediante parentesi quadre.

3 $x > 3;\ -1 < x \le 5;\ x \le 8$.

4 $x < 7 \vee x \ge 10;\ x < 6;\ 0 \le x \le 9$.

5 $-2 < x \le 7 \vee x > 9;\ x \le 1 \vee 3 < x < 5$.

6 $x \le -6 \vee x > 6;\ x \ge \frac{3}{4};\ -\frac{1}{5} < x \le 0$.

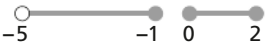
Rappresenta i seguenti intervalli (o unioni di intervalli) mediante disuguaglianze e parentesi quadre.

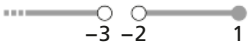
7

8

9

10

11 

12 

Rappresenta graficamente e scrivi mediante disuguaglianze i seguenti intervalli (o unioni di intervalli).

13 $]-1; +\infty[;\ [5; 8]$.

14 $]1; 2] \cup [5; +\infty[;\ ]-\infty; 6[\ \cup [7; 8[$.

15 $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[;\ ]-12; 3]$.

16 $\left]-\frac{1}{2}; 0\right];\ \left[\frac{5}{4}; +\infty\right[$.

17 **VERO O FALSO?**

a. L'intervallo $]2; 10]$ comprende tutti i numeri maggiori di 2 e minori di 10, estremi esclusi. V F

b. L'intervallo $]-\infty; 4]$ comprende tutti i numeri minori o uguali a 4. V F

c. Un intervallo limitato è chiuso se sono compresi i due estremi. V F

d. L'insieme dei numeri minori di -5 o maggiori di 7 è l'unione di due intervalli. V F

Scrivi i seguenti intervalli con le disuguaglianze e con le parentesi quadre. Indica tutti i numeri reali che sono:

18 compresi tra -2 e 9, estremi inclusi.

19 compresi tra -4 e 5, con -4 incluso e 5 escluso.

20 positivi e minori o uguali a 4.

21 minori o uguali a -3 o maggiori di 1.

Disequazioni equivalenti

22 **ASSOCIA** ogni disequazione a quella a essa equivalente.

a. $5x - 10 > 0$ **b.** $3x + 3 > -3$ **c.** $20 - 10x > 0$ **d.** $5x > 2x$

1. $x > 0$ **2.** $x > 2$ **3.** $x < 2$ **4.** $x > -2$

23 **VERO O FALSO?** Sono equivalenti le disequazioni:

a. $x - 2x^2 < -x + 5$ e $2x^2 - 2x + 5 > 0$. V F

b. $-6b - 1 > 3$ e $6b + 1 > -3$. V F

c. $\frac{x^2+2}{x} < \frac{3}{x}$ e $x^2 + 2 < 3$. V F

d. $\frac{x+1}{x^2} > \frac{2}{x^2}$ e $x + 1 > 2$. V F

2 Disequazioni di primo grado

→ Teoria a p. 4

Disequazioni numeriche intere

Attività interattiva

24 **ASSOCIA** ogni disequazione alle sue soluzioni.

a. $x > x + 1$ **b.** $a + 2 \geq a + 2$ **c.** $-4x < 0$ **d.** $a < -a$

1.

2. $\varnothing$

3. $\mathbb{R}$

4.

25 **VERO O FALSO?** La disequazione:

a. $0x < -6$ è impossibile. V F

b. $0x > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

c. $1 - 3x \geq 1 - 3x$ è impossibile. V F

d. $2x > 2x - 3$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

26 **SPIEGA PERCHÉ** Gabriele risolve la disequazione $(1-\sqrt{3})x > 2$ ottenendo $x > \frac{2}{1-\sqrt{3}}$. Alice non è d'accordo. Perché?

Risolvi le seguenti disequazioni numeriche intere.

27 $5x - 8 > 3x - 6$ $[x > 1]$

28 $4x + 12 < 6 - 14x$ $\left[x < -\frac{1}{3}\right]$

29 $3(x-1) + x \geq 2(2+x) - 1$ $[x \geq 3]$

30 $5x - (x-2) < 4x - 7$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

31 $7x - 3 + 5(-2x+1) < 3x - 7$ $\left[x > \frac{3}{2}\right]$

32 $\frac{1}{3}x - \frac{5}{2} \leq 0$ $\left[x \leq \frac{15}{2}\right]$

33 $6 - (2x-3) < 6x + 2(9-4x)$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

34 $3 - (x+5) < 4(1-x) + 9$ $[x < 5]$

35 $-(4x-2) \geq 10 + 3(x-3)$ $\left[x \leq \frac{1}{7}\right]$

36 $x + (x+1)(x+3) < x^2 + 5 + 4x$ $[x < 2]$

37 $(1-x)^2 \leq (x+3)^2$ $[x \geq -1]$

38 $x(x-2) > (x-1)^2 + 2$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

39 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(2-x) > \frac{x-1}{6}$ $\left[x > \frac{3}{4}\right]$

40 $x(x-4) + \frac{7}{2} \leq x - x\left(\frac{3}{2} - x\right)$ $[x \geq 1]$

41 $2x\left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right] > (1-x)x$ $[x > 0]$

42 $\frac{1}{3}(x-3) - \frac{x+1}{6} \geq -2$ $[x \geq -5]$

43 $2x < \frac{1-7x}{-4}$ $[x < -1]$

44 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \geq x(x-6)$ $\left[x \geq \frac{1}{3}\right]$

45 $\frac{x-6}{1-\sqrt{3}} > \frac{3}{1-\sqrt{3}}$ $[x < 9]$

46 $\frac{2-3x}{12} - \frac{1-2x}{6} \geq \frac{x}{3} + 2x$ $[x \leq 0]$

47 $\frac{3x-2}{5} + \frac{5x-6}{15} + \frac{x-3}{10} - \frac{x-3}{30} \geq 0$ $[x \geq 1]$

48 $\frac{3-x^2}{2}+7\left(\frac{1}{2}+x\right)<\frac{1}{2}(8-x^2)$ $\left[x<-\frac{1}{7}\right]$

49 $\frac{7x(x-1)}{3}-5(x^2-2x-1)>\frac{1}{3}-8x\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}x\right)$ $\left[x>-\frac{7}{10}\right]$

50 $(x-3)(x+3)-\frac{1}{2}(3-2x)+1-7\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{7}x^2\right)<0$ $[x<20]$

51 $(2x+1)^2+3(x+1)(1-x)>(x-3)^2-5$ $[x>0]$

52 $(x-\sqrt{2})^2-(x+\sqrt{2})^2<\sqrt{2}(-4x+\sqrt{2})$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

REALTÀ E MODELLI

53 **Che colazione!** Quanti biscotti interi può mangiare al massimo Samir, insieme a 250 mL di latte, per non superare le 400 kcal? [4]

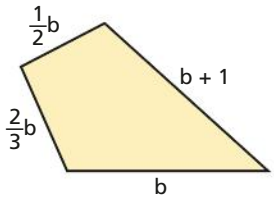
54 **Compito in classe** Un test è composto da 10 domande. Ogni risposta esatta vale un punto; per ogni risposta mancata o errata vengono tolti 0,25 punti. Quante risposte esatte bisogna dare per ottenere almeno 6 punti? [risposte esatte ≥ 7]

55 **ECONOMIA** **Lavoro in più** Un'azienda deve noleggiare un furgone supplementare. Può scegliere tra due possibilità:

- tariffa 1: 40 € al giorno (con 50 km inclusi) e 0,30 € per ogni km percorso eccedente;
- tariffa 2: 38 € al giorno (con 50 km inclusi) e 0,40 € per ogni km percorso eccedente.

Dopo quanti km percorsi in un giorno la tariffa 1 è più conveniente della tariffa 2? [dopo 70 km]

56 Determina per quali valori di b, con $b>0$, il perimetro del quadrilatero in figura è minore di 20. $[0<b<6]$



Disequazioni letterali intere

Attività interattiva

57 **VERO O FALSO?**

a. La disequazione $ax>a$ ha come soluzione $x>1$, $\forall a\in\mathbb{R}$. V F

b. La disequazione $(a-1)x>1$, se $a<1$, ha come soluzione $x<\frac{1}{a-1}$. V F

c. La disequazione $b(x+1)\geq 0$ è equivalente a $x+1\geq 0$ se $b\neq 0$. V F

d. La disequazione $k^2x<2$ è equivalente a $x<\frac{2}{k^2}$ se $k\neq 0$. V F

58 Per quali valori di k la soluzione dell'equazione $2x-3k=6-7k$ è maggiore di 1? $[k<1]$

59 Trova per quali valori di a l'equazione $ax^2-4x+2=0$ non ha soluzioni reali. $[a>2]$

60 Trova per quali valori di a l'equazione $2x^2-4x+a-5=0$ ammette soluzioni reali. $[a\leq 7]$

Studio del segno di un prodotto

Attività interattiva

SPIEGA PERCHÉ Le seguenti disequazioni hanno lo stesso insieme di soluzioni. Indica il motivo.

61 $(x+2)(x-1)>0, \quad \frac{100}{7}(x+2)(x-1)>0.$

62 $x(x+1)>0, \quad -2x(x+1)<0.$

63 $-\frac{1}{5}x(2x-1)<0, \quad \frac{1}{5}x(1-2x)<0.$

64 $(3-x)(x-5)>0, \quad (x-3)(5-x)>0.$

65 Risolvi la disequazione $-\frac{1}{2}x(x-2)(4-x)\leq 0.$

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Studiamo il segno di ognuno dei fattori, cercando i valori di x per i quali ciascun fattore è positivo:

$-\frac{1}{2}x>0 \quad \rightarrow \quad x \square 0$

$x-2>0 \quad \rightarrow \quad x > \square$

$4-x>0 \quad \rightarrow \quad \square.$

Compiliamo il quadro dei segni.

Poiché si richiede che il prodotto sia negativo o nullo, le soluzioni della disequazione sono:

$x\leq 0 \ \vee \ 2\leq x\leq 4.$

		0		2		4	
$-\frac{1}{2}x$	+	0	−		−		−
$x-2$	−		□	0	□		□
$4-x$	□		□		□	0	□
$-\frac{1}{2}x(x-2)(4-x)$	−	0	+	0	−	0	+

Risolvi le seguenti disequazioni.

66 $(x+5)(x-7)>0$ $\quad [x<-5 \vee x>7]$

67 $(x+2)(3x-1)\leq 0$ $\quad \left[-2\leq x\leq \frac{1}{3}\right]$

68 $(1-4x)(x+3)\geq 0$ $\quad \left[-3\leq x\leq \frac{1}{4}\right]$

69 $3(x-8)(2-4x)\leq 0$ $\quad \left[x\leq \frac{1}{2} \vee x\geq 8\right]$

70 $(-x-3)\left(\frac{1}{2}x-1\right)<0$ $\quad [x<-3 \vee x>2]$

71 $6x(10x+2)\leq 0$ $\quad \left[-\frac{1}{5}\leq x\leq 0\right]$

72 $5(2-7x)(-x-7)>0$ $\quad \left[x<-7 \vee x>\frac{2}{7}\right]$

73 $-\frac{1}{3}(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)>0$ $\quad \left[-2<x<\frac{1}{3}\right]$

74 $-(2x+5)(1-x)<0$ $\quad \left[-\frac{5}{2}<x<1\right]$

75 $\frac{(2x-1)(1+x)}{-2}<0$ $\quad \left[x<-1 \vee x>\frac{1}{2}\right]$

76 $(6x-4)(8-x)(10x+4)>0$ $\quad \left[x<-\frac{2}{5} \vee \frac{2}{3}<x<8\right]$

77 $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{4}+x\right)\left(\frac{1}{8}-x\right)\geq 0$ $\quad \left[-\frac{1}{4}\leq x\leq \frac{1}{8} \vee x\geq \frac{1}{2}\right]$

78 $x(x-1)(6+2x)(4x-8)<0$ $\quad [-3<x<0 \vee 1<x<2]$

3 Disequazioni di secondo grado

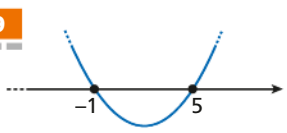
Segno di un trinomio di secondo grado

Attività interattiva

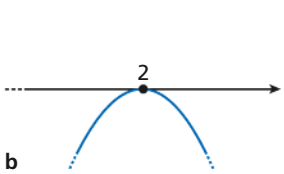
→ Teoria a p. 5

LEGGI IL GRAFICO In ogni figura è rappresentata una parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$. Indica il segno dei trinomi associati a ciascuna parabola.

79

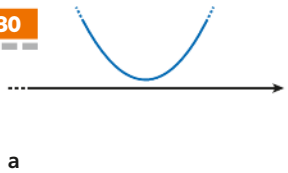


a

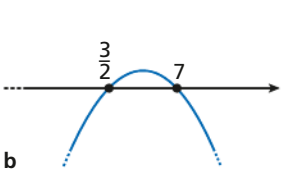


b

80



a



b

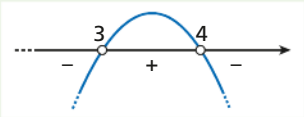
81 **ESERCIZIO GUIDA** Studiamo il segno dei seguenti trinomi di secondo grado:

a. $-x^2+7x-12$; **b.** $-x^2+10x-25$; **c.** $4x^2+x+3$.

a. Poniamo $y=-x^2+7x-12$ per ottenere l'equazione della parabola associata al trinomio. Per determinare i punti di intersezione della parabola con l'asse x, risolviamo l'equazione associata $-x^2+7x-12=0$.

$$\Delta = 49-48=1>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-7\pm 1}{-2} \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=4 \end{cases}$$

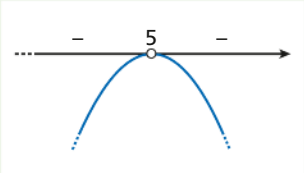
Disegniamo la parabola, che ha la concavità rivolta verso il basso perché il coefficiente di x^2 è negativo e passa per i punti (3; 0) e (4; 0). Osservando le ordinate dei punti della parabola, deduciamo dal grafico che il trinomio è positivo per $3<x<4$, negativo per $x<3 \vee x>4$ e nullo per $x=3 \vee x=4$.



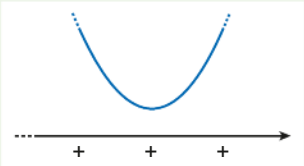
b. L'equazione associata $-x^2+10x-25=0$ ha:

$$\frac{\Delta}{4}=25-25=0 \quad \rightarrow \quad x_1=x_2=5.$$

Il coefficiente di x^2 è negativo, quindi la parabola rivolge la concavità verso il basso. Il trinomio è negativo per $x\neq 5$, nullo per $x=5$.



c. L'equazione associata $4x^2+x+3=0$ ha $\Delta=1-48=-47<0$, pertanto è impossibile. Il coefficiente di x^2 è positivo, quindi la parabola associata è rivolta verso l'alto e ha tutti i punti con ordinata positiva. Il trinomio è positivo $\forall x\in\mathbb{R}$.



Studia il segno dei seguenti trinomi di secondo grado usando il grafico della parabola associata.

82 x^2-6x+9 [positivo se $x\neq 3$]

83 $3x^2-4x+1$ [positivo se $x<\frac{1}{3} \vee x>1$]

84 $-4x^2+3x-2$ [negativo $\forall x\in\mathbb{R}$]

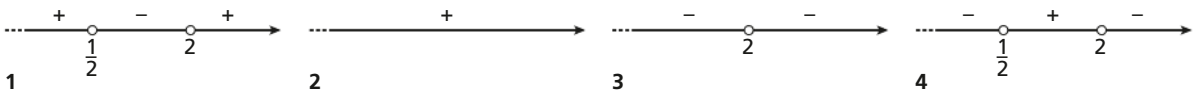
85 $-x^2+x+2$ [positivo se $-1<x<2$]

86 $-x^2-8x-7$ [positivo se $-7<x<-1$]

87 $5x^2+2x+1$ [positivo $\forall x\in\mathbb{R}$]

88 **ASSOCIA** ogni trinomio al grafico che ne rappresenta il segno.

a. $-x^2+4x-4$ **b.** $2x^2-5x+2$ **c.** x^2+4x+8 **d.** $-4x^2+10x-4$



89 **SPIEGA PERCHÉ** Per studiare il segno di $3x^2+4$ e $-x^2-5$ non serve eseguire calcoli. Perché?

Risoluzione di una disequazione di secondo grado

Attività interattiva

→ Teoria a p. 7

90 **TEST** Quale fra le seguenti disequazioni *non* è equivalente a $3x^2\leq -9x$?

A $x^2\leq -3x$ B $3x(x+3)\leq 0$ C $x\leq -3$ D $x^2+3x\leq 0$

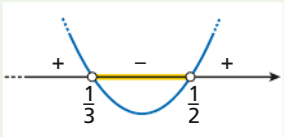
L'equazione associata ha $\Delta > 0$

91 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo la disequazione $5x(x-1)+x^2+1<0$.

Sviluppiamo i calcoli e otteniamo: $6x^2-5x+1<0$.

Risolviamo l'equazione associata $6x^2-5x+1=0$.

$$\Delta = 25-24=1>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{5\pm 1}{12} \quad \rightarrow \quad x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{1}{2}$$



Il trinomio è negativo per valori interni all'intervallo delle radici, pertanto la disequazione è verificata per

$$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

92 $3x^2-12>0$ $[x<-2 \vee x>2]$

93 $x^2+3x-18\geq 0$ $[x\leq -6 \ \vee \ x\geq 3]$

94 $x^2-2x-8\leq 0$ $[-2\leq x\leq 4]$

95 $2x^2-3x+1>0$ $\left[x<\frac{1}{2} \vee x>1\right]$

96 $3x^2+5x+2\leq 0$ $\left[-1\leq x\leq -\frac{2}{3}\right]$

97 $-2x^2+3x+2<0$ $\left[x<-\frac{1}{2} \ \vee \ x>2\right]$

98 $-x^2-6x+7>0$ $[-7<x<1]$

99 $10x^2+4x-\frac{1}{2}\leq 0$ $\left[-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{10}\right]$

100 $\frac{x^2}{3}+\frac{4}{3}x-7<0$ $[-7<x<3]$

101 $x^2-\frac{11}{2}x-3\geq 0$ $\left[x\leq -\frac{1}{2} \vee x\geq 6\right]$

102 $x(x-2)-3>0$ $[x<-1 \vee x>3]$

103 $(x+2)^2-(x+8)<0$ $[-4<x<1]$

104 **COMPLETA** la tabella con le soluzioni della disequazione indicata, considerando $f(x)=2x^2-3x-5$.

Disequazione	$f(x)>0$	$f(x)\geq 0$	$f(x)<0$	$f(x)\leq 0$
Soluzione				

105 **FAI UN ESEMPIO** Scrivi una disequazione di secondo grado la cui soluzione è $-1<x<4$ e una disequazione verificata per $x\leq -1 \vee x\geq 5$.

L'equazione associata ha $\Delta = 0$

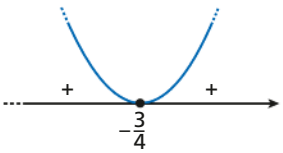
106 Risolvi la disequazione $9+8x(3+2x)\leq 0$.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Svolgiamo i calcoli e otteniamo: $\square x^2+\square x+\square \leq 0$.

Risolviamo l'equazione associata $\square = 0$:

$$\frac{\Delta}{4}=\square-\square=0 \quad \rightarrow \quad x_1=x_2=-\frac{\square}{\square}.$$



Il trinomio è positivo per ogni valore di $x\neq -\frac{\square}{\square}$ e si annulla per $x=-\frac{3}{4}$.

Pertanto l'unica soluzione della disequazione è $x=-\frac{3}{4}$.

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

107 $9x^2 - 12x + 4 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

108 $-16x^2 - 9 + 24x \leq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

109 $4x^2 + 49 > -28x$ $\left[x \neq -\frac{7}{2}\right]$

110 $4x^2 + \frac{1}{4} - 2x \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

111 $20x - 4x^2 - 25 < 0$ $\left[x \neq \frac{5}{2}\right]$

112 $-\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25 > 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

113 $x(x - 22) + 121 \leq 0$ $[x = 11]$

114 $3(4x - 3) \geq 4x^2$ $\left[x = \frac{3}{2}\right]$

115 **COMPLETA** la tabella con le soluzioni della disequazione indicata, considerando $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

Disequazione	$f(x) > 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \leq 0$
Soluzione				

L'equazione associata ha $\Delta < 0$

116 Risolvi la disequazione $5(2x + 7) < -x^2$.

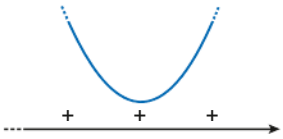
COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Sviluppiamo i calcoli e otteniamo: $\_\_\_\, x^2 + \_\_\_\, x + \_\_\_ < 0$.

Risolviamo l'equazione associata:

$\frac{\Delta}{4} = \_\_\_ - \_\_\_ = \_\_\_ < 0 \rightarrow$ equazione _____.

Il trinomio è sempre _____, pertanto la disequazione è impossibile.



Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

117 $3x^2 + 2x + 5 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

118 $\frac{1}{9}x^2 + x + 9 \leq 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

119 $x^2 + x + 7 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

120 $x(2 - x) < 6$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

121 $-x^2 - 6 > 3x$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

122 $2(x^2 + 4) < x$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

123 $x^2 - 2x > -5$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

124 $2x(1 + x) + 1 \leq x$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

125 **TEST** Solo una delle seguenti disequazioni è sempre verificata. Quale?

A $x^2 + 3x + 12 < 0$ B $9x^2 + 6x + 1 > 0$ C $-x^2 + x - 5 \leq 0$ D $x^2 - 2x + 1 > 0$

126 **FAI UN ESEMPIO** di disequazione di secondo grado verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ e di una impossibile.

Riepilogo: Disequazioni di secondo grado intere

SPIEGA PERCHÉ Risolvi le seguenti disequazioni senza fare calcoli. Descrivi il ragionamento seguito.

127 $x^2 + 3 < 0$

128 $-2x^2 \geq 0$

129 $x^2 > -5$

130 $-x^2 - 4 \geq 0$

131 $-2x^2 < 1$

132 $-3(2x - 5)^2 \geq 0$

133 $(x - 8)^2 \geq -x^2$

134 $3 \leq 5 + 2x^2$

135 $(\sqrt{2} - 2)x^2 \leq (1 + x)^2$

I FONDAMENTALI
Risolvere disequazioni di secondo grado

1

Risolviamo la disequazione $3(2-x^2)-14x \geq 1$.

- **Scriviamo la disequazione nella forma normale.**

  $-3x^2-14x+5 \geq 0$ cambiamo segno e verso

  $3x^2+14x-5 \leq 0$

  Rendiamo positivo il segno del coefficiente di x^2. Così facendo, nell'interpretazione grafica ci riconduciamo sempre al caso di parabole con la concavità rivolta verso l'alto.

- **Calcoliamo il discriminante e risolviamo l'equazione associata.**

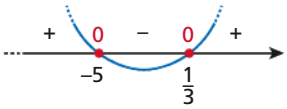
  $3x^2+14x-5=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta}{4}=49+15=64$

  $x=\frac{-7\pm 8}{3} \quad \rightarrow \quad x_1=-5, \quad x_2=\frac{1}{3}.$

  Scomporre il trinomio in fattori di primo grado e studiare il segno del prodotto non conviene: è un procedimento più lungo.

- **Studiamo il segno del trinomio con il grafico della parabola associata.**

  La parabola associata di equazione $y=3x^2+14x-5$ ha la concavità rivolta verso l'alto e interseca l'asse x nei punti di ascissa -5 e $\frac{1}{3}$.

  Con queste informazioni tracciamo il grafico semplificato della parabola. Da esso deduciamo che il trinomio $3x^2+14x-5$ è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici e negativo per valori interni.

- **Scriviamo le soluzioni.**

  La disequazione richiede che il trinomio sia negativo o nullo, quindi consideriamo le due radici e i valori interni al loro intervallo.
  Le soluzioni della disequazione sono:

  $-5 \leq x \leq \frac{1}{3}.$

136 VERO O FALSO?

a. L'equazione $x^2+6x+10=0$ è impossibile, quindi la disequazione $x^2+6x+10>0$ è impossibile. V F

b. La disequazione $-3x^2-5<0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

c. Il trinomio $x^2-8x+16$ è sempre positivo. V F

d. Il trinomio $-2x^2+5x-5$ è sempre negativo. V F

137 CACCIA ALL'ERRORE Correggi le risoluzioni delle seguenti disequazioni.

a. $x^2>0 \quad \rightarrow \quad x>0$

b. $x^2 \geq 36 \quad \rightarrow \quad x \geq \pm 6$

c. $x^2 \geq 5x \quad \rightarrow \quad x \geq 5$

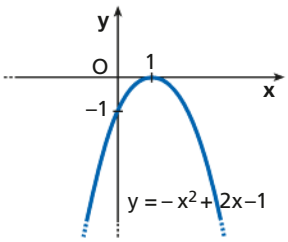
138 TEST Osservando il grafico in figura puoi dedurre che il trinomio $-x^2+2x-1$ *non* è negativo:

A $\forall x \in \mathbb{R}$.

B $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$.

C $\nexists x \in \mathbb{R}$.

D per $x=1$.



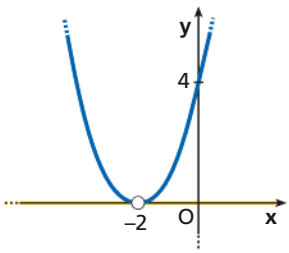
139 TEST In figura sono rappresentate le soluzioni di *una sola* fra le seguenti disequazioni. Quale?

A $x^2+2x>0$

B $x^2-2x<0$

C $x^2+4x+4>0$

D $2x^2+4>0$



140 **COMPLETA**

a. $x^2 \square 7 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. $x^2 \square 1 < 0$ per $-1 < x < 1$.

c. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ per $\square$.

d. $-x^2 + 2x - 10 > 0$ per $\square$.

e. $x^2 \square 9 < 0$ per nessun valore di x.

f. $-x^2 + 4x - 3 \square 0$ per $1 \leq x \leq 3$.

141 **SPIEGA PERCHÉ** Risolvi senza svolgere calcoli le seguenti disequazioni e descrivi il ragionamento seguito.

a. $-5 - (x+1)^2 \geq 0$;

b. $(x-3)^2 \geq -2$;

c. $8x^2 \geq -(x+2)^2$;

d. $(x-4)^2 + 2(x-1)^2 > 0$;

e. $(x-3)^2 + x^2 \geq -4$;

f. $-(3x-1)^2 \geq 0$.

Risolvi le seguenti disequazioni.

142 $9x^2 + 64 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

143 $x^2 + 9x \leq 0$ $[-9 \leq x \leq 0]$

144 $-\frac{1}{4}x^2 \leq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

145 $-x^2 + 9 \leq 0$ $[x \leq -3 \vee x \geq 3]$

146 $4x^2 + 4x + 9 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

147 $-x^2 + 8x \geq 0$ $[0 \leq x \leq 8]$

148 $-x^2 + 1 > 0$ $[-1 < x < 1]$

149 $5x^2 + 9x - 2 \geq 0$ $\left[x \leq -2 \vee x \geq \frac{1}{5}\right]$

150 $-x^2 + 14x - 49 < 0$ $[x \neq 7]$

151 $-2x^2 + 7x - 3 < 0$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > 3\right]$

152 $4x^2 + 12x + 5 < 0$ $\left[-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}\right]$

153 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \leq 0$ $[x = \sqrt{2}]$

154 $9x^2 - 2x + \frac{1}{4} \leq 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

155 $3x^2 + 4x + \frac{4}{3} > 0$ $\left[x \neq -\frac{2}{3}\right]$

156 $-x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \leq 0$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 2\right]$

157 $x^2 - 1 > \frac{15}{4}x$ $\left[x < -\frac{1}{4} \vee x > 4\right]$

158 $-4x(x-1) > 1$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

159 $x(x-2) + 7 > -2x$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

160 $(1-3x)(1+3x) < 7x + 1$ $\left[x < -\frac{7}{9} \vee x > 0\right]$

161 $-x(x-4) < 3$ $[x < 1 \vee x > 3]$

162 $\frac{1}{2}(x-1) \leq x^2 - x$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1\right]$

163 $3(x^2+3) > x(12-x)$ $\left[x \neq \frac{3}{2}\right]$

164 $3x(x-1) + (x^2+1) < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

165 $2(x^2+1) < 5x$ $\left[\frac{1}{2} < x < 2\right]$

166 $16(x^2+1) < 40x + 7$ $\left[\frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}\right]$

167 $2(x-1)(x+3) \geq 0$ $[x \leq -3 \vee x \geq 1]$

168 $(x-4)^2 \leq 9$ $[1 \leq x \leq 7]$

169 $(x-2)(x+2) > 5x - 4$ $[x < 0 \vee x > 5]$

170 $3\left(\frac{2}{3} - x\right)(x+4) \geq 0$ $\left[-4 \leq x \leq \frac{2}{3}\right]$

171 $8(x^2 + 2 - x) < x(16 - x)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

172 $2x(x+1) - (x^2+1) < 2x^2$ $[x \neq 1]$

173 $4(x^2-1) + (x+1)(x-3) < 0$ $\left[-1 < x < \frac{7}{5}\right]$

174 $3x(x-1) \leq 2x(x-2) - 6$ $[-6 \leq x \leq -1]$

175 $(x+3)^2 + 12(2-x) > 3(3-4x)$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

176 $\frac{3(x^2+1)}{2} - 1 \geq 2x(2x-1)$ $\left[-\frac{1}{5} \leq x \leq 1\right]$

177 $\frac{x(x+3)}{3} + \frac{x(2x-1)}{2} > -\frac{3}{2}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

178 $2x(x+1) + 4(x-2) + 3(1-3x) > 0$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{5}{2}\right]$

179 $(2x-7)(2x+7) + 5x - 11 \geq 3x(x-2) - 18$ $[x \leq -14 \vee x \geq 3]$