# CAPITOLO 12
# FUNZIONI GONIOMETRICHE

T TEORIA

### Angoli a New York

È possibile calcolare la lunghezza o l'altezza di oggetti molto lontani da noi, misurando alcuni angoli e alcune distanze vicine a noi. Questo ha contribuito a perfezionare sempre di più gli strumenti per la misurazione degli angoli, i goniometri. Ce ne sono di tutti i tipi: manuali, laser, elettronici ad alta precisione. Hanno nomi specifici a seconda dei dispositivi che utilizzano (universale, con nonio, con alidada...) o dei tipi di angolo che misurano (azimutali, ecclimetri, teodoliti...).

**Sei a New York e hai a disposizione solo un goniometro di precisione e un metro a nastro. Riesci a calcolare l'altezza della Statua della Libertà?**

→ La risposta a pag. 706

## 1 Misura degli angoli

La **trigonometria** ha lo scopo di studiare i procedimenti di calcolo che permettono di determinare, con l'approssimazione che si vuole, la misura degli elementi di un triangolo (lati e angoli), noti alcuni di essi.
Trova applicazione, in particolare, in astronomia, meccanica, navigazione aerea e marittima, topografia. «Trigonometria» deriva dal greco *trígōnos*, che significa «triangolo», e *métron*, ossia «misura».
Lo studio della trigonometria è preceduto da quello della **goniometria**, ossia di quella parte della matematica che si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni.

### Misura in gradi

→ Esercizi a p. 725

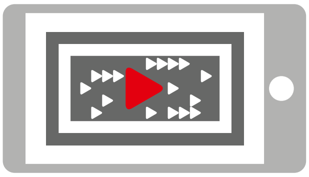
Nel *sistema sessagesimale*, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360ª parte dell'angolo giro.

Il grado sessagesimale viene indicato con $1° = \frac{1}{360}$ dell'angolo giro.

Il grado è suddiviso in 60 *primi*, che vengono indicati con un apice ($'$): $1° = 60'$.

Ogni primo viene suddiviso in 60 *secondi*, indicati con due apici ($''$): $1' = 60''$.

Queste suddivisioni in 60 parti danno il nome al sistema di misura.



Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo

▸ Calcola la somma di 30°24′35″ e 59°35′25″. È più o meno di un angolo retto?

▸ Calcola:

**a.** 25°12′37″ + 13°51′41″;

**b.** 180° − 5°3′2″;

**c.** 9°30′50″ · 3.

**Animazione** nell'eBook

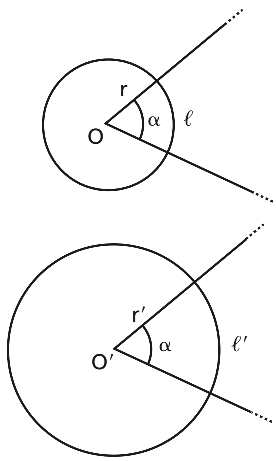
Un angolo di 32 gradi, 10 primi e 47 secondi viene scritto: 32° 10′ 47″.

Il sistema di misura degli angoli con gradi, primi e secondi è il più antico. Risale ai Babilonesi (2000 a.C.), i quali dividevano anche l'anno solare in 360 giorni. Tuttavia, questo sistema presenta il problema di non basarsi su un sistema decimale e di avere quindi procedimenti di calcolo più complicati.
Anche soltanto il calcolo della somma o della differenza delle misure di due angoli non è immediato, come puoi vedere nell'animazione nell'eBook e negli esercizi.

Le calcolatrici scientifiche usano anche il sistema **sessadecimale**, in cui accanto ai gradi si usano decimi, centesimi, millesimi, … di grado. Per esempio, nel sistema sessadecimale, 37,25° significa $37° + \left(\frac{2}{10}\right)^{\circ} + \left(\frac{5}{100}\right)^{\circ}$.

## Misura in radianti

→ Esercizi a p. 726




Per semplificare i calcoli si usa il sistema che ha per unità di misura il radiante.
Per definirlo, consideriamo due circonferenze di raggi $r$ e $r'$ e i due archi $l$ e $l'$ su cui insistono angoli al centro della stessa ampiezza α (figura a lato).
Dalla proporzionalità fra archi e angoli al centro otteniamo

$$l : \alpha° = 2\pi r : 360° \quad \text{e} \quad l' : \alpha° = 2\pi r' : 360°,$$

$$l = \frac{\alpha°\pi}{180°}r \quad \text{e} \quad l' = \frac{\alpha°\pi}{180°}r',$$ dividiamo membro a membro

$$l : l' = r : r' \quad \to \quad l : r = l' : r' \quad \to \quad \frac{l}{r} = \frac{l'}{r'},$$

cioè gli archi sono proporzionali ai rispettivi raggi e il rapporto $\frac{l}{r}$ non varia al variare della circonferenza, ma dipende solo dall'angolo al centro α.
Pertanto, se ogni volta che si misura un arco $l$ si usa come unità di misura il raggio della circonferenza cui appartiene, si ottiene un numero che non dipende dalla circonferenza considerata, ma solo dall'angolo α che sottende l'arco.
Il rapporto $\frac{l}{r}$ viene quindi assunto come misura, in radianti, dell'angolo α,

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

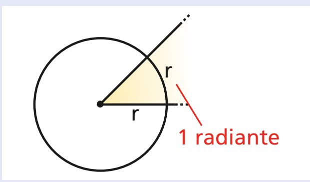
Come definizione di radiante possiamo allora dare la seguente.

**Listen to it**

A **radian** is the measure of the angle at the centre of a circle that intercepts an arc whose length is equal to the radius of the circle.

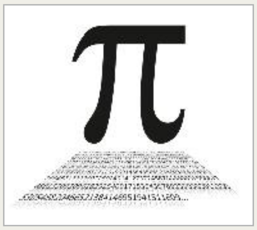
**DEFINIZIONE**

Data una circonferenza, chiamiamo **radiante** l'angolo al centro che insiste su un arco di lunghezza uguale al raggio.




**MATEMATICA E STORIA**

▸ **L'inafferrabile pi greco**



● Perché π affascina tanto i matematici?

**Risposta**

L'unità di misura viene indicata con rad, ma generalmente, se si esprime un angolo in radianti, si è soliti trascurare l'indicazione dell'unità di misura.

Poiché corrisponde all'intera circonferenza, l'angolo giro misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

L'angolo piatto, che corrisponde a metà circonferenza, misura π, l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ ecc.

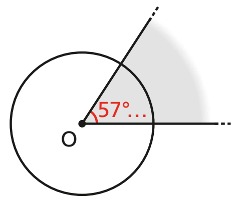
### Dai gradi ai radianti e viceversa

Date le misure di un angolo $\alpha$ in gradi e in radianti, valgono la proporzione e le seguenti uguaglianze.

$$\boldsymbol{\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi} \quad \rightarrow \quad \alpha^\circ = \alpha_{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \qquad \alpha_{rad} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

**ESEMPIO**

1. A quanti gradi corrisponde 1 radiante?
Applichiamo la prima formula:
$$\alpha^\circ = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57^\circ.$$




2. A quanti radianti corrispondono 60°?
Applichiamo la seconda formula:
$$\alpha_{rad} = \cancel{60}^{\,1\,\circ} \cdot \frac{\pi}{\cancel{180^\circ}_{\,3}} = \frac{\pi}{3}.$$

> Trasforma:
> **a.** in radianti le misure di 10°, 18°, 270°;
> **b.** in gradi sessagesimali le misure di $\frac{\pi}{9}$, 2, $\frac{3}{4}\pi$.
>
> **Animazione** nell'eBook

Riportiamo in una tabella le misure in radianti e in gradi di alcuni angoli.

**Misure degli angoli**

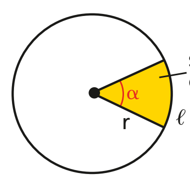
| **Gradi** | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Radianti** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ |

### Lunghezza di un arco di circonferenza

Dalla relazione $\alpha = \frac{l}{r}$ ricaviamo che la **lunghezza di un arco** è:

$l = \alpha r$, con $\alpha$ misurato in radianti.

### Area del settore circolare




Esprimiamo anche l'area di un settore circolare.

Dalla proporzione: $\quad A_{settore} : A_{cerchio} = \alpha : 2\pi,$

ricaviamo: $\quad A_{settore} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot A_{cerchio} = \frac{\alpha}{2\cancel{\pi}} \cancel{\pi} r^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2,$

o, tenendo conto che $\alpha = \frac{l}{r}$: $\quad A_{settore} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{r} r^2 = \frac{1}{2} lr.$

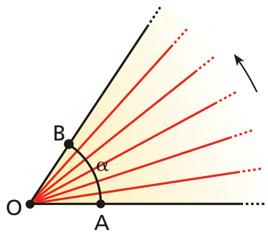
## Angoli orientati

→ Esercizi a p. 729

La definizione di angolo come parte di piano delimitata da due semirette con l'origine in comune non è adatta per descrivere tutte le situazioni. Per esempio, nell'avvitare o svitare una vite si descrive un angolo che può essere maggiore di un angolo giro.

È più utile quindi collegare il concetto di angolo a quello di *rotazione*, cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

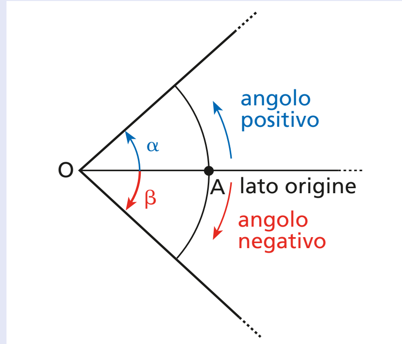
La rotazione è univoca quando ne specifichiamo il **verso**, **orario** o **antiorario**.



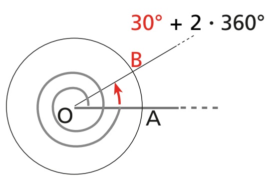

Consideriamo la semiretta $OA$ che ruota in senso antiorario intorno al vertice $O$, fino a sovrapporsi alla semiretta $OB$, generando l'angolo $\alpha = A\widehat{O}B$. La semiretta $OA$ si chiama **lato origine** dell'angolo α, la semiretta $OB$ si chiama **lato termine**.

**DEFINIZIONE**

Un **angolo** è **orientato** quando sono stati scelti uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.
Un angolo orientato è **positivo** quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; è **negativo** quando la rotazione è in senso orario.




Un angolo orientato può anche essere maggiore di un angolo giro.




**ESEMPIO**

Poiché $750° = 30° + 2 \cdot 360°$, l'angolo di 750° si ottiene con la rotazione della semiretta $OA$ di due giri completi e di altri 30°.

È possibile scrivere in forma sintetica un qualunque angolo α, minore di un angolo giro, e tutti gli infiniti angoli orientati che da α differiscono di un multiplo dell'angolo giro nel seguente modo:

$$\text{in gradi: } \alpha + k360°, \text{ con } k \in \mathbb{Z}; \quad \text{in radianti: } \alpha + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Quando $k = 0$, otteniamo l'angolo α.
Nel seguito, in espressioni del tipo $\alpha + 2k\pi$, sottintenderemo che $k$ è un numero intero, senza scrivere esplicitamente $k \in \mathbb{Z}$.

> Scrivi in gradi la misura di almeno 4 angoli che si possono ottenere dall'espressione $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, per particolari valori di $k$.

**ESEMPIO**

La scrittura $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ indica gli angoli: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{\pi}{4} \pm 4\pi, \frac{\pi}{4} \pm 6\pi, \ldots$

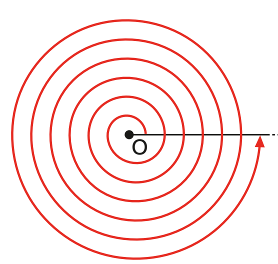
**ESEMPIO Gira e svita**

Uno svitatore sotto sforzo compie circa 180 giri al minuto.
Per svitare una vite impiega 2 secondi.

► Qual è l'angolo, in gradi e in radianti, descritto dalla punta dello svitatore per svitare la vite?

Per trovare il numero dei giri fatti dalla punta in 2 secondi dobbiamo risolvere la proporzione:

$$\underbrace{180}_{\text{giri al minuto}} : \underbrace{60}_{\text{1 minuto = 60 secondi}} = x : 2 \rightarrow x = \frac{\cancel{180}^{3} \cdot 2}{\cancel{60}} = 6.$$



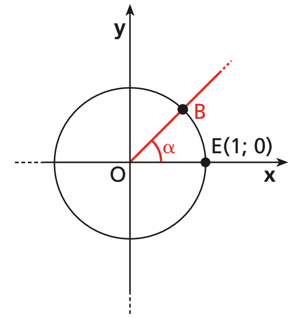

In 2 secondi i giri sono 6.
Un giro equivale a un angolo di 360°, o $2\pi$, quindi $6 \cdot 360° = 2160°$, o $12\pi$.

## Circonferenza goniometrica

Nel piano cartesiano, per **circonferenza goniometrica** intendiamo la circonferenza che ha come centro l'origine $O$ degli assi e raggio di lunghezza 1, ossia la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Il punto $E(1; 0)$ si dice **origine degli archi**.

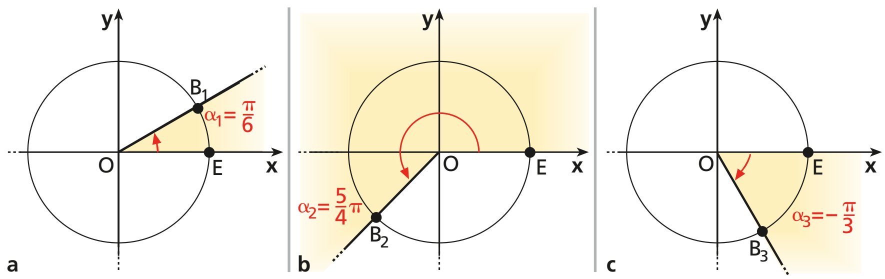
Usando la circonferenza goniometrica, si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse $x$. In questo modo, a ogni angolo corrisponde un punto di intersezione $B$ fra la circonferenza e il lato termine.




**ESEMPIO**

Rappresentiamo gli angoli $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \frac{5}{4}\pi$, $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$.

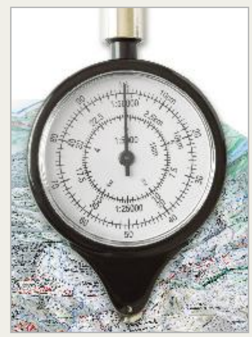
Essi individuano sulla circonferenza i punti $B_1$, $B_2$ e $B_3$ della figura.




Osserviamo che nella circonferenza goniometrica, essendo la lunghezza di un arco $l = \alpha r$ e $r = 1$, se l'angolo $E\hat{O}B$ è misurato in radianti, la misura della lunghezza dell'arco $\widehat{EB}$ è uguale alla misura di $E\hat{O}B$.

**MATEMATICA E TOPOGRAFIA**

**Rotolare per misurare**



- Come si misura con precisione la lunghezza di una strada?

**Risposta**

# 2 Funzioni seno e coseno

→ Esercizi a p. 730

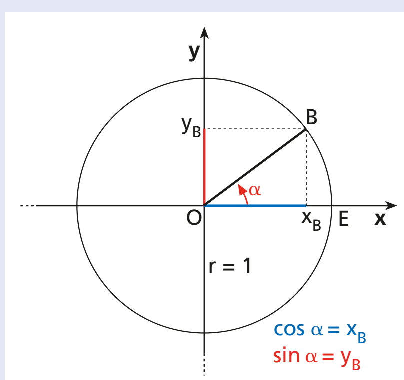
Introduciamo alcune **funzioni goniometriche** che alla misura dell'ampiezza di ogni angolo associano un numero reale.

**DEFINIZIONE**

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato $\alpha$, e sia $B$ il punto della circonferenza associato ad $\alpha$.

Definiamo **coseno** e **seno** dell'angolo $\alpha$, e indichiamo con $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$, le funzioni che ad $\alpha$ associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa e quello dell'ordinata del punto $B$:

$$\cos\alpha = x_B, \qquad \sin\alpha = y_B.$$



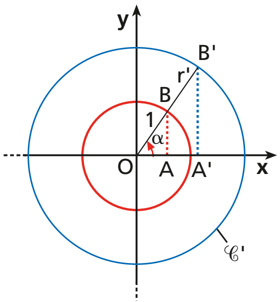

**Listen to it**

Let $\alpha$ be an oriented angle and $B$ its associated point on the unit circle. The trigonometric functions **cosine** and **sine** are defined as follows:

$\cos\alpha = x_B$, $\sin\alpha = y_B$.

Consideriamo una circonferenza $\mathscr{C}'$ con centro $O$ e raggio qualsiasi $r' \neq 1$.

Prendiamo un angolo $\alpha$ appartenente al primo quadrante individuato dal punto $B$




sulla circonferenza goniometrica. Su $\mathscr{C}'$ il punto corrispondente ad $\alpha$ sia $B'$. Dalla similitudine dei triangoli $OBA$ e $OB'A'$ deduciamo:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \cos\alpha, \qquad \frac{\overline{B'A'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} = \sin\alpha.$$

I due rapporti, e quindi sin α e cos α, non dipendono dalla particolare circonferenza considerata, ma esclusivamente dall'angolo α.

Osserviamo inoltre che sin α e cos α sono numeri puri, perché rapporti di grandezze omogenee, quindi non hanno alcuna unità di misura.

Consideriamo ora un triangolo rettangolo $OAB$. Possiamo pensare all'ipotenusa $OB$ come al raggio di una circonferenza di centro $O$, quindi il seno di α è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa, il coseno di α è uguale al rapporto fra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa.

**Animazione** nell'eBook

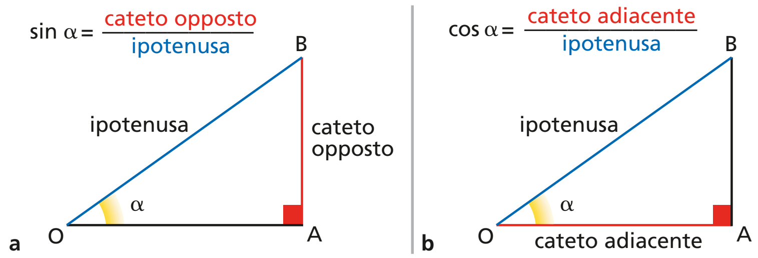
**Funzione seno**

**Animazione** nell'eBook

**Funzione coseno**

Nelle due animazioni trovi figure dinamiche per studiare:

- i grafici delle due funzioni;
- i loro domini e insiemi immagine;
- la periodicità;
- seno e coseno nei triangoli rettangoli.



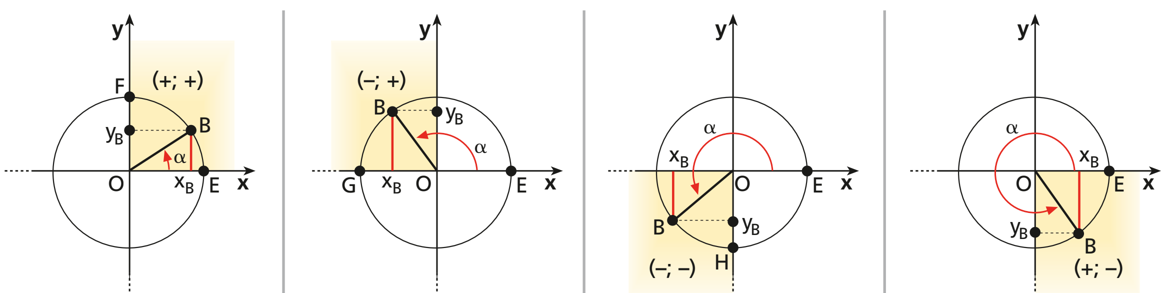

## Variazioni delle funzioni seno e coseno

Seno e coseno di un angolo α sono funzioni che hanno come **dominio** ℝ, perché per ogni valore dell'angolo $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno e un solo punto $B$ sulla circonferenza goniometrica.

Supponiamo che un punto $B$ percorra l'intera circonferenza goniometrica, a partire da $E$, in verso antiorario.

Se $\alpha = E\widehat{O}B$, come variano sin α e cos α al variare della posizione di $B$?

Basta osservare che cosa succede all'ascissa di $B$ (ossia il coseno dell'angolo α) e alla sua ordinata (ossia il seno).




**a.** Finché $B$ percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa $x_B$ e la sua ordinata $y_B$ sono positive. Man mano che $B$ si avvicina al punto $F$, l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta. In $F$, $x_F = 0$, $y_F = 1$.

**b.** Quando $B$ percorre la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Mentre $B$ si avvicina a $G$, sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono. In $G$, $x_G = -1$, $y_G = 0$.

**c.** Se $B$ si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano che $B$ si avvicina a $H$, l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce. In $H$, $x_H = 0$, $y_H = -1$.

**d.** Quando $B$ percorre l'ultimo quarto di circonferenza, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a $E$, sia l'ascissa sia l'ordinata di $B$ aumentano. In $E$, $x_E = 1$, $y_E = 0$.

Qualunque sia la posizione di $B$ sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra $-1$ e 1, quindi:

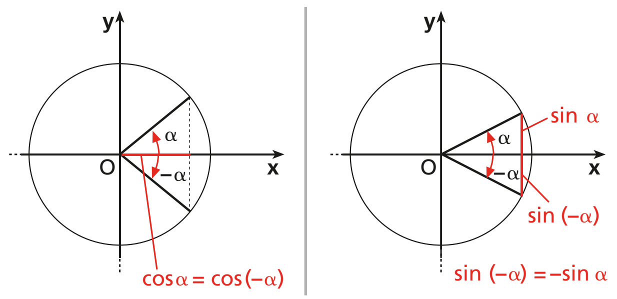
$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

L'insieme immagine delle funzioni seno e coseno è quindi $[-1; 1]$.

Poiché $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, allora il coseno è una funzione **pari**, mentre, essendo

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

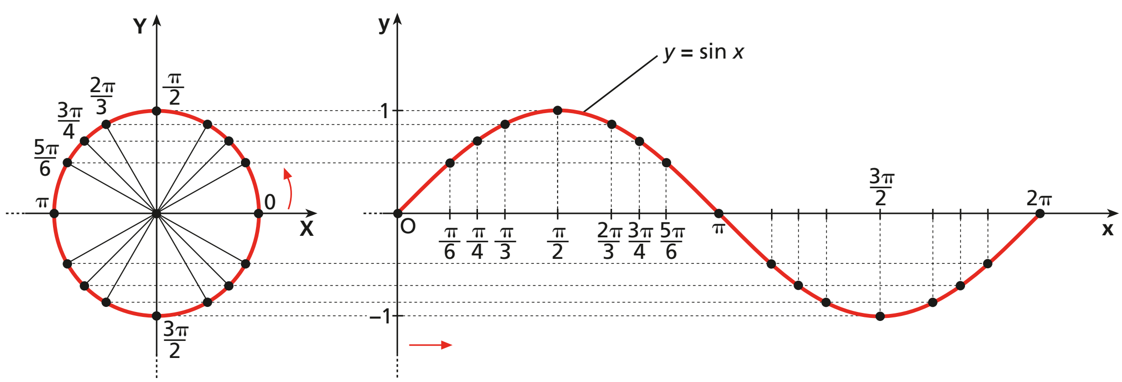
il seno è una funzione **dispari**.



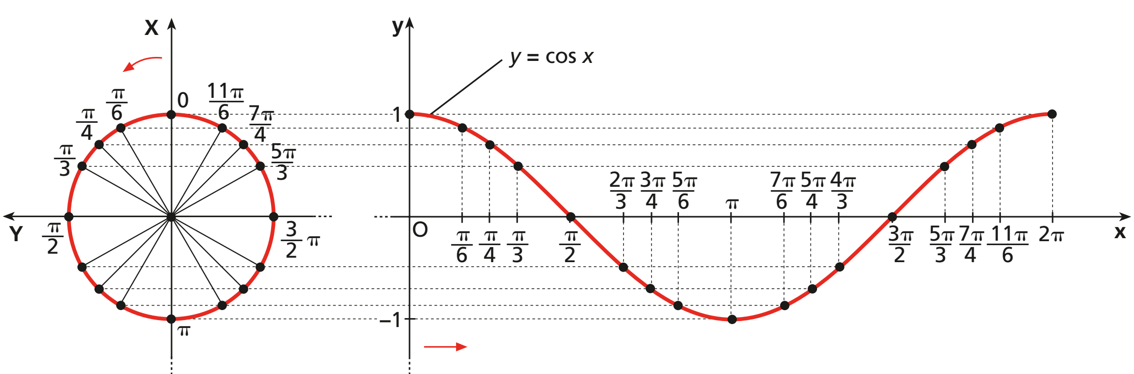

T TEORIA

## Grafici delle funzioni $y = \sin x$, $y = \cos x$

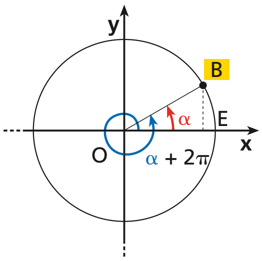
Per costruire il grafico della funzione $y = \sin x$ in $[0; 2\pi]$ riportiamo sull'asse $x$ i valori degli angoli e, in corrispondenza, sull'asse $y$ le ordinate dei punti $B$ corrispondenti sulla circonferenza goniometrica.




Procediamo analogamente, per ottenere il grafico della funzione $y = \cos x$ in $[0; 2\pi]$. In questo caso, tuttavia, essendo il coseno l'*ascissa* del punto $B$, ruotiamo la circonferenza goniometrica di 90°. Riportiamo poi sulle ordinate di un piano cartesiano le ascisse dei punti $B$ della circonferenza goniometrica in corrispondenza degli angoli.



### Periodo delle funzioni seno e coseno




Dopo aver percorso un giro completo, il punto $B$ può ripetere lo stesso movimento quante volte si vuole.

Le funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ assumono di nuovo gli stessi valori ottenuti al «primo giro», ossia:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots$$

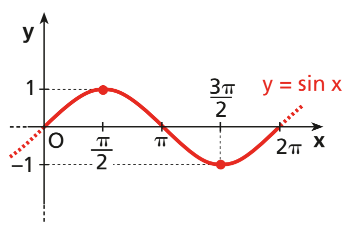
Sappiamo che, in generale, una funzione $y = f(x)$ è detta **periodica** di periodo $p$ (con $p > 0$) se per ogni $x$ e per qualsiasi numero $k$ intero si ha $\boldsymbol{f(x) = f(x + kp)}$.

Le funzioni seno e coseno sono quindi periodiche di periodo $2\pi$ e possiamo scrivere, in modo sintetico:

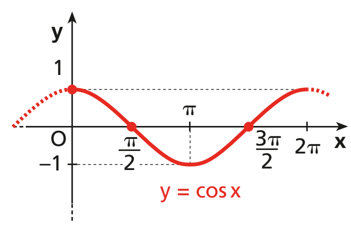
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

### Sinusoide e cosinusoide

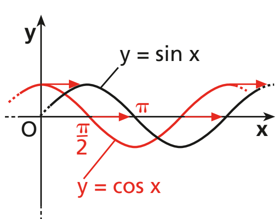
Il grafico completo della funzione seno si chiama **sinusoide**, quello della funzione coseno **cosinusoide**. Le funzioni sono periodiche di periodo $2\pi$, quindi i grafici si ottengono ripetendo ogni $2\pi$ i grafici relativi all'intervallo $[0; 2\pi]$.




Periodo: $2\pi$



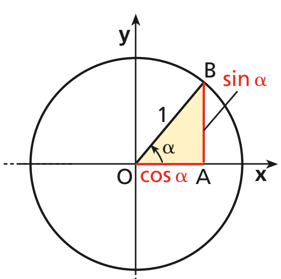

Periodo: $2\pi$




I grafici delle due funzioni sono sovrapponibili con una traslazione di vettore parallelo all'asse $x$ e di modulo $\frac{\pi}{2}$.

### In sintesi

| $y = \sin x$ | $y = \cos x$ |
|---|---|
| Dominio: $\mathbb{R}$. | Dominio: $\mathbb{R}$. |
| Insieme immagine: $[-1; 1]$. | Insieme immagine: $[-1; 1]$. |
| Funzione dispari: il grafico è simmetrico rispetto all'origine. | Funzione pari: il grafico è simmetrico rispetto all'asse $y$. |




### Prima relazione fondamentale

Poiché il punto $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$ appartiene alla circonferenza goniometrica, le sue coordinate soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$:

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$ prima relazione fondamentale della goniometria

La relazione esprime il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $OAB$.

Da questa relazione è possibile ricavare sin α conoscendo cos α e viceversa. Infatti, se è noto cos α, si ha $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Viceversa, se si conosce sin α, si ha $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

### Come utilizzare la calcolatrice scientifica

Utilizzare la calcolatrice scientifica per calcolare il seno, il coseno o la tangente di un angolo può portare a risultati errati se la calcolatrice non è stata impostata correttamente.
È importante scegliere con quale unità di misura si vuole inserire l'angolo.
Se vogliamo calcolare il seno, il coseno o la tangente di un angolo espresso in gradi sessadecimali, sullo schermo della calcolatrice deve essere presente la scritta **DEG**.
Se invece l'angolo è espresso in radianti, la calcolatrice deve essere impostata su **RAD**.

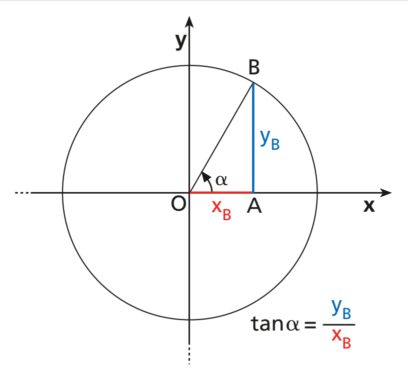
# 3 Funzione tangente

### Tangente di un angolo

→ Esercizi a p. 735

**DEFINIZIONE**
Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo $B$ l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica di centro $O$. Definiamo **tangente** di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa dal punto $B$:

$$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$




**Listen to it**
For an oriented angle $\alpha$ and its associated point $B$ on the unit circle, the **tangent** function is defined as
$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_B}$.
We exclude from the domain
$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Il rapporto $\frac{y_B}{x_B}$ *non esiste* quando $x_B = 0$, ossia quando $B$ si trova sull'asse $y$ e l'angolo è uguale a $\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3}{2}\pi$ o a un altro valore che ottieni da $\frac{\pi}{2}$ aggiungendo multipli interi dell'angolo piatto. Quindi la tangente esiste solo se:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

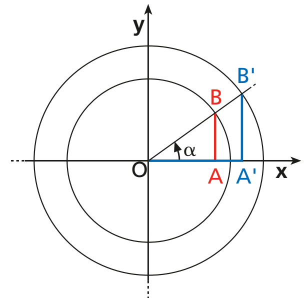
Consideriamo ancora la circonferenza goniometrica, un suo punto $B(x_B; y_B)$, la sua proiezione $A$ sull'asse $x$ e l'angolo orientato $A\widehat{O}B = \alpha$.
Anche in questo caso, come per il seno e il coseno, si può dimostrare che il rapporto $\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$, e di conseguenza $\frac{y_B}{x_B}$, dipende solo dall'angolo α e non varia se cambiamo il raggio della circonferenza.

Infatti, considerata una seconda circonferenza di raggio $OB'$, i triangoli $OAB$ e$OA'B'$ sono simili, quindi vale la proporzione

$$\overline{AB} : \overline{OA} = \overline{A'B'} : \overline{OA'},$$

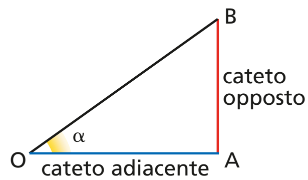
ossia:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \tan\alpha.$$



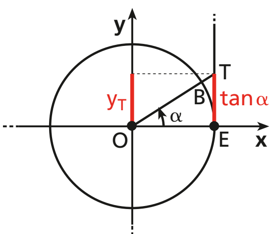

Pertanto, il rapporto considerato non dipende dalla particolare circonferenza scelta, bensì solo dall'angolo.

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

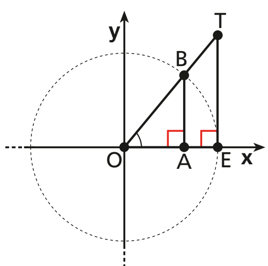



Anche $\tan\alpha$ è un numero puro, essendo un rapporto tra grandezze omogenee.
Consideriamo il triangolo rettangolo $OAB$.
Possiamo pensare l'ipotenusa $OB$ come raggio di una circonferenza di centro $O$.
Pertanto la tangente di $\alpha$ è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo $\alpha$ e il cateto adiacente.

## Un altro modo di definire la tangente




Consideriamo la circonferenza goniometrica, la retta tangente a essa nel punto $E$, origine degli archi, e un angolo $\alpha$. Il prolungamento del lato termine $OB$ interseca la retta tangente nel punto $T$. La tangente di $\alpha$ può anche essere definita come il valore dell'ordinata di $T$: $\tan\alpha = y_T$.
Dimostriamo che le due definizioni date sono equivalenti.



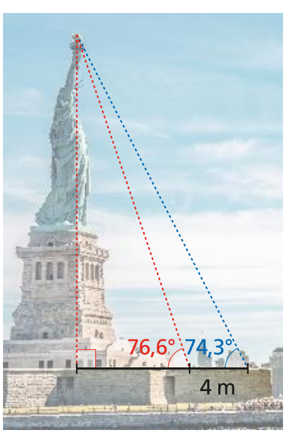

**DIMOSTRAZIONE**

I triangoli rettangoli $OAB$ e $OET$ sono simili, quindi:

$$\overline{TE} : \overline{BA} = \overline{OE} : \overline{OA} \quad \to \quad y_T : y_B = 1 : x_B \quad \to \quad y_T = \frac{y_B}{x_B} \quad \to$$

$$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_B} = y_T.$$

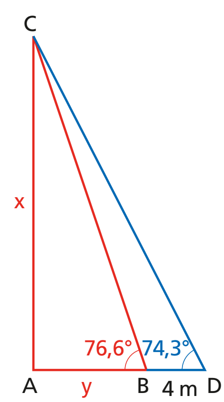
Vediamo con un esempio come è possibile misurare l'altezza di una costruzione molto alta utilizzando la funzione tangente.




**ESEMPIO Con il metro e il goniometro**

Hai a disposizione le misure indicate in figura.

► Qual è l'altezza della Statua della Libertà?




Schematizziamo il problema. Essendo

$$\overline{AD} = \overline{AB} + 4,$$

poniamo $\overline{AC} = x$ e $\overline{AB} = y$.

Nel triangolo $ABC$ è

$$\frac{x}{y} = \tan 76{,}6° \underset{\text{con la calcolatrice}}{\simeq} 4{,}20,$$

mentre nel triangolo $ADC$ è: $\dfrac{x}{y+4} = \tan 74{,}3° \simeq 3{,}56$.

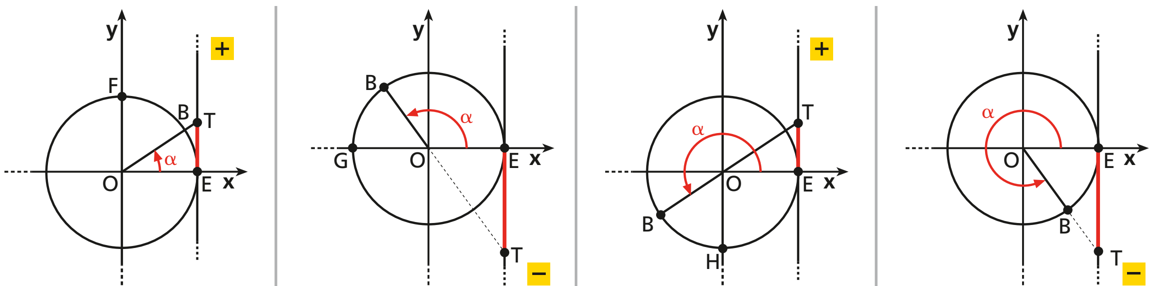
Impostiamo e risolviamo il sistema.

$$\begin{cases} x = 4,20y \\ x = 3,56(y+4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4,20y \\ 4,20y = 3,56(y+4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 93,45 \\ y = 22,25 \end{cases}$$

La Statua della Libertà è alta circa 93 m.

## Variazioni della funzione tangente

Studiamo come varia $y_T$ al variare dell'angolo $\alpha$.




**a.** Finché $B$ percorre il primo quarto di circonferenza, l'ordinata di $T$ è positiva e aumenta man mano che $B$ si avvicina al punto $F$. Quando $B \equiv F$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e la tangente non esiste.

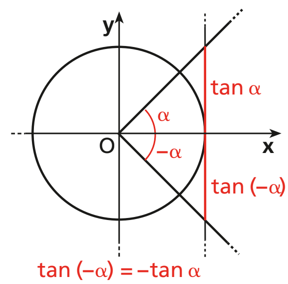
**b.** Quando $B$ percorre la circonferenza nel secondo quadrante, l'ordinata $T$ è negativa e aumenta fino a quando $B \equiv G$, in cui $y_T = 0$.

**c.** Se $B$ si trova nel terzo quadrante, l'ordinata di $T$ è di nuovo positiva e aumenta fino a quando $B \equiv H$ e $T$ non esiste più. La tangente di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste.

**d.** Quando $B$ percorre l'ultimo quarto di circonferenza, l'ordinata di $T$ ritorna negativa e aumenta fino allo 0.

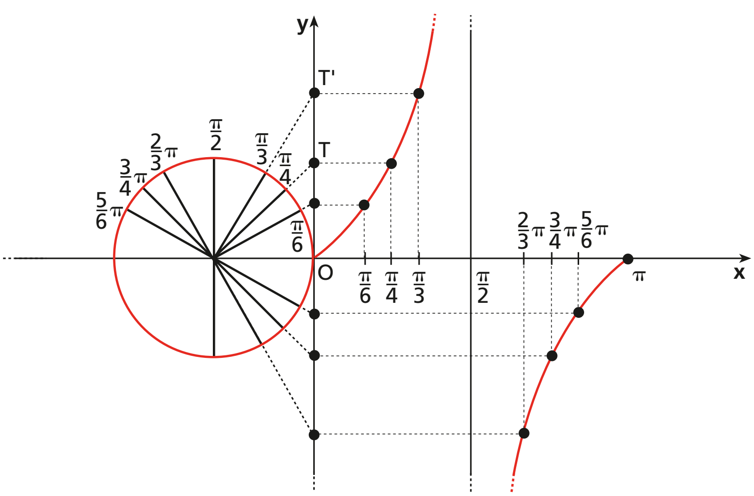
A differenza delle funzioni seno e coseno, la funzione tangente può assumere qualunque valore reale. Il suo insieme immagine è quindi $\mathbb{R}$, mentre, come abbiamo visto, il suo dominio è: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Essendo $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, la tangente è una funzione dispari.




## Grafico della funzione $y = \tan x$

Tracciamo il grafico della funzione $y = \tan x$ nell'intervallo $[0; \pi]$, riportando sull'asse $x$ i valori degli angoli e sull'asse $y$ le ordinate dei punti corrispondenti sulla retta tangente.




**Animazione** nell'eBook

L'animazione studia i due modi di definire la tangente e, con una figura dinamica, ti permette di vedere il suo grafico al variare dell'angolo fra 0 e $2\pi$.

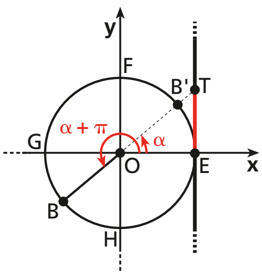
Notiamo come, man mano che $x$ si avvicina a $\frac{\pi}{2}$:

- «da sinistra», cioè assumendo valori minori di $\frac{\pi}{2}$, i valori della funzione crescono sempre di più; diremo che $\tan x \to +\infty$ per $x$ che tende a $\frac{\pi}{2}^-$ e scriveremo $\tan x \to +\infty$ per $x \to \frac{\pi}{2}^-$;
- «da destra», cioè assumendo valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, i valori della funzione decrescono sempre di più, ovvero $\tan x \to -\infty$ per $x \to \frac{\pi}{2}^+$.

Il grafico della tangente, per valori di $x$ che si approssimano a $\frac{\pi}{2}$, si avvicina sempre più alla retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$, detta **asintoto verticale** del grafico.

TEORIA

## Periodo della funzione tangente

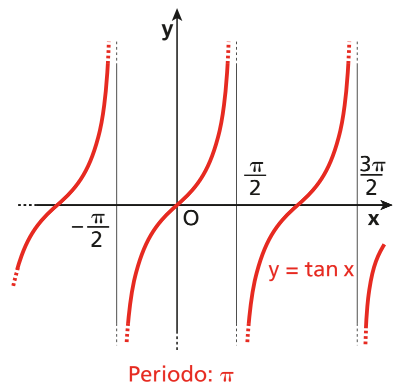



La tangente è una funzione periodica di periodo $\pi$, cioè, qualunque sia l'angolo $\alpha$ del dominio, è:

$$\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Questo si può vedere usando la definizione di tangente (figura a sinistra).

Il grafico completo della tangente si chiama **tangentoide**. Ha infiniti asintoti verticali: le rette di equazioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.




### In sintesi

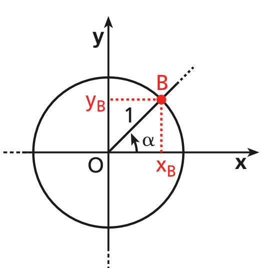
La funzione $y = \tan x$ ha per dominio $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e insieme immagine $\mathbb{R}$, ossia:

$$\tan x\colon \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}.$$

Ha infiniti asintoti verticali di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

È una funzione dispari, quindi è simmetrica rispetto all'origine.

## Seconda relazione fondamentale




Consideriamo la circonferenza goniometrica. Per definizione:

$$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_B}, \quad y_B = \sin\alpha \quad \text{e} \quad x_B = \cos\alpha.$$

Sostituiamo $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ nell'espressione della tangente e otteniamo che la tangente di un angolo sia data dal rapporto, quando esiste, fra il seno e il coseno dello stesso angolo.

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}, \quad \text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$ — seconda relazione fondamentale

# Significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta

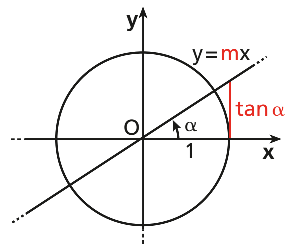
→ Esercizi a p. 738

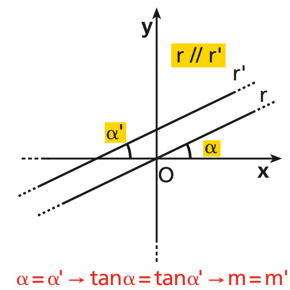
Tracciamo la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y = mx$, da cui:

$$m = \frac{y}{x}.$$

In particolare, se $x = 1$, $y = \tan\alpha$ e

$$m = \frac{\tan\alpha}{1} = \tan\alpha.$$



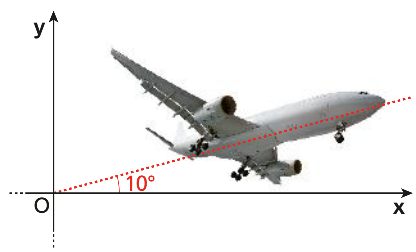




*Il coefficiente angolare della retta $y = mx$ è uguale alla tangente dell'angolo fra la retta e l'asse x.*
Dalla geometria analitica sappiamo che due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare e che esse formano angoli congruenti con l'asse $x$. Ciò permette di estendere il risultato ottenuto anche a rette che non passano per l'origine (figura sopra a destra).

**ESEMPIO Nel decollo**

Un aereo in fase di decollo forma un angolo di 10° con il suolo.

► Qual è l'equazione della semiretta che approssima la traiettoria dell'aereo in fase di decollo?




Immaginiamo che il piano cartesiano sia disposto come in figura.
La semiretta che descrive il decollo passa per l'origine, quindi ha equazione del tipo $y = mx$, con $x \geq 0$.
$m = \tan 10° \simeq 0{,}18$, perciò la semiretta cercata è $y = 0{,}18x$, con $x \geq 0$.

# 4 Funzioni secante e cosecante

→ Esercizi a p. 739

**DEFINIZIONE**

Dato un angolo α, chiamiamo:

- **secante** di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di cos α, purché cos α sia diverso da 0. Si indica con sec α:

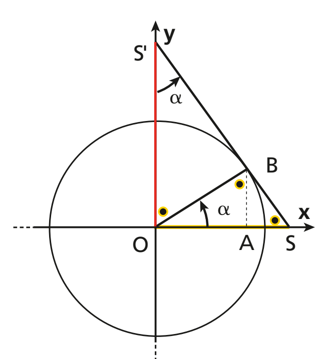
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- **cosecante** di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di sin α, purché sin α sia diverso da 0. Si indica con csc α:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Secante e cosecante, come seno e coseno, sono funzioni periodiche di periodo $2\pi$.

## Un altro modo di definire la secante e la cosecante




Consideriamo la circonferenza goniometrica, l'angolo α e la tangente in $B$ che interseca gli assi $x$ e $y$ rispettivamente in $S$ e $S'$.
I triangoli $OBA$ e $OBS$ sono simili, quindi:

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha : 1 = 1 : \overline{OS},$$

da cui: $\overline{OS} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$.

Analogamente, essendo simili i triangoli $OAB$ e $OBS'$:

$$\overline{BA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS'} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha : 1 = 1 : \overline{OS'},$$

da cui: $\overline{OS'} = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha$.

La secante di $\alpha$ è quindi l'ascissa del punto $S$, intersezione della retta tangente nel punto $B$, associato ad $\alpha$ sulla circonferenza goniometrica, con l'asse $x$.
Analogamente, la cosecante di $\alpha$ è l'ordinata del punto $S'$, intersezione della retta tangente in $B$ con l'asse $y$.

## Grafico del reciproco di una funzione

Dal grafico di una funzione $y = f(x)$ è possibile ricavare l'andamento del grafico della funzione reciproca:

$$y = g(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{definita per } f(x) \neq 0.$$

1. Se il grafico di $f(x)$ interseca l'asse $x$ in $x_0$, ossia se $f(x_0) = 0$, *per valori di $x$ che tendono a $x_0$*, il valore del reciproco è:
   - positivo e con valori sempre più grandi, man mano che ci si avvicina a $x_0$, se $f(x) > 0$; diremo che $g(x)$ tende a $+\infty$;
   - negativo e con valori sempre più grandi in valore assoluto, se $f(x) < 0$; diremo che $g(x)$ tende a $-\infty$.

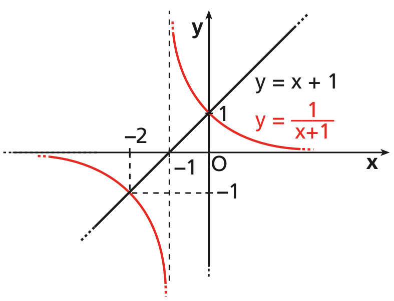
   Avvicinandosi al punto $x_0$ il grafico della funzione $g(x)$ si avvicina a quello della retta $x = x_0$, che viene detta **asintoto verticale** del grafico di $g(x)$.
2. Quando $f(x)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, il suo reciproco $g(x)$ si avvicina sempre più a 0, cioè $g(x)$ tende a 0.
3. Se $f(a) = 1$, è vero anche che $g(a) = \dfrac{1}{f(a)} = \dfrac{1}{1} = 1$.

   $a$ è allora *ascissa di un punto di intersezione* dei grafici di $f(x)$ e di $\dfrac{1}{f(x)}$.
   Analogamente, se $f(b) = -1$, abbiamo $g(b) = \dfrac{1}{f(b)} = \dfrac{1}{-1} = -1$, cioè *$b$ è ascissa di un punto di intersezione*.

**ESEMPIO**

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x + 1.$$

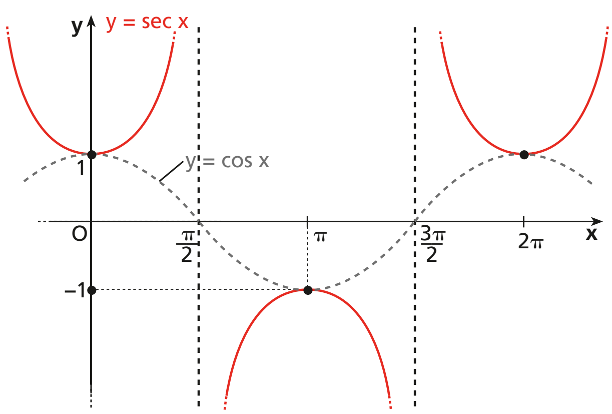


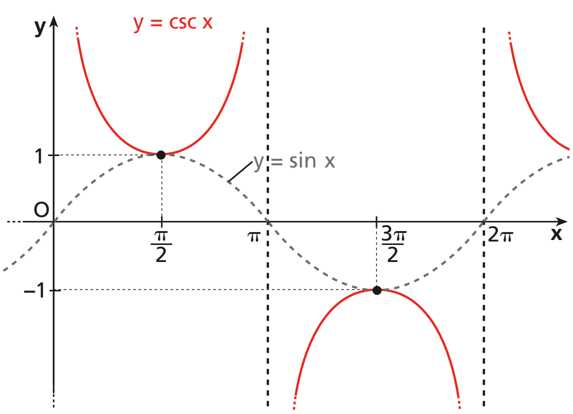

- $f(x) = 0$ se $x = -1$. Il suo reciproco $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ tende a $+\infty$ quando $x$ tende a $-1^+$, poiché $f(x) > 0$ e $g(x)$ assume valori sempre più grandi.
  Analogamente, $g(x)$ tende a $-\infty$ per $x$ che tende a $-1^-$, dove $f(x) < 0$. La retta $x = -1$ è asintoto verticale per $g(x)$.
- $f(x)$ tende a $+\infty$ quando $x$ tende a $+\infty$, cioè quando $x$ cresce; tende a $-\infty$ quando $x$ tende a $-\infty$. Allora $g(x)$ tende a $0^+$ quando $x$ tende a $+\infty$, mentre tende a $0^-$ quando $x$ tende a $-\infty$.

- $f(a) = 1$ se $a = 0$, $f(b) = -1$ se $b = -2$.
  Allora anche $g(0) = 1$ e $g(-2) = -1$.
- Le informazioni raccolte permettono di tracciare il grafico probabile di $g(x)$.

### Grafici della secante e della cosecante

Possiamo utilizzare il metodo appena visto per disegnare i grafici della secante e della cosecante.




Il grafico di una funzione si ottiene da quello dell'altra con una traslazione di vettore parallelo all'asse $x$ e modulo $\frac{\pi}{2}$.

I domini delle due funzioni, deducibili dalla loro definizione, sono:

$$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \text{ per la secante;} \qquad \mathbb{R}-\{0+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} \text{ per la cosecante.}$$

Dalla figura si deduce che l'insieme immagine, sia della funzione secante, sia della funzione cosecante, è $\mathbb{R} - ]-1; 1[$.

Sono asintoti verticali le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per il grafico della secante, $x = 0 + k\pi$ per il grafico della cosecante.

Come il coseno, la secante è una funzione pari; la cosecante è dispari, come il seno.

**Animazione** nell'eBook

L'animazione studia i due modi di definire la secante e la cosecante e fornisce figure dinamiche per osservare i loro grafici al variare dell'angolo fra 0 e $2\pi$.

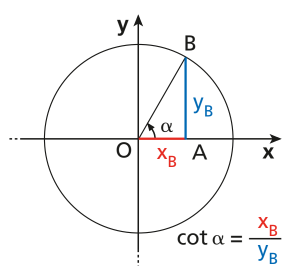
# 5 Funzione cotangente

→ Esercizi a p. 741

**DEFINIZIONE**

Consideriamo un angolo orientato $\alpha$ e chiamiamo $B$ l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica. Definiamo **cotangente** di $\alpha$ la funzione che associa ad $\alpha$ il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto $B$:

$$\cot\alpha = \frac{x_B}{y_B}.$$



Il rapporto $\frac{x_B}{y_B}$ *non esiste* quando $y_B = 0$, ossia quando il punto $B$ si trova sull'asse $x$, cioè quando l'angolo misura 0, $\pi$ e tutti i multipli interi di $\pi$.
$\cot \alpha$ esiste solo se $\alpha \neq k\pi$.

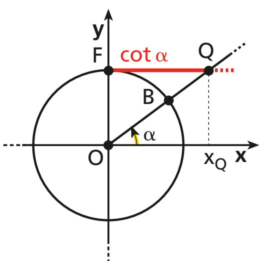
Dalla definizione di cotangente deriva che: $\boxed{\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$, con $\alpha \neq k\pi$.

Poiché $\tan \alpha = \frac{y_B}{x_B}$ e $\cot \alpha = \frac{x_B}{y_B}$, risulta $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, da cui:

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}}, \quad \text{con } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}.$$

La condizione posta deriva dal fatto che consideriamo $\frac{1}{\tan \alpha}$, quindi la cotangente non è definita sia per gli angoli in cui non esiste $\tan \alpha$, cioè $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sia per quelli in cui $\tan \alpha = 0$, cioè $\alpha = 0 + k\pi$, perciò: $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$.

TEORIA

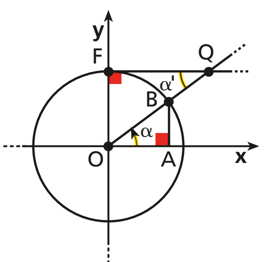



## Un altro modo di definire la cotangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente a essa nel punto $F$.
Il prolungamento del lato termine $OB$ interseca la retta tangente nel punto $Q$.
La cotangente di $\alpha$ può anche essere definita come il valore dell'ascissa di $Q$:

$$\cot \alpha = x_Q.$$

Dimostriamo che le due definizioni date sono equivalenti.




**DIMOSTRAZIONE**

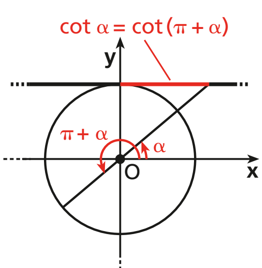
Consideriamo i due triangoli rettangoli $OAB$ e $OFQ$. Essi sono simili, essendo $FQ /\!/ OA$ e quindi $\alpha \cong \alpha'$, perché alterni interni di rette parallele tagliate da una trasversale. Scriviamo la proporzione fra le misure dei cateti corrispondenti,

$$\overline{FQ} : \overline{OA} = \overline{FO} : \overline{BA}, \quad \rightarrow \quad x_Q : x_B = 1 : y_B \quad \rightarrow \quad x_Q = \frac{x_B}{y_B}.$$

Pertanto: $\cot \alpha = \frac{x_B}{y_B} = x_Q$.

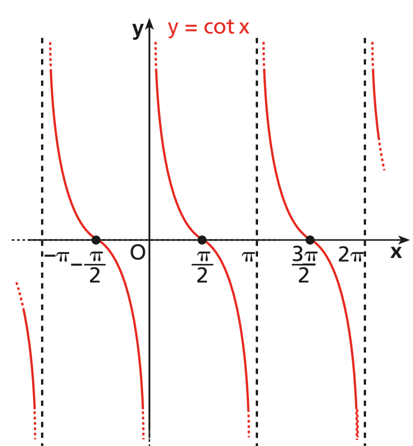
**Animazione** nell'eBook

Nell'animazione ci sono le due definizioni e una figura dinamica per osservare il grafico della cotangente fra 0 e $2\pi$.




## Grafico della funzione $y = \cot x$

Come la tangente, anche la funzione cotangente può assumere qualunque valore reale. L'insieme immagine della cotangente è quindi $\mathbb{R}$, mentre il suo dominio è: $x \neq k \cdot \pi$.
Le rette di equazione $x = k\pi$ sono asintoti verticali del suo grafico.




## Periodo della funzione cotangente

In analogia con la tangente, la funzione cotangente risulta periodica di periodo $\pi$:

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

# 6 Funzioni goniometriche di angoli particolari

→ Esercizi a p. 744

Mediante le proprietà delle figure geometriche riusciamo a calcolare il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari.

**Animazione** nell'eBook

Nell'animazione puoi seguire passo passo il modo con cui si ricavano seno e coseno di $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

## L'angolo $\frac{\pi}{6}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo $OAB$, rettangolo in $A$, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{6}$ e $\overline{OB} = 1$.

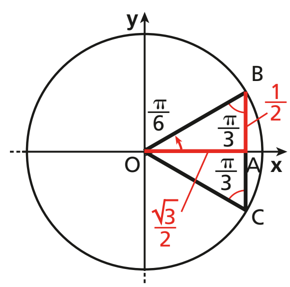
Poiché in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{3}$.

Prolungando il lato $BA$, otteniamo sulla circonferenza il punto $C$.

Il triangolo $OBC$ è equilatero, poiché ha gli angoli di $\frac{\pi}{3}$, quindi $\overline{BC} = 1$.

$AB$ è la metà di $BC$, ossia $\overline{AB} = \frac{1}{2}$.

Ricaviamo $\overline{OA}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo $OAB$:




$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{6}$:

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Pertanto: $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

› Verifica con il calcolo che:

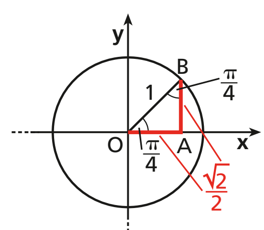
$\sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$;

$\csc\frac{\pi}{6} = 2$.

## L'angolo $\frac{\pi}{4}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo $OAB$, rettangolo in $A$, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{4}$ e $\overline{OB} = 1$. Anche $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{4}$ e il triangolo $OAB$ è isoscele.

Con il teorema di Pitagora otteniamo



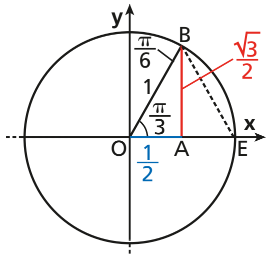

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

e quindi: $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calcolando i rapporti che definiscono le due funzioni, otteniamo:

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \text{ e } \cot\frac{\pi}{4} = 1.$$

T TEORIA




### L'angolo $\frac{\pi}{3}$

Nella circonferenza goniometrica consideriamo il triangolo $OAB$, rettangolo in $A$, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e, di conseguenza, $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{6}$.

Congiungendo $B$ con $E$, otteniamo il triangolo equilatero $OEB$.

$BA$ è altezza e mediana del triangolo $OEB$, quindi $\overline{OA} = \frac{1}{2}$.

Ricaviamo $\overline{AB}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo $OAB$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

> Verifica con il calcolo che:
> $\sec\frac{\pi}{3} = 2$;
> $\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Calcolando i rapporti fra seno e coseno, otteniamo:

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

TEORIA

# 7 Angoli associati

Consideriamo un angolo $\alpha$. Chiamiamo **angoli associati** (o **archi associati**) ad $\alpha$ i seguenti angoli:

$$-\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{\pi}{2}+\alpha,\ \pi-\alpha,\ \pi+\alpha,\ \frac{3}{2}\pi-\alpha,\ \frac{3}{2}\pi+\alpha,\ 2\pi-\alpha.$$

**Video**

**Le formule degli angoli associati**
- Quali sono le formule degli angoli associati?
- Come ricavarle senza doverle imparare a memoria?

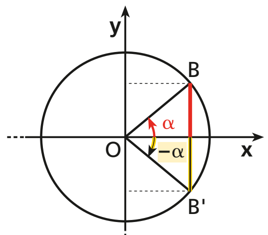
## Funzioni goniometriche di angoli associati

→ Esercizi a p. 745

Determiniamo seno, coseno, tangente e cotangente degli angoli associati ad $\alpha$, in funzione di seno, coseno, tangente e cotangente dell'angolo $\alpha$.

- I due angoli $\alpha$ e $-\alpha$ sono congruenti e orientati in verso opposto, ossia sono **angoli opposti**:

$$\sin(-\alpha) = y_{B'} = -y_B = -\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = x_{B'} = x_B = \cos\alpha.$$

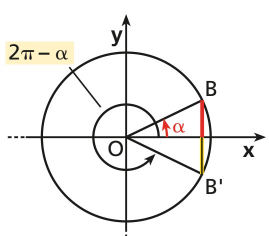


$\alpha$ e $-\alpha$

Pertanto:

$$\mathbf{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}, \qquad \mathbf{\tan(-\alpha) = -\tan\alpha},$$
$$\mathbf{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}, \qquad \mathbf{\cot(-\alpha) = -\cot\alpha}.$$

- $\alpha$ e $2\pi-\alpha$ sono **angoli esplementari**, ossia la loro somma è un angolo giro. Per essi valgono considerazioni analoghe a quelle precedenti, quindi:



$\alpha$ e $2\pi-\alpha$

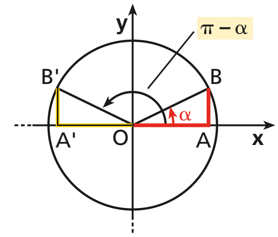
$$\mathbf{\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha}, \qquad \mathbf{\tan(2\pi-\alpha) = -\tan\alpha},$$
$$\mathbf{\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha}, \qquad \mathbf{\cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha}.$$

- $\alpha$ e $\pi - \alpha$ sono **angoli supplementari**.
I triangoli rettangoli $OAB$ e $OA'B'$ sono congruenti perché hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto $\alpha$:

$$\sin(\pi - \alpha) = y_{B'} = y_B = \sin\alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = x_{B'} = -x_B = -\cos\alpha.$$

Pertanto:

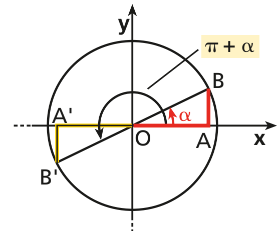
$$\boldsymbol{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.}$$



α e π − α

- $\alpha$ e $\pi + \alpha$ sono **angoli che differiscono di un angolo piatto**. Con considerazioni analoghe a quelle del caso precedente otteniamo:

$$\boldsymbol{\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha.}$$



α e π + α

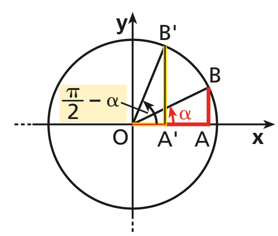


- $\alpha$ e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sono **angoli complementari**.
Nel triangolo rettangolo $OA'B'$ risulta $A'\widehat{O}B' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $O\widehat{B'}A' = \alpha$, perché complementare del precedente.
I triangoli $OAB$ e $OA'B'$ sono congruenti perché hanno congruente l'ipotenusa e l'angolo acuto $\alpha$, pertanto $OA \cong A'B'$ e $AB \cong OA'$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y_{B'} = x_B = \cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x_{B'} = y_B = \sin\alpha.$$

Pertanto:

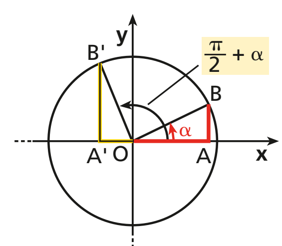
$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.}$$



$\alpha$ e $\frac{\pi}{2} - \alpha$

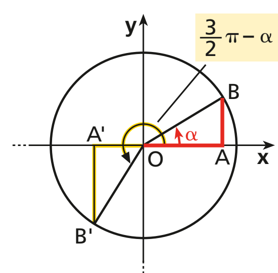
- $\alpha$ e $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sono **angoli che differiscono di un angolo retto**.
Nel triangolo rettangolo $OA'B'$ risulta $A'\widehat{O}B' = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\widehat{B'}O = \alpha$. Quindi, in analogia con il caso precedente, tenuto conto che $A'B'O$ è nel secondo quadrante, otteniamo:

$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha.}$$



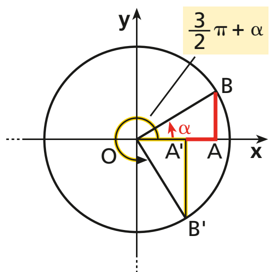
$\alpha$ e $\frac{\pi}{2} + \alpha$

- Se consideriamo $\alpha$ e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$, $A'\widehat{O}B' = \frac{3}{2}\pi - \alpha - \pi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\widehat{B'}O = \alpha$,
quindi i triangoli $AOB$ e $A'OB'$ sono congruenti. Per **angoli la cui somma è $\frac{3}{2}\pi$** otteniamo dunque:



$\alpha$ e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha,\qquad \tan\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\cot\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad \cot\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\tan\alpha.$$



$\alpha$ e $\frac{3}{2}\pi+\alpha$

- Con ragionamenti analoghi, per **angoli la cui differenza è** $\frac{3}{2}\pi$ otteniamo:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha,\qquad \tan\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cot\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad \cot\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\tan\alpha.$$

**Animazione** nell'eBook

Con pochi click, osserviamo le relazioni fra seno e coseno di:
$\alpha$ e $-\alpha$; $\alpha$ e $2\pi-\alpha$;
$\alpha$ e $\pi-\alpha$; $\alpha$ e $\pi+\alpha$.

**Animazione** nell'eBook

Esaminiamo le relazioni fra seno e coseno di:
$\alpha$ e $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\alpha$ e $\frac{\pi}{2}+\alpha$;
$\alpha$ e $\frac{3}{2}\pi-\alpha$; $\alpha$ e $\frac{3}{2}\pi+\alpha$.

## Riduzione al primo quadrante

→ Esercizi a p. 752

Usando le relazioni stabilite per gli angoli associati, è possibile determinare le funzioni goniometriche di qualunque angolo, conoscendo le funzioni goniometriche degli angoli che appartengono al primo quadrante.
Il procedimento relativo viene detto **riduzione al primo quadrante**.

> Riduci al primo quadrante cos 230°.

**ESEMPIO**

Riduciamo al primo quadrante sin 110°.
Poiché 110° = 90° + 20°:

$$\sin 110° = \sin(90° + 20°) = \cos 20°.$$

# 8 Funzioni goniometriche inverse

→ Esercizi a p. 754

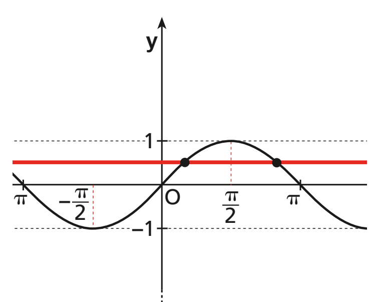
**Listen to it**

To define the inverse of the sine function, we need to restrict the domain; we can define the function arcsin$(x)$ from $[-1;1]$ to $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ as the inverse of the sine function in $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. This method can be used to define the inverse function of all the trigonometric functions.

### Funzione inversa di $y = \sin x$

Una funzione è invertibile, ossia ammette la funzione inversa, solo se è biunivoca.

La funzione $y = \sin x$ non è biunivoca perché non è iniettiva. Infatti, se consideriamo una retta $y = k$, parallela all'asse $x$, con $-1 \leq k \leq 1$, essa interseca il grafico della funzione seno in infiniti punti, quindi ogni valore dell'insieme immagine $[-1; 1]$ di $y = \sin x$ è il corrispondente di infiniti valori del dominio $\mathbb{R}$.



### Restrizione del dominio

Se restringiamo il dominio della funzione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione $y = \sin x$ risulta biunivoca e dunque invertibile.

La funzione inversa del seno si chiama *arcoseno*.

**DEFINIZIONE**
Dati i numeri reali $x$ e $y$, con $-1 \leq x \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, diciamo che $y$ è l'**arcoseno** di $x$ se $x$ è il seno di $y$.

Scriviamo: $\boldsymbol{y = \arcsin x}$, oppure $y = \sin^{-1} x$.

$y = \arcsin x$ $\quad D = [-1; 1]$

$\Updownarrow$ $\quad \mathrm{Im} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

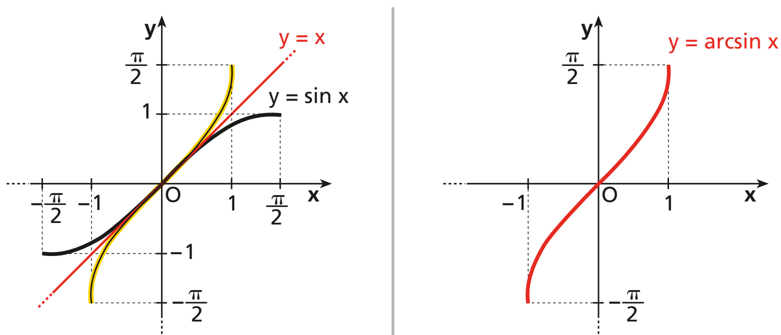
$x = \sin y$

**ESEMPIO**

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \leftrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1; \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \leftrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

▸ Qual è l'arcoseno di $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Per ottenere il grafico della funzione $y = \arcsin x$, basta costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del grafico della funzione $y = \sin x$, considerata nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.




**a.** Grafico di $y = \sin x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

**b.** Grafico di $y = \arcsin x$.

### Funzione inversa di $y = \cos x$

Se consideriamo $[0; \pi]$ come dominio, la funzione coseno è biunivoca e quindi invertibile. La funzione inversa del coseno si chiama *arcocoseno*.

**DEFINIZIONE**
Dati i numeri reali $x$ e $y$, con $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \pi$, diciamo che $y$ è l'**arcocoseno** di $x$ se $x$ è il coseno di $y$.
Scriviamo: $\boldsymbol{y = \arccos x}$, oppure $y = \cos^{-1} x$.

$y = \arccos x$ $\quad D = [-1; 1]$

$\Updownarrow$ $\quad \mathrm{Im} = [0; \pi]$

$x = \cos y$

**ESEMPIO**

$$\arccos(-1) = \pi \quad \leftrightarrow \quad \cos\pi = -1; \quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

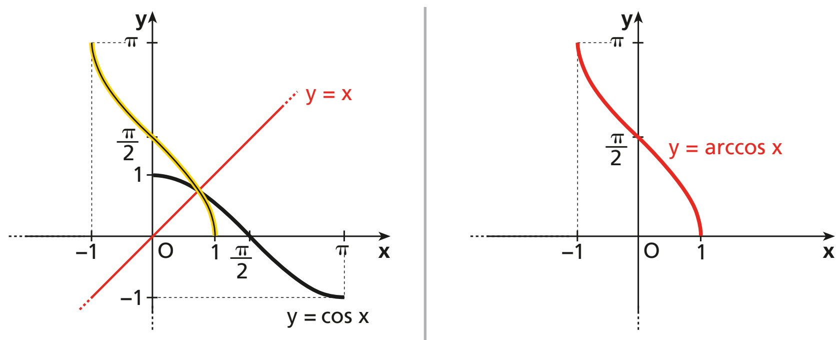
▸ Qual è l'arcocoseno di $-\frac{1}{2}$?

**Animazione** nell'eBook

Nell'animazione vediamo, in pochi passi, come disegnare i grafici di:

- $y = \arcsin x$;
- $y = \arccos x$;
- $y = \arctan x$;
- $y = \text{arccot}\, x$.

La figura illustra il grafico della funzione arcocoseno.




**a.** Grafico di $y = \cos x$ in $[0; \pi]$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

**b.** Grafico di $y = \arccos x$.

## Funzione inversa di $y = \tan x$

Se consideriamo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ come dominio, la funzione tangente è biunivoca e di conseguenza invertibile.

La funzione inversa della tangente si chiama *arcotangente*.

$y = \arctan x \quad D = \mathbb{R}$

$\Updownarrow \quad \text{Im} = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$x = \tan y$

**DEFINIZIONE**

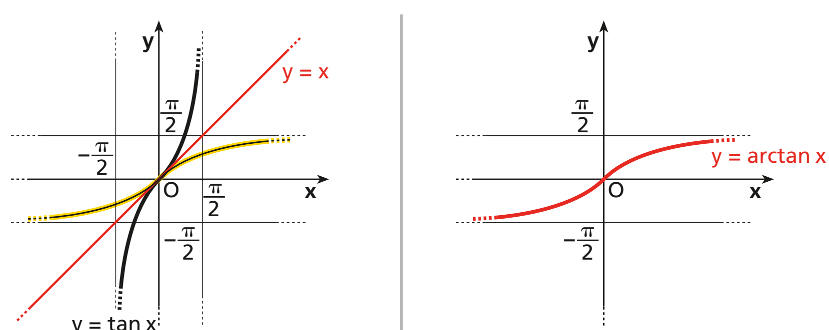
Dati i numeri reali $x$ e $y$, con $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, diciamo che $y$ è l'**arcotangente** di $x$ se $x$ è la tangente di $y$.
Scriviamo: $\boldsymbol{y = \arctan x}$, oppure $y = \tan^{-1} x$.

► Qual è l'arcotangente di $-\frac{\sqrt{3}}{3}$?

**ESEMPIO**

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \tan\frac{\pi}{4} = 1; \quad \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Studiamo il grafico della funzione arcotangente.




**a.** Grafico di $y = \tan x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

**b.** Grafico di $y = \arctan x$.

TEORIA

### Funzione inversa di $y = \cot x$

**DEFINIZIONE**
Dati i numeri reali $x$ e $y$, con $x \in \mathbb{R}$ e $0 < y < \pi$, diciamo che $y$ è l'**arcocotangente** di $x$ se $x$ è la cotangente di $y$.
Scriviamo: $\boldsymbol{y = \operatorname{arccot} x}$, oppure $y = \cot^{-1} x$.

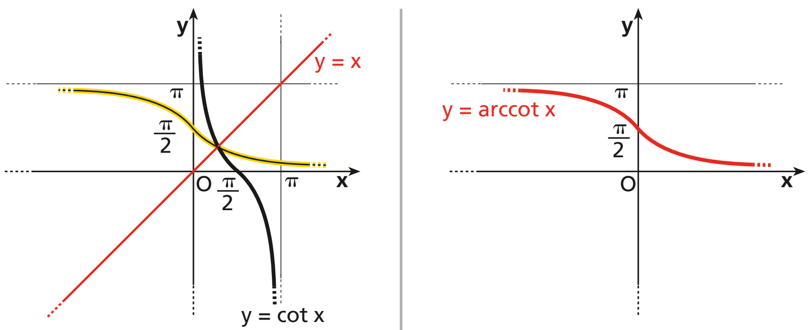
$y = \operatorname{arccot} x \quad D = \mathbb{R}$
$\Updownarrow \quad \mathrm{Im} = ]0; \pi[$
$x = \cot y$

**ESEMPIO**

$$\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \cot \frac{\pi}{2} = 0; \quad \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

› Qual è l'arcocotangente di $\sqrt{3}$?

Disegniamo il grafico della funzione arcocotangente.




**a.** Grafico di $y = \cot x$ in $]0; \pi[$ e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

**b.** Grafico di $y = \operatorname{arccot} x$.

# 9 Funzioni goniometriche e trasformazioni geometriche

→ Esercizi a p. 757

Dai grafici delle funzioni goniometriche si ottengono grafici di altre funzioni mediante traslazioni, simmetrie, dilatazioni e contrazioni. Ne proponiamo alcuni negli esercizi, mentre qui ci occupiamo soltanto delle *funzioni sinusoidali*.

### Funzioni sinusoidali

La funzione $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, raccogliendo 2 all'interno della parentesi, si può riscrivere

$$y = 3 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right],$$

quindi è possibile ottenere il suo grafico a partire da quello di $y = \sin x$ con le seguenti trasformazioni geometriche:

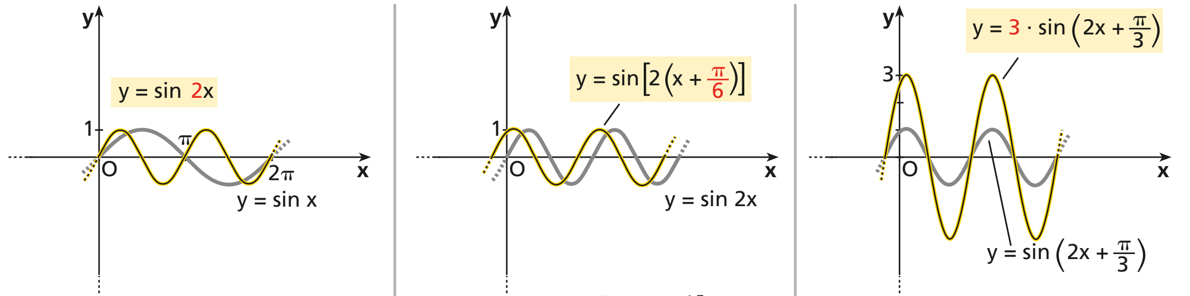
- contrazione orizzontale $y = f\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = \frac{1}{2}$;
- traslazione di vettore $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$;

**Animazione** nell'eBook

Studiamo in modo dinamico il grafico di
$y = A \sin(\omega x + \varphi)$
al variare di $A$, $\omega$, $\varphi$.

TEORIA

- dilatazione verticale $y = nf(x)$, con $n = 3$.




**a.** Grafico di $y = \sin 2x$.

**b.** Grafico di $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$.

**c.** Grafico di $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.



**Video**

**Funzione sinusoidale**
Studiamo insieme l'equazione di una funzione sinusoidale.
- Cosa rappresentano i parametri?
- Cosa sono il periodo, l'ampiezza e la fase di una funzione sinusoidale?

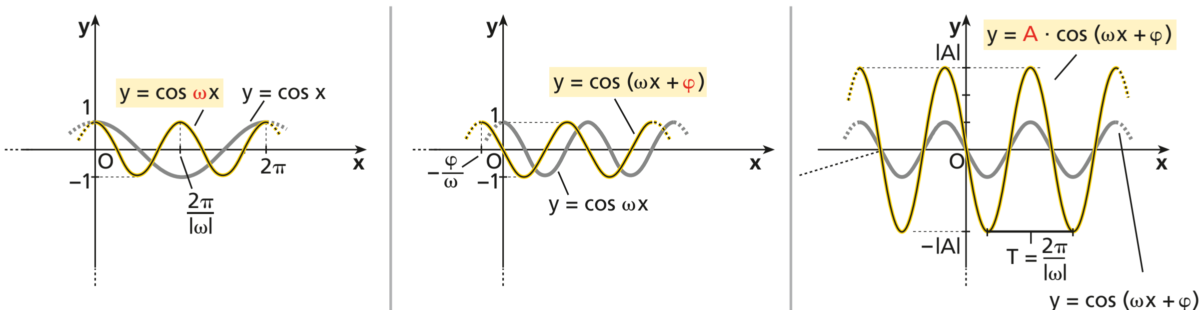
Una funzione di questo tipo è detta **sinusoidale** e viene applicata molto spesso nello studio di fenomeni fisici.

In generale, sono dette funzioni sinusoidali le funzioni del tipo:

$$y = A\sin(\omega x + \varphi), \qquad y = A\cos(\omega x + \varphi),$$

con $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ e $A$ e $\omega$ diversi da 0.

Studiamo il grafico di $y = A\cos(\omega x + \varphi)$.




**a.** Il cambiamento di $\omega$ modifica il periodo della funzione e genera una dilatazione e contrazione orizzontale.

**b.** Il cambiamento di $\varphi$ produce una traslazione orizzontale.

**c.** Il cambiamento di $|A|$ genera una dilatazione o contrazione verticale.

**Animazione** nell'eBook

Studiamo in modo dinamico il grafico di
$y = A\cos(\omega x + \varphi)$
al variare di $A$, $\omega$, $\varphi$.

L'insieme immagine di una funzione sinusoidale è $[-|A|; |A|]$.
Il numero $|A|$ è detto **ampiezza** della funzione sinusoidale, il numero $\omega$ **pulsazione** e $\varphi$ **sfasamento** o **fase iniziale**.

Il periodo $T$ è: $\boldsymbol{T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}}$.

Infatti, la funzione seno è periodica di periodo $2\pi$, quindi possiamo scrivere:

$$A\sin(\omega x + \varphi) = A\sin(\omega x + \varphi + 2k\pi) = A\sin[(\omega x + 2k\pi) + \varphi] =$$

$$A\sin\left[\omega\left(x + k\cdot\frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right],$$

da cui deduciamo che il periodo è $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

Allo stesso modo si ottiene che il periodo di $y = \tan \omega x$ è $\frac{\pi}{|\omega|}$.

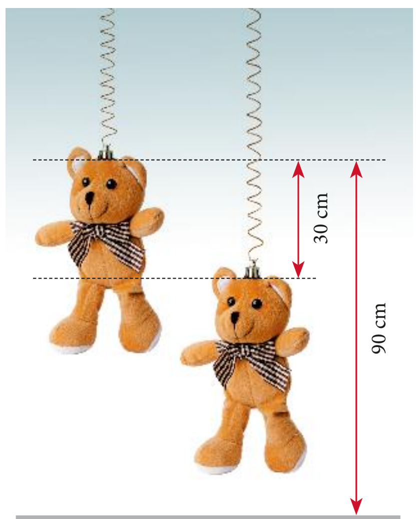
## Periodo delle funzioni goniometriche

Nella tabella riassumiamo i periodi delle principali funzioni goniometriche che abbiamo studiato.

| Funzione | Periodo |
|---|---|
| $\sin x$, $\cos x$ | $2\pi$ |
| $\sin(kx+\alpha)$, $\cos(kx+\alpha)$ | $\frac{2\pi}{\lvert k \rvert}$ |
| $\tan x$, $\cot x$ | $\pi$ |
| $\tan(kx+\alpha)$, $\cot(kx+\alpha)$ | $\frac{\pi}{\lvert k \rvert}$ |

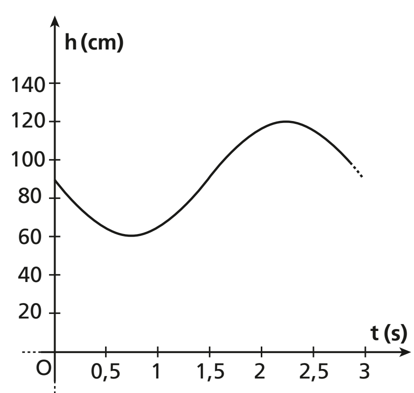
**ESEMPIO Pupazzetti salterini**

Roberto gioca con un pupazzetto a molla facendolo oscillare verticalmente, partendo da una posizione di equilibrio a un'altezza di 90 cm dal pavimento. Sappiamo che per effettuare un'oscillazione completa, di ampiezza 30 cm, e ritornare nella posizione iniziale impiega 3 secondi. La funzione che descrive l'altezza dal suolo del giocattolo al tempo $t$ è del tipo $h(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$.




▶ Quali sono i valori dei parametri che corrispondono alla situazione descritta?

Al tempo $t = 0$ la testa del pupazzetto si trova a 90 cm da terra e per la stessa posizione passerà dopo 1,5 s (dato che per fare un'oscillazione completa impiega 3 s).
Nella posizione più bassa, a 60 cm dal suolo, passerà dopo $\frac{3}{4} = 0{,}75$ s e in quella più alta, a 120 cm, dopo $3 \cdot \frac{3}{4} = 2{,}25$ s.
Si tratta di una funzione sinusoidale del tipo $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 3$ s e ampiezza $A = 30$ cm, traslata verso l'alto di 90 cm. Quindi $h(t) = 90 + 30\sin\left(\frac{2\pi t}{3} + \varphi\right)$.




Per determinare la fase iniziale $\varphi$ bisogna considerare che il giocattolo viene inizialmente tirato verso il basso, quindi

$$\varphi = \pi \text{ e } \sin\left(\frac{2\pi t}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{2\pi t}{3} \quad \rightarrow \quad h(t) = 90 - 30\sin\frac{2\pi t}{3}.$$

**MATEMATICA E MUSICA**

- Qual è il legame tra le funzioni sinusoidali e la musica?

**Cerca nel Web:**
diapason, moto armonico, frequenza, timbro, altezza

T

TEORIA

## Il grafico di $y = f^2(x)$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, cerchiamo di ricavare da esso l'andamento di quello di $y = f^2(x)$.
Tenendo conto che elevando al quadrato un numero, sia positivo sia negativo, si ottiene un numero positivo che non dipende dal segno del numero iniziale ma soltanto dal suo valore assoluto, disegniamo il grafico di $y = |f(x)|$ e teniamo conto delle seguenti proprietà:

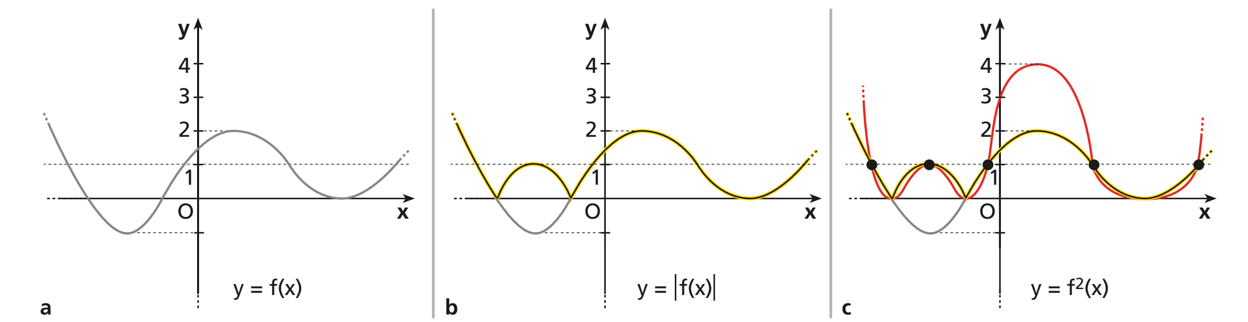
**1.** se $|f(x)| = 1 \;\rightarrow\; f^2(x) = 1$;

**2.** se $f(x) = 0 \;\rightarrow\; f^2(x) = 0$;

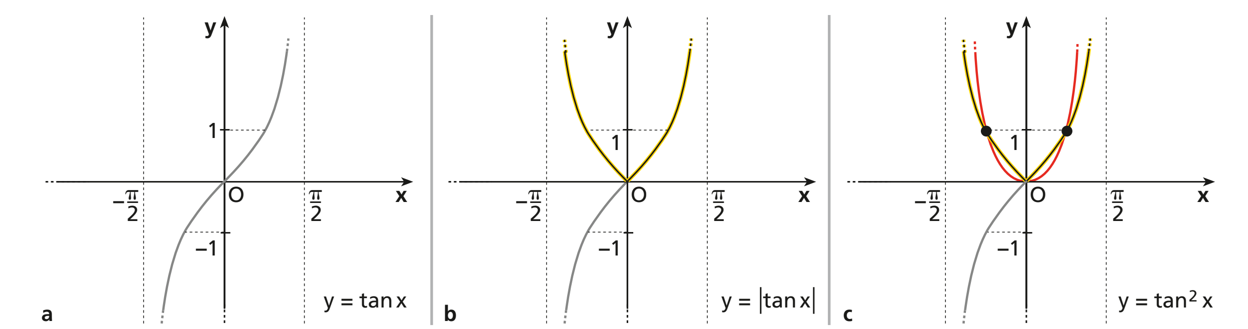
**3.** se $|f(x)| < 1 \;\rightarrow\; f^2(x) < |f(x)|$;

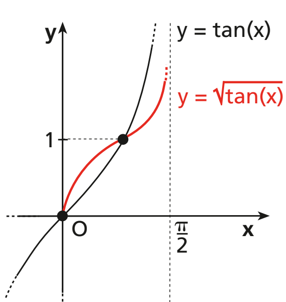
**4.** se $|f(x)| > 1 \;\rightarrow\; f^2(x) > |f(x)|$.

Esaminiamo un esempio.




Ricaviamo anche l'andamento del grafico di $y = \tan^2 x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.




## Il grafico di $y = \sqrt{f(x)}$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, ricaviamo l'andamento di quello di $y = \sqrt{f(x)}$.
Sfruttiamo queste informazioni:

**1.** se $f(x) < 0$, $\sqrt{f(x)}$ non esiste;

**2.** se $f(x) = 0$, $\sqrt{f(x)} = 0$;

**3.** se $f(x) = 1$, $\sqrt{f(x)} = 1$;

**4.** se $0 < f(x) < 1$, $f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;

**5.** se $f(x) > 1$, $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.

A fianco, come esempio, riportiamo il grafico di $y = \sqrt{\tan x}$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

# IN SINTESI
# Funzioni goniometriche

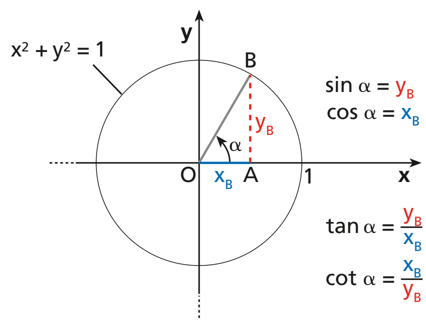
## Misura degli angoli

Un angolo può essere misurato in **gradi** oppure in **radianti**.

- Passaggio da gradi a radianti: si moltiplica la misura espressa in gradi per $\frac{\pi}{180°}$.
- Passaggio da radianti a gradi: si moltiplica la misura in radianti per $\frac{180°}{\pi}$.

## Funzioni goniometriche

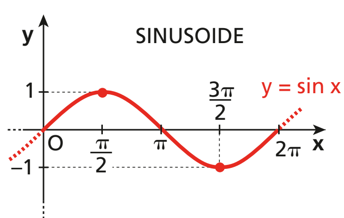
- Consideriamo un angolo orientato $\alpha$ e chiamiamo $B$ l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:
  - **seno di $\alpha$** ($\sin\alpha$) il valore dell'ordinata di $B$;
  - **coseno di $\alpha$** ($\cos\alpha$) il valore dell'ascissa di $B$;
  - **tangente di $\alpha$** ($\tan\alpha$) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di $B$; è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
  - **cotangente di $\alpha$** ($\cot\alpha$) il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di $B$; è definita per $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



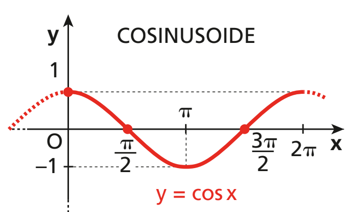

- **Relazioni fondamentali della goniometria**:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ e } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

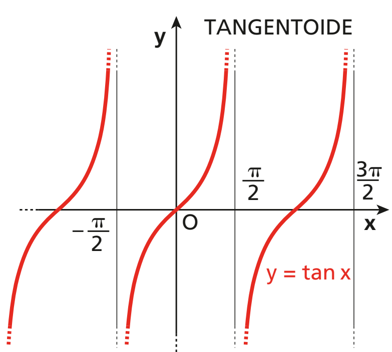
- **Secante di $\alpha$**: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, con $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- **Cosecante di $\alpha$**: $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, con $\alpha \neq k\pi$.




Periodo: $2\pi$




Periodo: $2\pi$




Periodo: $\pi$

## Funzioni goniometriche di angoli particolari

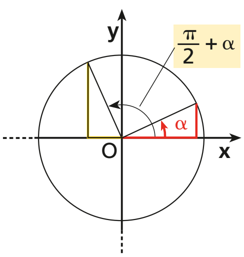
- $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.
- $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

continua »

## Angoli associati

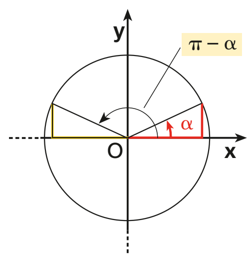
Disegnando gli angoli associati sulla circonferenza goniometrica, possiamo ottenere le relazioni fra le loro funzioni goniometriche.

**ESEMPIO:**




$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$



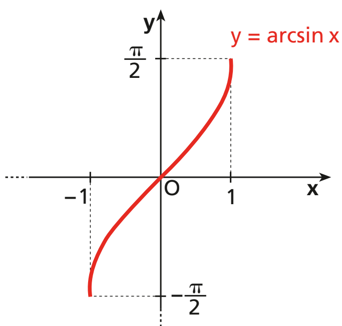

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

## Funzioni goniometriche inverse

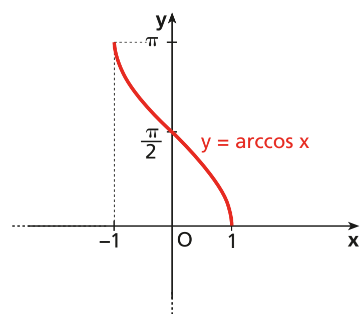
- **Arcoseno**: $y=\arcsin x$.

  $D: [-1; 1]$; $Im: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



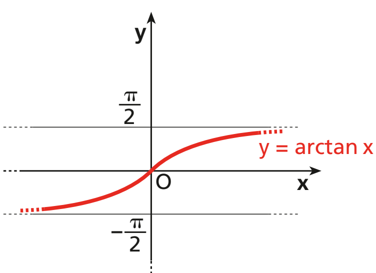

- **Arcocoseno**: $y=\arccos x$.

  $D: [-1; 1]$; $Im: [0; \pi]$.



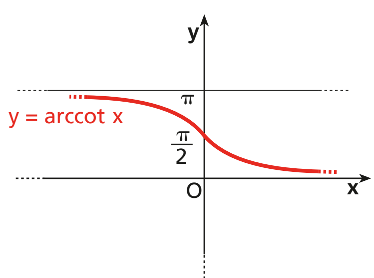

- **Arcotangente**: $y=\arctan x$.

  $D: \mathbb{R}$; $Im: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.




- **Arcocotangente**: $y=\text{arccot}\ x$.

  $D: \mathbb{R}$; $Im: ]0; \pi[$.




## Funzioni goniometriche e trasformazioni geometriche

**Funzioni sinusoidali**: sono funzioni del tipo $y=A\sin(\omega x+\varphi)$, $y=A\cos(\omega x+\varphi)$, con $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ e $|A|$ è l'**ampiezza**, $\omega$ la **pulsazione** e $\varphi$ lo **sfasamento**. Il **periodo** è $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

# ESERCIZI

Inquadrami per fare le attività interattive

## 1 Misura degli angoli

### Misura in gradi

Attività interattiva

→ Teoria a p. 697

**AL VOLO** Scrivi il complementare e il supplementare dei seguenti angoli

**1** 30°; 64°.

**2** 50°; 45°.

**3** 20°; 15°.

E

ESERCIZI

#### Le operazioni fra angoli espressi in gradi

**4** **ESERCIZIO GUIDA** Eseguiamo la sottrazione $90° - 32° \, 46' \, 22''$.

Scriviamo 90° in termini di primi e secondi.

Poiché $1° = 60'$, scriviamo:

$90° = 89° \, 60'$.

Poiché $1' = 60''$, scriviamo:

$90° = 89° \, 59' \, 60''$.

Ora è possibile eseguire la sottrazione in colonna, fra gradi, primi e secondi:

$$\begin{array}{l} 89° \, 59' \, 60'' - \\ 32° \, 46' \, 22'' = \\ \hline 57° \, 13' \, 38'' \end{array}$$

Esegui le seguenti operazioni fra le misure di angoli.

**5** $15° \, 32' \, 52'' + 2° \, 12' \, 8''$ [17° 45′]

**6** $185° \, 2' + 6° \, 59' \, 12''$ [192° 1′ 12″]

**7** $27° \, 2' \, 3'' + 42° \, 12' \, 56'' + 1° \, 2' \, 4''$ [70° 17′ 3″]

**8** $270° - 120° \, 29' \, 32''$ [149° 30′ 28″]

**9** $360° - 322° \, 40' \, 50''$ [37° 19′ 10″]

**10** $26° - 1° \, 1' \, 1''$ [24° 58′ 59″]

Trova il complementare e il supplementare dei seguenti angoli.

**11** $36° \, 25'$

**12** $55° \, 2' \, 25''$

**13** $42° \, 11' \, 80''$

#### Dai gradi sessagesimali ai gradi sessadecimali

**14** **ESERCIZIO GUIDA** Esprimiamo $25° \, 32' \, 40''$ in forma sessadecimale.

Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, scriviamo $32' = \left(32 \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ}$.

Poiché $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$, scriviamo $40'' = \left(40 \cdot \frac{1}{3600}\right)^{\circ}$.

$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$

$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$

Trasformiamo la misura:

$$25° \, 32' \, 40'' = 25° + \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{40}{3600}\right)^{\circ} = 25° + 0{,}5\bar{3}° + 0{,}0\bar{1}° \simeq 25{,}54°.$$

La trasformazione richiesta è la seguente:

$25° \, 32' \, 40'' \simeq 25{,}54°$.

**Esprimi in forma sessadecimale le seguenti misure di angoli.**

**15** 0° 59′ 59″; 0° 30′. [1°; 0,5°]

**16** 1° 59′ 30″; 2° 40″. [1,99°; 2,01°]

**17** 15° 30′ 30″; 30° 30′ 30″. [15,51°; 30,51°]

**18** 44° 59′ 32″; 45° 59′ 60″. [44,99°; 46°]

## Dai gradi sessadecimali ai gradi sessagesimali

**19** **ESERCIZIO GUIDA** Trasformiamo 28,07° in gradi, primi e secondi.

Possiamo scrivere 28,07° = $\boxed{28°}$ + 0,07°.

Trasformiamo 0,07° in primi, moltiplicando 0,07 per 60 (poiché 1° = 60′):

$$0{,}07° = (0{,}07 \cdot 60)' = 4{,}2'.$$

Scriviamo 4,2′ = $\boxed{4'}$ + 0,2′.

Trasformiamo 0,2′ in secondi, moltiplicando 0,2 per 60 (poiché 1′ = 60″):

$$0{,}2' = (0{,}2 \cdot 60)'' = \boxed{12''}.$$

Pertanto: 28,07° = 28° 4′ 12″.

**Esprimi in gradi, primi e secondi le seguenti misure di angoli, espresse in forma sessadecimale (arrotondando eventualmente i secondi).**

**20** 28,3° [28° 18′]

**21** 2,23° [2° 13′ 48″]

**22** 120,36° [120° 21′ 36″]

**23** 90,5° [90° 30′]

**24** 90,05° [90° 3′]

**25** 1,567° [1° 34′ 1″]

## Misura in radianti

Attività interattiva

→ Teoria a p. 698

## Dai gradi sessagesimali ai radianti e viceversa

**26** **ASSOCIA**

**a.** 90° **1.** $\frac{5}{3}\pi$

**b.** 30° **2.** $\frac{\pi}{2}$

**c.** 300° **3.** $\frac{3}{4}\pi$

**d.** 270° **4.** $\frac{\pi}{6}$

**e.** 135° **5.** $\frac{3}{2}\pi$

**27** **TEST** L'angolo $\frac{\pi}{4}$:

**A** è metà dell'angolo retto.

**B** è metà dell'angolo piatto.

**C** è un quarto dell'angolo giro.

**D** corrisponde a 90°.

**28** **COMPLETA** la seguente tabella.

| **Gradi** | 0° | | 180° | | | 270° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Radianti** | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | |

**Trasforma in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi sessagesimali.**

**29** 15°, 36°, 210°, 300°.

**In 2 passi**

1. Applica la proporzione $\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$.
2. Sostituisci il valore di $\alpha°$ e calcola il valore di $\alpha_{rad}$.

**30** 20°, 80°, 100°, 160°.

**31** 70°, 5°, 150°, 225°.

**32** 121° 3′, 200° 36′, 15° 12′ 58″.

**Trasforma in gradi sessagesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.**

**33** $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{9}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$.

**34** $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$.

**35** $4\pi$, $4$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$.

**36** $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$, $3$.

**37** **COMPLETA** la seguente tabella.

| Gradi sessagesimali | 22° 30′ | | | 31° 12′ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Radianti | | $\frac{3}{8}\pi$ | | | 8 | |
| Gradi sessadecimali | | | 12,5° | | | 120,34° |

**38** Un angolo $\alpha$ misura $\frac{3}{7}\pi$. Trova la misura del suo supplementare in gradi. [102° 51′ 36″]

**In un triangolo rettangolo trova le misure in gradi degli angoli acuti $\alpha$ e $\beta$ utilizzando la condizione indicata.**

**39** $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ $[\alpha = 22° 30', \beta = 67° 30']$

**40** $\alpha = \beta - 20°$ $[\alpha = 35°, \beta = 55°]$

**41** $\alpha$ supera il doppio di $\beta$ di 15°. $[\alpha = 65°, \beta = 25°]$

**42** Un triangolo isoscele ha ciascun angolo alla base di 27°. Trova l'angolo al vertice in radianti. [2,2]

**43** Un triangolo ha due angoli che misurano 52° e 20°. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e radianti. $\left[108°; \frac{3}{5}\pi\right]$

**44** Un angolo di un triangolo misura 32°, un secondo angolo è $\frac{2}{3}\pi$ radianti. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e in radianti. [28°; 0,49]

**45** Un triangolo ha un angolo doppio di un altro e il terzo angolo misura 24°. Trova la misura in radianti dei tre angoli del triangolo. [0,42; 0,91; 1,82]

**Trova la misura, in gradi o in radianti, di due angoli supplementari $\alpha$ e $\beta$, utilizzando la condizione indicata.**

**46** $\alpha - 3\beta = 27°$ $[\alpha = 141° 45', \beta = 38° 15']$

**47** $\beta - 2\alpha = 80°$ $[\alpha = 33° 20', \beta = 146° 40']$

**48** $\alpha = \beta + \frac{\pi}{3}$ $\left[\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{\pi}{3}\right]$

## Lunghezza di un arco di circonferenza

**49** Calcola la misura, in gradi sessagesimali e in radianti, di un angolo al centro di una circonferenza il cui raggio è uguale a 5 cm e che insiste su un arco lungo 23 cm. [263° 33′ 38″; 4,6]

**50** Calcola la lunghezza di un arco di circonferenza, con il raggio lungo 7 cm, che corrisponde a un angolo al centro uguale a 4,2 radianti. [29,4 cm]