LE 10 COSE CHE DEVI SAPERE DI MATEMATICA
per imparare la fisica

Galileo Galilei (1504 - 1642) è l'inventore del metodo sperimentale: sono gli esperimenti che decidono se un'affermazione è vera o falsa.

Diceva Galileo Galilei, il grande fisico italiano vissuto quattrocento anni fa:

> «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intendere la lingua, conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche...».

Le formule matematiche

Che cosa leggiamo nel libro dell'universo? Per esempio, che la Luna percorre un'orbita pressappoco circolare con la Terra al centro. La distanza Terra-Luna è il raggio dell'orbita, che vale circa 400 000 kilometri.

Immaginiamo, allora, di dire «buongiorno» via radio a un astronauta sulla Luna. I segnali radio viaggiano alla velocità della luce, cioè percorrono 300 000 kilometri al secondo. Quindi il nostro saluto arriva a destinazione dopo poco più di un secondo:

$$\underbrace{\text{tempo di arrivo} = \frac{\text{distanza Terra-Luna}}{\text{velocità della luce}}}_{\text{formula con le parole}} = \frac{400\,000\ \text{km}}{300\,000\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}}} = \frac{4}{3}\ \text{s} = 1{,}3\ \text{s.}$$

Per sapere con quanti secondi di ritardo l'astronauta sente il buongiorno, abbiamo calcolato il rapporto tra due numeri, cioè abbiamo applicato una formula matematica. Riuscire a mettere in relazione i numeri tramite le formule significa «intendere la lingua» della fisica.

Ogni formula risponde a tante domande. Per calcolare il ritardo che subisce la conversazione con un astronauta su Marte, anziché sulla Luna, la formula da usare è la stessa: il tempo (t) è uguale alla distanza (D) diviso la velocità della luce (c).

La distanza media Terra-Marte è 225 milioni di kilometri. Quindi, l'astronauta su Marte riceve il buongiorno dopo 12 minuti e mezzo:

distanza → D; tempo → t; velocità della luce → c

$$\underbrace{t = \frac{D}{c}}_{\text{formula con i simboli}} = \frac{225\,000\,000\ \text{km}}{300\,000\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}}} = 750\ \text{s} = 12{,}5\ \text{min.}$$

Neil Armstrong (1930-2012), l'astronauta che per primo ha messo piede sulla Luna il 20 luglio 1969.

ALCUNE UNITÀ DI LUNGHEZZA	RELAZIONE CON IL METRO
kilometro (km)	1 km = 1000 m
ettometro (hm)	1 hm = 100 m
decametro (dam)	1 dam = 10 m
decimetro (dm)	$1\ \text{dm} = \frac{1}{10}\ \text{m}$
centimetro (cm)	$1\ \text{cm} = \frac{1}{100}\ \text{m}$
millimetro (mm)	$1\ \text{mm} = \frac{1}{1000}\ \text{m}$

ALCUNE UNITÀ DI MASSA	RELAZIONE CON IL KILOGRAMMO
ettogrammo (hg)	$1\ \text{hg} = \frac{1}{10}\ \text{kg}$
grammo (g)	$1\ \text{g} = \frac{1}{1000}\ \text{kg}$

UNITÀ DI MISURA DEL TEMPO
1 min = 60 s;
1 h = 60 min = 3600 s;
1 d = 24 h = 86 400 s;
1 a = 365 d = 31 536 000 s.

1 CALCOLARE UN'EQUIVALENZA

Per esprimere una misura ci vogliono un numero e un'unità di misura

«Sono alto 1,75. La mia massa è aumentata di 2.» Queste frasi non hanno significato. Per esprimere un'altezza, una massa o qualsiasi altra misura, dobbiamo far seguire al numero l'unità di misura, per esempio, «1,75 m» e «2 kg».

L'unità di misura fondamentale della lunghezza è il **metro** (m); quella della massa è il **kilogrammo** (kg). Altre unità di lunghezza e di massa sono elencate nelle due tabelle a lato.

Come si fa a convertire un'unità di lunghezza in un'altra, un'unità di massa in un'altra

Un'equivalenza esprime una stessa misura in due unità diverse.

1,75 m = 175 cm; 2 kg = 20 hg.

428 mm = 42,8 cm; 153 g = 1,53 hg.

Se la seconda unità è 10, 100… volte più piccola della prima, si moltiplica la misura per 10, 100…;

se la seconda è 10, 100… volte più grande della prima, si divide il numero per 10, 100…

Con le unità di area si va di 100 in 100

L'area di una pagina di quaderno è 623,4 cm^2, cioè 6,234 dm^2 o 0,06234 m^2.

L'unità di misura fondamentale dell'area è il **metro quadrato** (m^2), cioè il metro moltiplicato per se stesso. Poiché il decimetro è 10 volte più piccolo del metro, il decimetro quadrato (dm^2) è 10 × 10 = 100 volte più piccolo del m^2; il centimetro quadrato (cm^2) è 100 × 100 = 10 000 volte più piccolo del m^2:

$$1\ \text{dm}^2 = \frac{1}{100}\ \text{m}^2; \qquad 1\ \text{cm}^2 = \frac{1}{100}\ \text{dm}^2 = \frac{1}{10\,000}\ \text{m}^2.$$

Perciò, per esprimere in m^2 una misura data in dm^2, si divide per 100; per esprimere in cm^2 una misura data in dm^2, si moltiplica per 100.

Con le unità di volume si va di 1000 in 1000

L'unità di misura fondamentale del volume è il **metro cubo** (m^3); tra le altre unità ci sono il decimetro cubo (dm^3) e il centimetro cubo (cm^3):

$$1\ \text{dm}^3 = \frac{1}{1000}\ \text{m}^3; \qquad 1\ \text{cm}^3 = \frac{1}{1000}\ \text{dm}^3 = \frac{1}{1\,000\,000}\ \text{m}^3.$$

Il decimetro cubo è chiamato anche litro (L). Un decilitro (dL), un centilitro (cL) e un millilitro (mL) sono, rispettivamente, un decimo, un centesimo e un millesimo di litro:

$$\text{dL} = 0{,}1\ \text{L} = 0{,}1\ \text{dm}^3; \quad 1\ \text{cL} = 0{,}01\ \text{L} = 10\ \text{cm}^3; \quad 1\ \text{mL} = 0{,}001\ \text{L} = 1\ \text{cm}^3.$$

Quali sono e come si usano le relazioni tra le unità di misura del tempo

L'unità di misura fondamentale del tempo è il **secondo** (s). In un minuto (min) ci sono 60 secondi e in un'ora (h) 60 minuti; un giorno (d) è fatto di 24 ore e un anno (a) comprende 365 giorni (366 se bisestile). Perciò valgono le seguenti uguaglianze:

$$15\ \text{min} = \frac{15}{60}\ \text{h} = 0{,}25\ \text{h}; \qquad 15\ \text{min} = 15 \times 60\ \text{s} = 900\ \text{s}.$$

Scomponiamo in un numero intero di giorni, ore e minuti la durata di 3,55 d:

$$3{,}55\ \text{d} = 3\ \text{d} + 0{,}55 \times 24\ \text{h} = 3\ \text{d} + 13{,}2\ \text{h} = 3\ \text{d} + 13\ \text{h} + 0{,}2 \times 60\ \text{min} = 3\ \text{d} + 13\ \text{h} + 12\ \text{min}.$$

1 ★☆☆ La massa di una zanzara vale 0,010 g.

- Esprimila in mg e in kg.

2 ★☆☆ Una borsa che pesa 32 g viene riempita con 1,250 kg di mele, 3,80 kg di pane e 4 merendine da 4,3 dg.

- Esprimi in kilogrammi la massa della borsa piena.

[1,834 kg]

3 ★☆☆ Converti le seguenti lunghezze in metri:

a. 2,5 km = 2 500 m

b. 800 mm = …

c. 71 dam = …

d. 3,4 cm = …

4 ★☆☆ Un ciclista percorre 8 000 m, 7 dam e 2 hm.

- Quanti kilometri ha percorso?
- Quanti metri deve percorrere ancora per totalizzare 10 km?

[8,270 km; 1730 m]

5 ★☆☆ Converti le seguenti masse in kilogrammi:

a. 650 g = ….

b. 9,23 hg = …

c. 18,07 mg = …

d. 45 g = …

6 ★☆☆ Converti le seguenti masse in grammi:

a. 271 hg = …

b. 0,03 kg = …

c. 98,15 dg = …

d. 64,25 mg = …

7 ★☆☆ Un lottatore di sumo ha una massa pari a 230,5 kg. La massa del suo avversario è di 15 200 g in meno.

- Quanti kg pesa l'avversario?

[215,3 kg]

8 ★★☆ Un lavoratore pendolare trascorre in media 2 ore e mezza sui mezzi pubblici ogni giorno, se i mezzi sono tutti puntuali. Alla fine del mese può chiedere un rimborso se in totale i mezzi hanno accumulato un ritardo maggiore del 10% della durata totale dei viaggi nel mese. Nel mese di gennaio il ritardo totale accumulato è stato di 520 minuti.

- Può chiedere il rimborso?
- Quanto tempo ha trascorso in totale sui mezzi pubblici nel mese di gennaio?

[sì; 83,7 h]

9 ★☆☆ In laboratorio devi prelevare da un rubinetto 1,41 L di acqua. Hai a disposizione un cilindro da mezzo litro, un piccolo becher da 12 cL e un cucchiaio da 5 cL.

- Quante volte utilizzi il cilindro, il becher e il cucchiaio per ottenere il volume che devi prelevare?

10 ★★☆ Esprimi le seguenti misure di aree nelle unità indicate:

a. 100 cm^2 = __________ m^2

b. 3,7 km^2 = __________ mm^2

c. 25 dm^2 = __________ hm^2

d. 8,4 dam^2 = __________ cm^2

11 ★★☆ Il giardino della casa di campagna di Dario ha forma rettangolare: è lungo 0,020 km e largo 1500 cm.

- Quanto misura l'area del giardino in m^2?

[300 m^2]

12 ★★☆ Esprimi le seguenti misure di volume nelle unità indicate:

a. 2 dm^3 = __________ cm^3

b. 415 190 mm^3 = __________ m^3

c. 7,93 hm^3 = __________ dam^3

d. 1 868 L = __________ m^3

13 ★★☆ Un serbatoio contiene 2 000 L di acqua.

- A quanti m^3 corrisponde questo volume?
- Quante bottiglie da 2 dm^3 si potrebbero riempire con tale quantità d'acqua?

[2 m^3; 1 000]

14 ★★☆ Esprimi le seguenti misure di tempo nelle unità indicate:

a. 18,27 d = ___ d ___ h ___ min ___ s

b. 12,5 h = ________ s

c. 18 h 50 min = ________ s

d. 3 d 15 h 27 min 41 s = ____ h ____ min

15 ★★☆ Il 12 Novembre Amelia afferma che mancano 17 280 minuti al suo compleanno.

- In che giorno Amelia compie gli anni?

[24 Novembre]

2 RISOLVERE UNA PROPORZIONE

Una proporzione è un'uguaglianza tra rapporti

Con 3 uova si preparano 4 porzioni di tiramisù. Per prepararne 8 porzioni (2 × 4 porzioni) ci vogliono 6 uova (2 × 3 uova).

Numero di porzioni e numero di uova sono in proporzione: per avere più porzioni dobbiamo usare più uova, perché nella ricetta del tiramisù il rapporto tra uova e porzioni è fisso. Vale l'uguaglianza:

estremi
$$3 : 4 = 6 : 8 \qquad \text{o} \qquad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$
medi

Entrambi i rapporti, ai due lati del segno «=», sono uguali a 0,75.

Con 7,50 € si comprano 3 kg di pane; con 5,00 € se ne comprano 2 kg.

I soldi spesi e i kilogrammi di pane acquistati sono in proporzione:

$$(7{,}50\ €) : (3\ \text{kg}) = (5{,}00\ €) : (2\ \text{kg}) \qquad \text{o} \qquad \frac{7{,}50\ €}{3\ \text{kg}} = \frac{5{,}00\ €}{2\ \text{kg}}$$

Entrambi i rapporti sono uguali a 2,50 €/kg, cioè al prezzo unitario del pane (prezzo al kilogrammo).

Risolvere una proporzione significa calcolare il termine incognito quando gli altri tre sono noti

Quante uova servono per preparare 480 porzioni alla sagra del tiramisù?

Indichiamo con x il numero incognito delle uova. In base alla ricetta, x uova stanno a 480 porzioni come 3 uova stanno a 4 porzioni:

$$x : 480 = 3 : 4$$

La soluzione è $x = \dfrac{3 \times 480}{4} = 360$. Infatti, con la sostituzione $x \to 360$ la proporzione è verificata (360 : 480 = 0,75).

> Se l'incognita x è un estremo, il suo valore è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo.

Un tratto di corda lungo 9 m ha una massa di 600 g. Qual è la lunghezza x di un tratto di corda dello stesso tipo che ha una massa di 200 g?

La lunghezza e la massa della corda sono in proporzione:

$$(9\ \text{m}) : (600\ \text{g}) = x : (200\ \text{g}).$$

Questa proporzione è verificata per $x = \dfrac{(9\ \text{m})(200\ \cancel{\text{g}})}{600\ \cancel{\text{g}}} = 3\ \text{m}$.

> Se l'incognita x è un medio, il suo valore è il prodotto degli estremi diviso per l'altro medio.

Figure geometriche simili hanno lati corrispondenti proporzionali

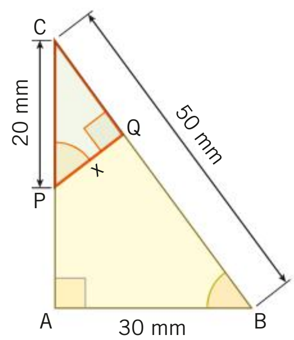
I due triangoli ABC e PQC hanno gli angoli corrispondenti congruenti; perciò sono simili. Qual è la lunghezza x del lato PQ?

Tra le lunghezze dei lati vale la proporzione $\overline{QP} : \overline{AB} = \overline{PC} : \overline{BC}$, cioè

$$x : (30\ \text{mm}) = (20\ \text{mm}) : (50\ \text{mm}),$$

che è verificata per $x = \dfrac{(30\ \text{mm})(20\ \cancel{\text{mm}})}{50\ \cancel{\text{mm}}} = 12\ \text{mm}$.

Possiamo scrivere la proporzione in forme equivalenti (che danno lo stesso risultato), per esempio con i medi scambiati: $\overline{QP} : \overline{PC} = \overline{AB} : \overline{BC}$.



1 ★☆☆ Su una carta geografica con una scala 1 : 1 000 000, due località distano 5,2 cm.

► Quanto vale la loro distanza reale in linea d'aria?

[52 km]

2 ★☆☆ A partire dai seguenti rapporti, puoi costruire 4 proporzioni. Quali?

$\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{4}{2}; \frac{6}{10}; \frac{6}{12}; \frac{12}{24}$

3 ★☆☆ Quali delle seguenti 5 coppie di rapporti non costituiscono una proporzione?

$\frac{2}{3}; \frac{4}{7}; \quad \frac{10}{5}; \frac{12}{6}; \quad \frac{1}{10}; \frac{100}{1000}; \quad \frac{9}{16}; \frac{3}{4}; \quad \frac{25}{625}; \frac{5}{125}$

[la 1ª e la 4ª]

4 ★☆☆ Risolvi le seguenti proporzioni:

a. $12 : 8 = x \quad 2$

b. $x : 27 = 10 : 54$

c. $6{,}0 : x = 1{,}8 : 8{,}1$

d. $250 : 17 = 750 : x$

e. $35 : 5 = 70 : x$

[3; 5; 27; 51; 10]

5 ★☆☆ Risolvi le seguenti proporzioni:

a. $x : 24 = 12 : 384$

b. $x : 72 = 18 : x$

c. $6{,}4 : x = 102{,}4 : 25{,}6$

d. $12 : 16 = x \quad 36$

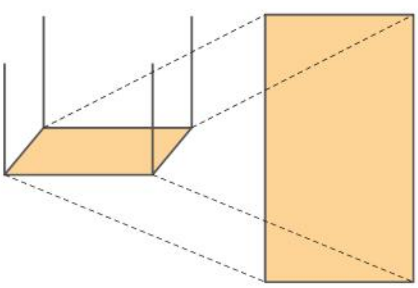
e. $8{,}2 : x = 9{,}84 : 6$

[3/4; 36; 1,6; 27; 5]

6 ★☆☆ Un foglio di carta ha dimensioni rispettivamente pari a 15,0 cm e 10,5 cm.

► È possibile riprodurre su questo foglio un'immagine le cui dimensioni originarie sono rispettivamente pari a 20,0 cm e 12,0 cm, senza tagliare l'immagine né lasciare spazi bianchi?

7 ★★☆ Una stanza rettangolare è larga 4,0 m e lunga 5,2 m. Vogliamo realizzarne una piantina in scala, in modo che la larghezza della stanza risulti 16,0 cm.



► Qual è lunghezza della piantina?

[20,8 cm]

8 ★★☆ Nella foto in scala 1:60, la Jaguar XJ-S è lunga 7,5 cm e largo 3,0 cm.

Nadezda Murmakova/Shutterstock

► Quali sono le dimensioni dell'automobile reale?

[4,5 m; 1,8 m]

9 ★★☆ Un poster, le cui dimensioni di stampa sono 80 cm (larghezza) x 100 cm (altezza), è stato realizzato con un software installato su un *personal computer* il cui schermo misura 34,5 cm (larghezza) x 19,5 cm (altezza).

► Determina le dimensioni effettive del poster quando è visualizzato per intero sullo schermo del pc mantenendo le proporzioni tra larghezza e lunghezza e nell'ipotesi di adottare una visualizzazione "a schermo intero".

[larghezza 15,6 cm; altezza 19,5 cm]

10 ★★☆ Vanessa ha disegnato un triangolo isoscele di base 60 mm e lato obliquo 100 mm. Adesso vuole disegnarne uno simile in modo che i lati obliqui misurino una volta e mezza quelli originari.

► Quanto misurerà la base del nuovo triangolo?

► E l'altezza?

[90 mm; 143 mm]

11 ★★☆ Per preparare 800 g di marmellata di albicocche ci vogliono 1,8 kg di albicocche e 350 g di zucchero.

► Trova le dosi necessarie per preparare 2 kg di marmellata.

[4,5 kg, 875 g]

12 ★★☆ Per ottenere 5 L di olio occorrono 18 kg di olive.

► Quanti litri di olio si ottengono con 936 kg di olive?

[260 L]

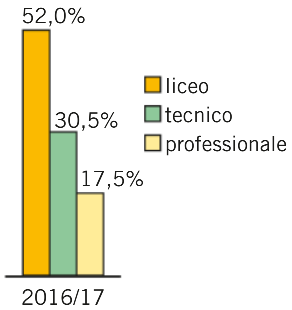
3 CALCOLARE UNA PERCENTUALE

Un rapporto percentuale è una frazione con denominatore 100

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Il simbolo «%» significa «fratto 100», cioè «diviso per 100».

PERCENTUALE	10%		20%		25%		50%		75%		100%	
NUMERO DECIMALE	0,1		0,2		0,25		0,5		0,75		1	
FRAZIONE	$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$	



Una percentuale di un numero è un rapporto percentuale moltiplicato per il numero

Gli iscritti al primo anno delle scuole secondarie italiane di secondo grado sono circa 500 000. Il 52% ha scelto un liceo, il 30,5% un istituto tecnico. Quanti sono i nuovi iscritti dei licei e quanti i nuovi iscritti degli istituti tecnici?

Licei: $\frac{52}{100} \times 500\,000 = 260\,000$. Istituti tecnici: $\frac{30{,}5}{100} \times 500\,000 = 152\,500$.

Per fare calcoli con le percentuali si devono risolvere proporzioni che hanno un termine uguale a 100

Quest'anno sono caduti 1600 mm di pioggia, l'80% della pioggia caduta un anno fa. Quanto è piovuto un anno fa?

La quantità x di pioggia caduta l'anno scorso è data dalla proporzione

$$(1600 \text{ mm}) : x = 80 : 100.$$

Risolvendola, otteniamo $x = \dfrac{(1600 \text{ mm}) \times 100}{80} = 2000$ mm.

Da un valore iniziale e un valore finale si calcola la variazione percentuale

La variazione

$$\text{variazione} = \boxed{\text{valore finale}} - \boxed{\text{valore iniziale}}$$

variazione > 0 → aumento
variazione < 0 → diminuzione

La variazione percentuale

$$\text{variazione } \% = \frac{\text{variazione}}{\boxed{\text{valore iniziale}}} \times 100\%$$

L'indice FTSE MIB della Borsa italiana valeva 16 637,00 punti all'apertura della giornata finanziaria e vale 16 969,74 punti alla chiusura: di quanto è variato in percentuale?

La variazione subita dall'indice (un aumento, perché il valore finale è maggiore di quello iniziale) è:

$$16\,969{,}74 - 16\,637{,}00 = 332{,}74.$$

In percentuale rispetto al valore iniziale, questa variazione è data dalla proporzione

$$332{,}74 : 16\,637{,}00 = x : 100,$$

che è verificata per $x = \dfrac{332{,}74 \times 100}{16\,637{,}00} = 0{,}02 \times 100 = 2$.

Quindi, nella giornata, la variazione percentuale del FTSE MIB è stata +2%. Se l'indice fosse diminuito, la variazione percentuale sarebbe stata negativa.

Da un valore iniziale e una variazione percentuale si calcola il valore finale

Un paio di jeans costa 120 euro. Qual è il suo prezzo con lo sconto del 30%?

$$\underbrace{120\,€}_{\text{valore iniziale}} - \underbrace{\overbrace{\frac{30}{100}}^{\text{variazione }\%} \times (120\,€)}_{\text{variazione}} = 120\,€ - 36\,€ = \underbrace{84\,€}_{\text{valore finale}}.$$

Se una quantità positiva diminuisce del 100% diventa zero. Se una quantità positiva aumenta del 100% raddoppia; se aumenta del 200% triplica.

1 ★☆☆ Determina le percentuali indicate:

a. il 15% di 280 è 42

b. il 24% di 225 è ____________

c. il 3,6% di 115 è ____________

d. lo 0,88% di 0,900 è ____________

2 ★☆☆ Calcola la percentuale:

a. 34 rispetto a 50 è il 68%

b. 0,17 rispetto a 1,2 è il ____________

c. 2,9 rispetto a 7,5 è il ____________

d. 13,8 rispetto a 200 è il ____________

3 ★☆☆ Determina il numero che costituisce la percentuale indicata:

a. il 30% di 240 è 72

b. lo 0,85% di 6,8 è ____________

c. l'11,5% di 14,0 è ____________

d. il 91% di 0,80 è ____________

4 ★☆☆ Il diametro di una penna, misurato con un calibro, è di 1,015 cm con un'incertezza dello 0,5%.

► Qual è, in millimetri, il massimo errore che si può commettere in questa misura?

[0,05 mm]

5 ★☆☆ Maria ha acquistato online un *hard disk* portatile al prezzo di € 62,00. La settimana prima aveva visto lo stesso *hard disk* in un negozio della sua città al prezzo di € 79,00.

► Quanto ha risparmiato in percentuale rispetto al prezzo del negozio?

[21,5 %]

6 ★★☆ In 100 g d'acqua sciogliamo 2,56 g di sale da cucina.

► Qual è la percentuale di sale nella soluzione, cioè la percentuale del sale rispetto all'intera massa dell'acqua e del sale?

[2,50%]

7 ★★☆ Antonio è in laboratorio e deve preparare 2 L di *acqua régia*. Lui sa che l'*acqua régia* è una miscela composta dal 25 % in volume di acido nitrico e dal restante 75 % di acido cloridrico.

► Quanti litri di acido nitrico e di acido cloridrico dovrà utilizzare Antonio per preparare i 2 L di miscela?

[0,5 L e 1,5 L]

8 ★★☆ L'acciaio inossidabile è una lega costituita da ferro (85%), cromo (13%) e carbonio (2%).

► In un oggetto di acciaio inossidabile di massa pari a 1,25 kg qual è la massa rispettivamente del ferro, del cromo e del carbonio contenuti?

[1,06 kg; 0,16 kg; 0,03 kg]

9 ★★☆ Carmen per preparare delle "arepas", piatto tipico venezuelano a base di farina di mais bianco, utilizza 500 g di farina e 625 g di acqua.

► Determina in percentuale la quantità di acqua in più rispetto alla farina.

[25 %]

10 ★★☆ Secondo i dati del Ministero dello Sviluppo Economico in Italia negli anni 2013 e 2014 si sono avuti i seguenti consumi di energia in *milioni di tonnellate*:

	Anno 2013	Anno 2014	Δ%
Combustibili solidi	14,2	13,5	
Gas naturale	57,4	50,7	
Importazione netta di elettricità	9,3	9,6	
Petrolio	58,3	57,3	
Risorse rinnovabili	33,8	35,3	

► Completa la tabella determinando per ciascuna voce la variazione percentuale che si è avuta nell'anno 2014 rispetto al 2013.

[−4,9%; - 11,7%; +3,2%; −1,7%; + 4,4%]

11 ★★☆ Secondo i dati del Catasto Rifiuti dell'ISPRA, l'Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale, nell'anno 2014 la produzione di rifiuti urbani (RU) e la raccolta differenziata (RD) pro capite in Italia sono state:

Area Geografica	Popolazione	RU pro capite, kg/(ab. Anno)	RD pro capite, kg/(ab. Anno)	RD, %
Nord	27 799 803	495,56	280,83	
Centro	12 090 637	546,79	223,33	
Sud	20 905 172	443,35	138,63	
ITALIA	60 795 612	487,79	220,50	

► Completa la tabella determinando per ciascuna area geografica la percentuale che si è avuta di raccolta differenziata rispetto alla produzione di rifiuti urbani nell'anno 2014.

[56,67%; 40,84%; 31,27%; 45,20%]

4 LEGGERE UNA FORMULA - 1A PARTE

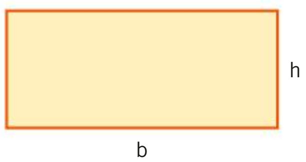
Una formula è un'uguaglianza tra una variabile e un'espressione che contiene altre variabili

L'area del rettangolo è uguale al prodotto della base per l'altezza:

$$\text{area} = \text{base} \times \text{altezza}.$$

Per comodità, chiamiamo A l'area, b la base e h l'altezza. Inoltre sottintendiamo il segno «per», cioè usiamo la convenzione secondo cui due variabili scritte di seguito sono moltiplicate tra loro. Otteniamo la formula:

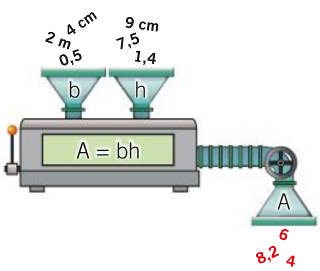
$$A = b\,h.$$



La base b e l'altezza h possono assumere qualsiasi valore. Il valore di A cambia a seconda dei valori assegnati a b e h.

> Una formula definisce la variabile a sinistra dell'uguale in funzione delle variabili a destra.

Per sapere quanto vale la variabile a sinistra dell'uguale, si sostituiscono alle variabili a destra i rispettivi valori



La formula $A = b\,h$ è come una macchina, con due ingressi (b e h) e un'uscita (A).

Inseriamo negli ingressi b e h i valori 2,5 cm e 12 cm, cioè facciamo le sostituzioni $b \to 2{,}5$ cm e $h \to 12$ cm:

$$A = (2{,}5\ \text{cm})\,(12\ \text{cm}).$$

Calcolando l'espressione al secondo membro, otteniamo

$$A = (2{,}5 \times 12)\,(\text{cm} \times \text{cm}) = 30\ \text{cm}^2.$$

La formula-macchina, all'uscita A, dà il valore di 30 cm^2.

> Quando si sostituiscono i valori ai simboli di una formula, si devono includere sempre le unità di misura.

Se il secondo membro di una formula è un rapporto, la variabile al primo membro è una grandezza unitaria

> In fisica si chiamano *grandezze* le quantità come la lunghezza, il tempo, l'area…, che si possono misurare e che si esprimono in relazione a un'unità di misura.

Il rapporto come valore unitario

Chiamiamo D la distanza percorsa da un'automobile, misurata in kilometri, e t la durata del viaggio in ore. La velocità media v dell'automobile è data da:

$$v = \frac{D}{t}.$$

La grandezza v è «unitaria» perché dice quanti kilometri sono percorsi in un'ora, cioè nell'*unità* di tempo. Per esempio, per $D = 50$ km e $t = 0{,}5$ h, si ha $v = \dfrac{50\ \text{km}}{0{,}5\ \text{h}} = 100$ km/h, mentre per $D = 160$ km e $t = 2$ h si ottiene $v = \dfrac{160\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 80$ km/h.

> Una *grandezza unitaria* è il rapporto tra altre due grandezze; come unità di misura, ha il rapporto tra l'unità di misura del numeratore e quella del denominatore.

1 ★☆☆ L'area di un triangolo è data dal semiprodotto della misura della base per la misura dell'altezza relativa. In simboli: $A = bh/2$.

► Calcola le aree in cm^2 dei seguenti triangoli:

a. b = 5 cm; h = 1 dm → A = (5 cm × 10 cm) / 2 = 25 cm^2

b. b = 30 mm; h = 8 cm → A = ____________

c. b = 0,2 dm; h = 70 mm → A = ____________

d. b = 25 cm; h = 0,50 m → A = ____________

[12 cm^2; 7 cm^2; 625 cm^2]

2 ★☆☆ La densità è il rapporto tra la massa di una sostanza e il volume che occupa. In simboli: $d = m/V$.

► Calcola le densità, nelle unità di misura richieste, per le seguenti sostanze:

a. Acqua: m = 2 kg; V = 2 L →
d = ____________ kg/dm^3

b. Mercurio: m = 1 355 kg; V = 0,1 m^3 →
d = ____________ kg/m^3

c. Alcol etilico puro: m = 2 367 g; V = 3 000 cm^3 →
d = ____________ kg/L

d. Piombo: m = 56,70 hg; V = 0,5 dm^3 →
d = ____________ g/cm^3

[1 kg/dm^3; 13 550 kg/m^3; 0,789 kg/L; 11,34 g/cm^3]

3 ★☆☆ La velocità media è il rapporto tra distanza percorsa e l'intervallo di tempo impiegato per percorrerla. In simboli: $v = D/t$.

► Calcola le velocità medie in m/s corrispondenti ai seguenti dati:

a. D = 700 m; t = 28 s → v = _________

b. D = 95 km; t = 56 min → _________

c. D = 238 dm; t = 11 s → _________

d. D = 44 cm; t = 0,06 min → _________

[25 m/s; 28 m/s; 2,16 m/s; 0,12 m/s]

4 ★☆☆ Il volume di una sfera in funzione del raggio r è: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

► Calcola il volume di ciascuna delle sfere corrispondenti ai seguenti raggi:

a. r = 5 mm

b. r = 1,0 dm

[524 mm^3; 4,19 dm^3]

5 ★☆☆ Calcola il volume dei cilindri che hanno raggio di base 15 cm e altezze:

a. $h = 5\text{ cm} \rightarrow V = A_b \times h = \pi r^2 \times h = \pi(15\text{ cm})^2 \times 5\text{ cm} =$
$= 3\,534\text{ cm}^3$

b. h = 20 cm

c. h = 30 cm

d. h = 40 cm

[3 534 cm^3; 14 137 cm^3; 21 206 cm^3; 28 274 cm^3]

6 ★☆☆ La distanza percorsa nel tempo t alla velocità costante v è: $D = vt$.

► Calcola le distanze percorse da un'automobile che viaggia alla velocità costante di 90 km/h nei seguenti intervalli di tempo:

a. t = 10 min

b. t = 30 min

c. t = 2 h

d. t = 5 h

[15 km/h; 45 km/h; 180 km/h; 450 km/h]

7 ★★☆ La densità è definita come rapporto tra la massa di un oggetto e il volume occupato ($d = m/V$).

Quattro liquidi di tipo diverso, tutti della stessa massa pari a 1,5 kg, sono versati in altrettanti contenitori identici di forma cilindrica con raggio di base 5 cm e raggiungono le seguenti altezze:

a. h = 28,10 cm

b. h = 24,18 cm

c. h = 19,10 cm

d. h = 1,4 cm

► Calcola la densità in g/cm^3 dei diversi liquidi.

[0,68 g/cm^3; 0,79 g/cm^3; 1,00 g/cm^3; 13,6 g/cm^3]

8 ★★☆ Il parco di una villa in campagna è lungo 60 m e largo 40 m. Nel parco c'è un pozzo circolare di diametro 4,2 m, una piscina quadrata che occupa un'area di 36 m^2 e un vialetto in cemento largo 2,5 m che si estende in linea retta per tutta la lunghezza del parco e conduce all'ingresso della villa.

► Qual è l'area «verde» rimasta libera?

► Calcola il rapporto $\frac{A_C}{A_{TOT}}$ tra la superficie cementata e la superficie totale del giardino.

[2200 m^2; 0,063]

4 LEGGERE UNA FORMULA - 2A PARTE

In una formula, a una variabile si può sostituire la sua espressione

Il rapporto tra il numero N dei pixel di uno schermo e l'area A della sua superficie, espressa in centimetri quadrati, è una grandezza unitaria n, chiamata *densità superficiale di pixel*. Questa grandezza dice quanti sono i pixel in ogni centimetro quadrato di superficie e può essere usata per specificare la qualità dello schermo.

La formula di n è

densità superficiale di pixel

$$n = \frac{N}{A}.$$

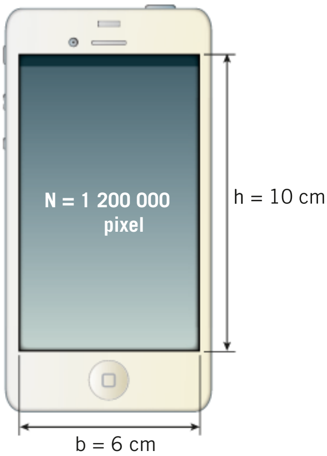
numero di pixel

area

Per esprimere n in funzione della base b e dell'altezza h di uno schermo rettangolare, sostituiamo ad A la sua espressione ($A \to b\,h$). Otteniamo una nuova formula, che non contiene più la variabile A:

$$n = \frac{N}{b\,h}.$$

Per capire l'andamento della variabile a sinistra, si fanno variare una alla volta le variabili a destra



Lo schermo di un nuovo modello di smartphone ha le dimensioni riportate nella figura. Qual è la sua area A? Come varia A, se il costruttore aumenta l'altezza h senza modificare la base b?

La formula $A = b\,h$, per $b = 6$ cm e $h = 10$ cm, dà

$$A = (6 \text{ cm})\,(10 \text{ cm}) = 60 \text{ cm}^2.$$

Se h aumenta e b non cambia, l'area $A = (6 \text{ cm})\,h$ aumenta.

> Se uno dei due termini di un prodotto aumenta e l'altro resta costante, il prodotto aumenta.

Lo schermo dello smartphone contiene $N = 1\,200\,000$ pixel. Qual è la sua densità superficiale di pixel n? Come varia n, se il costruttore aumenta N senza cambiare A?

Dalla formula $n = \frac{N}{A}$, per $N = 1\,200\,000$ pixel e $A = 60$ cm², troviamo:

$$n = \frac{1\,200\,000 \text{ pixel}}{60 \text{ cm}^2} = 20\,000 \text{ pixel/cm}^2.$$

Se N aumenta e A non cambia, $n = \frac{N}{60 \text{ cm}^2}$ aumenta: mettendo più pixel nella stessa area si ottiene una densità superficiale maggiore di $20\,000$ pixel/cm².

> Se il denominatore di un rapporto è fisso e il numeratore aumenta, il rapporto aumenta.

Come varia n se N resta uguale e A aumenta?

In questo caso, $n = \frac{1\,200\,000 \text{ pixel}}{A}$ diminuisce: distribuendo lo stesso numero di pixel in un'area più grande, si ottiene una densità superficiale minore di $20\,000$ pixel/cm².

> Se il numeratore di un rapporto è fisso e il denominatore aumenta, il rapporto diminuisce.

Le stesse considerazioni valgono per la formula $n = \frac{N}{b\,h}$: se N aumenta, con b e h costanti, n aumenta perché N è al numeratore; se N e b restano costanti e h aumenta, n diminuisce perché h è al denominatore.

9 ★☆☆ Considera diverse assi di legno, tutte con sezione rettangolare e di diversa lunghezza. Il legno ha densità pari a 500 kg/m^3. I lati della sezione rettangolare delle assi misurano $a = 5$ cm e $b = 12$ cm.

▶ Calcola la massa delle assi corrispondente alle seguenti lunghezze:

a. $L = 50$ cm

b. $L = 80$ cm

c. $L = 1$ m

d. $L = 1{,}7$ m

[1,5 kg; 2,4 kg; 3 kg; 5,1 kg]

10 ★★☆ Un oggetto di alluminio ha una massa di 2,5 kg e occupa un volume di 930 cm^3.

▶ Calcola il volume occupato da un oggetto di massa pari a 5 kg dello stesso materiale (Ricorda che la densità, pari al rapporto fra la massa e il volume, è costante fissato il materiale.)

▶ Calcola la massa di un oggetto dello stesso materiale se il volume è 465 cm^3.

[1860 cm^3; 1,25 kg]

11 ★★☆ Una sfera di raggio r e di massa m che cade nell'atmosfera accelera durante il suo moto di caduta fino a raggiungere una velocità limite che rimane poi costante fino alla fine del moto.

Questa velocità limite (trascurando il contributo della spinta di Archimede, e finché si mantiene non troppo elevata) è espressa dalla formula: $v = \frac{mg}{6\pi\eta r}$, dove g è l'accelerazione di gravità e η è il coefficiente di viscosità dell'atmosfera.
Immagina di voler mantenere la velocità limite costante, modificando solo le caratteristiche della sfera.

▶ Se il raggio della sfera dimezza, come deve diventare la sua massa per mantenere v costante?

▶ Se la massa della sfera diventa 1/5, come deve variare il suo raggio per mantenere v costante?

12 ★★☆ Il rapporto fra la durata D di un'escursione e il numero N di tappe è costante. Per un certo valore di N, D risulta uguale a 2,5 h.

▶ Quale valore assume D per un numero di tappe triplo rispetto a quello dell'esempio?

▶ Quanto vale D per un numero di tappe pari alla metà di quello dell'esempio?

[$D = 7{,}5$ h; $D = 1{,}25$ h]

13 ★★☆ Il prodotto fra il tempo T necessario a fabbricare un certo prodotto e il numero O di operai che eseguono il lavoro è costante. Per un valore particolare di O, il valore di T risulta pari a 48 ore.

▶ Quale risulterà il valore di T se il numero degli operai viene moltiplicato per cinque volte?

[$T = 9{,}6$ ore]

14 ★★☆ Il rapporto fra la quantità Q di vernice necessaria per verniciare un oggetto sferico e il quadrato del raggio r dell'oggetto è costante. Q risulta uguale a 60 g per un certo valore di r.

▶ Quale valore assume Q se il valore di r è raddoppiato?

[$Q = 240$ g]

15 ★★☆ Giulia ha una scatola a forma di parallelepipedo che misura 40 cm x 60 cm x 20 cm (altezza) e la vuole riempire con dei cubetti di plastica tutti uguali.

▶ Calcola il numero di cubetti che Giulia riesce a mettere nella scatola, senza farli sporgere, se ha a disposizione cubetti con le seguenti misure dello spigolo:

a. $l = 5$ cm

b. $l = 10$ cm

c. $l = 15$ cm

d. $l = 20$ cm

[384; 48; 14; 6]

16 ★★☆ Il rapporto fra la distanza percorsa D e il consumo Q di kilocalorie impiegate è costante. Per percorrere 2 km hai consumato 180 kcal.

▶ Quante kilocalorie consumi se corri per 6 km?

▶ E se corri per 12 km?

[540 kcal; 1080 kcal]

17 ★★☆ L'intensità (I) del suono emesso da una sorgente sonora di potenza P a una distanza r è data dalla seguente formula: $I = \frac{P}{4\pi r^2}$. Immagina di voler mantenere costante l'intensità sonora.

▶ Se la distanza r raddoppia, come diventa la potenza P per mantenere I costante?

▶ Se la potenza diventa 1/4, a che distanza r l'intensità I resta costante?

[$P' = 4P$; $r' = \frac{1}{2}r$]

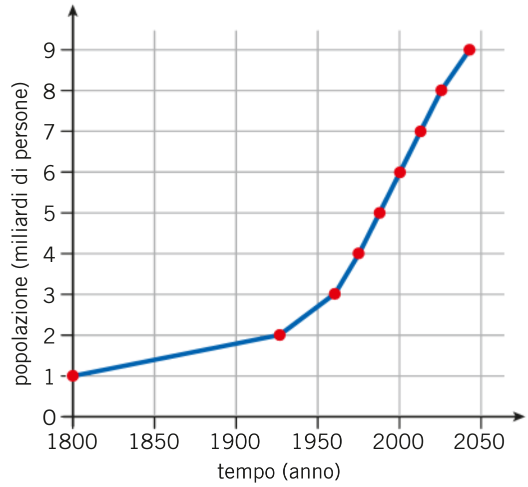
5 LEGGERE E DISEGNARE UN GRAFICO - 1A PARTE

Un grafico rappresenta una corrispondenza tra due variabili

Consideriamo la corrispondenza popolazione mondiale ↔ tempo.

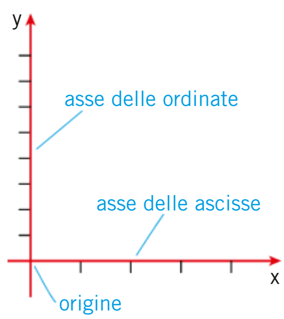
TEMPO (ANNO)	POPOLAZIONE MONDIALE (MILIARDI DI PERSONE)
1804	1
1927	2
1959	3
1974	4
1987	5
1999	6
2012	7
2026	8
2042	9

Stime storiche e previsioni USCB (*United States Census Bureau*)



La corrispondenza tra due variabili può essere descritta da una tabella, da una formula e da un grafico.

Piano



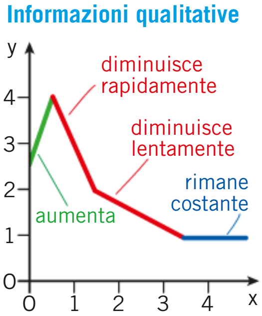
Un grafico cartesiano è fatto di due assi e una linea

Il grafico della popolazione mondiale in funzione del tempo riporta la variabile «tempo» sull'asse orizzontale e la variabile «popolazione» sull'asse verticale. La linea descrive l'andamento della popolazione al passare del tempo.

Un *asse orientato* è una retta in cui fissiamo un verso e una *scala*: a ogni lineetta della scala corrisponde un valore riferito all'appropriata unità di misura.

Due assi orientati perpendicolari definiscono un piano cartesiano. Un grafico cartesiano è una linea (o un insieme di punti) in un piano cartesiano.

Informazioni qualitative

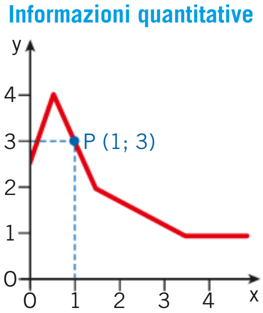


Un grafico dà informazioni qualitative

Il grafico popolazione-tempo indica che la popolazione mondiale cresce al passare del tempo; mostra, inoltre, che l'aumento di popolazione è diventato progressivamente più rapido (bastano meno anni per avere lo stesso aumento di popolazione).

In un grafico cartesiano, una linea inclinata verso l'alto indica che la variabile y aumenta all'aumentare della variabile x; una linea inclinata verso il basso dice che y diminuisce all'aumentare di x e una linea orizzontale dice che y non varia.

Informazioni quantitative



Un grafico dà informazioni quantitative

Il grafico popolazione-tempo mostra che la popolazione mondiale era di 1 miliardo di persone attorno al 1800, aveva raggiunto i 2 miliardi verso il 1925, i 6 miliardi all'incirca nel 2000 e così via.

Ogni punto di un grafico ha due coordinate: un'ascissa x e un'ordinata y. Perciò,

a ogni punto P di un grafico corrispondono due valori: uno della variabile x e uno della variabile y.

1 ★☆☆ Un automobilista registra in una tabella i kilometri percorsi nel corso di ogni mese. La tabella ottenuta alla fine dell'anno è la seguente:

mese	km
1	900
2	1300
3	1400
4	1400
5	1200
6	1200
7	800
8	2000
9	800
10	1300
11	1400
12	1000

► Scegli un opportuno fattore di scala sui due assi e costruisci il grafico corrispondente alla tabella come insieme di punti.

2 ★☆☆ La tabella riporta la temperatura di una stanza al passare del tempo.

t (min)	T (°C)
0	18,0
5	18,2
10	18,4
15	18,5
20	18,5
25	18,3
30	18,2
35	18,3
40	18,2
45	18,1

► Traccia un grafico a partire dalla tabella.

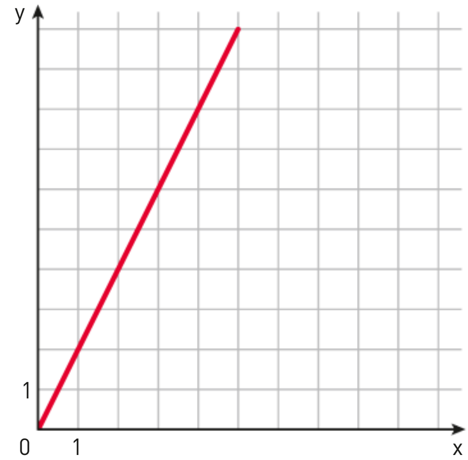
► Descrivi a parole l'andamento del grafico.

► Disegna un altro grafico che dia la sensazione che la temperatura vari di molto.

3 ★☆☆ La formula che esprime la relazione fra due grandezze è $y = 10 - x^2$.

► Assegnando a x un certo numero di valori da 0 a 3, traccia il grafico corrispondente.

4 ★☆☆ Il grafico qui sotto rappresenta la relazione fra due grandezze x e y.



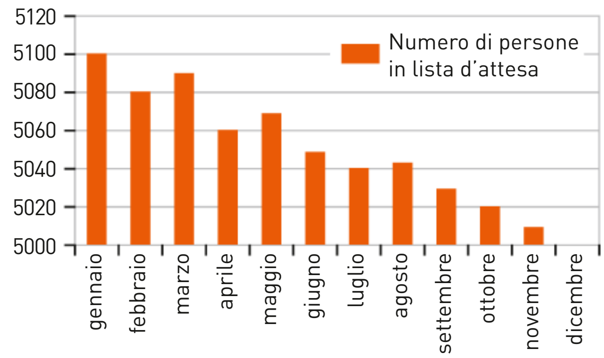
La relazione fra le due grandezze può essere espressa con la formula $y = k\,x$, dove k è un numero assegnato.

► Determina il valore di k.

5 ★☆☆ Il volume di un cilindro retto di raggio di base r e altezza h è dato dalla formula $V = \pi r^2 h$.

► Costruisci il grafico V, r corrispondente ai cilindri di altezza 50 cm assegnando al raggio di base valori compresi tra 4 cm e 50 cm.

6 ★★☆ Il diagramma illustra la riduzione dei pazienti in lista d'attesa negli ospedali di una determinata autorità sanitaria.



► A quanto equivale in percentuale la diminuzione di pazienti in lista d'attesa da gennaio a dicembre?

[2,0%]

7 ★★☆ La relazione tra due grandezze è $y = 5x + k$.

► Quanto vale k se per $x = 3$ si ha $y = 17$?

[$k = 13$]

5 LEGGERE E DISEGNARE UN GRAFICO - 2A PARTE

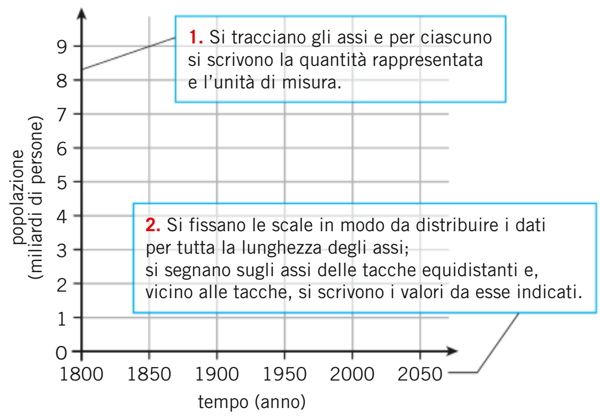
Per costruire un grafico si può partire da una tabella di dati

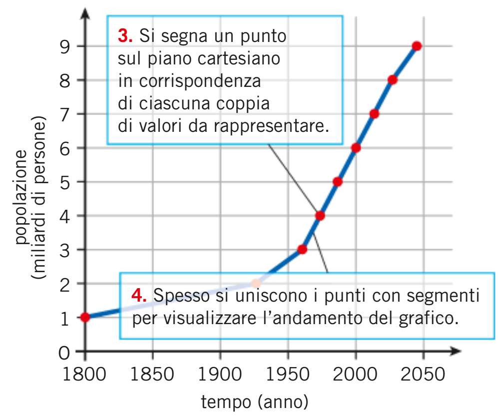
La tabella della popolazione mondiale contiene nove coppie di valori. Nella colonna «tempo» ci sono gli anni, compresi in un intervallo di 2042 − 1804 = 238 anni; nella colonna «popolazione» ci sono i miliardi di persone, da 1 a 9.

Nel grafico le tacche segnate sull'asse orizzontale sono separate di 1 cm. L'origine dell'asse corrisponde all'anno 1800 e a ogni centimetro corrisponde un intervallo di tempo di 50 anni; perciò la prima tacca dopo l'origine indica l'anno 1850, la seconda l'anno 1900 e così via. Nello spazio di cinque tacche sono racchiusi, così, tutti i dati della colonna «tempo».

Sull'asse verticale, l'origine corrisponde a zero miliardi e le tacche, separate di 0,5 cm, indicano 1 miliardo, 2 miliardi eccetera.

Prima di disegnare il grafico si devono esaminare i dati. Poi si procede per passi.





Per costruire un grafico si può partire da una formula

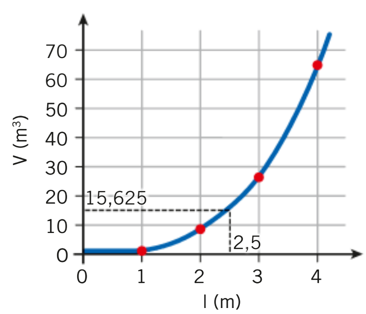
Il volume V del cubo in funzione del suo lato l è espresso dalla formula

$$V = l^3.$$

Per qualsiasi valore di l la formula dà il corrispondente valore di V; perciò da essa si possono costruire infinite tabelle. Ne otteniamo una assegnando a l i valori 1 m, 2 m, 3 m eccetera.

Rappresentiamo i dati della tabella con un grafico e congiungiamo i punti.

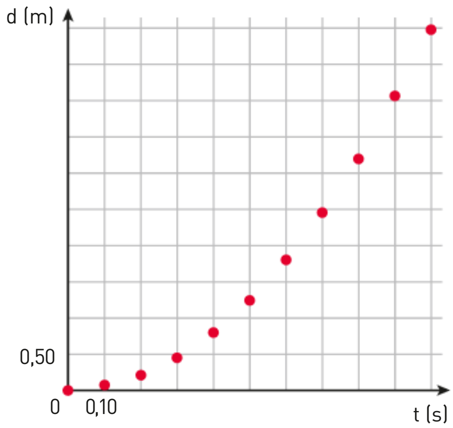
Lato l (m)	Volume V (m^3)
1	1
2	8
3	27
4	64



Poiché il grafico deriva da una formula, per congiungere i punti usiamo una *linea continua* anziché un una spezzata. Il grafico, infatti, rappresenta anche le coppie di valori non riportate nella tabella.

La linea disegnata deve descrivere la formula correttamente: per esempio, deve mettere in corrispondenza l'ascissa $l = 2{,}5$ m con l'ordinata $V = l^3 = (2{,}5\text{ m})^3 = 15{,}625\text{ m}^3$, cioè deve passare per il punto (2,5; 15,625).

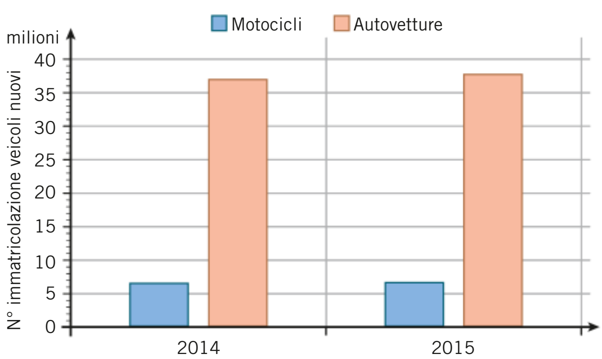
8 ★★☆ Il grafico di seguito è stato costruito in base ai dati sulla caduta di un oggetto all'interno di un tubo dove era stato fatto il vuoto. Con un sonar, lo sperimentatore ha registrato a intervalli regolari di tempo le distanze percorse dall'oggetto.



- ▶ Qual è l'ultimo istante in cui è stata effettuata una registrazione?
- ▶ Qual è la massima distanza misurata dal sonar?
- ▶ Compila una tabella corrispondente al grafico.

[1,00 s; 5,0 m]

9 ★★☆ Nel diagramma seguente sono riportati i dati di immatricolazione di motocicli (M) e autoveicoli (A) nuovi in Italia forniti da *ACI – Statistiche Automobilistiche* per gli anni 2014 e 2015. La divisione più piccola sull'asse y corrisponde a un numero di veicoli pari a 25 000.



- ▶ Dai una stima approssimata, a partire dal diagramma, delle quantità dei dati forniti da ACI.
- ▶ Calcola la variazione percentuale delle immatricolazioni nell'anno 2015 rispetto al 2014 per entrambe le categorie di veicoli.

L'ACI fornisce anche i dati sul parco veicoli circolanti. La tabella seguente riporta questi dati per motocicli e autoveicoli negli anni 2014 e 2015.

ANNO	Motocicli circolanti	Autovetture circolanti
2014	6 505 625	37 080 753
2015	6 543 612	37 351 233

- ▶ Costruisci un diagramma simile al precedente in cui in ascissa ci siano gli anni e in ordinate il numero di veicoli circolanti per le due tipologie (motocicli e autovetture).

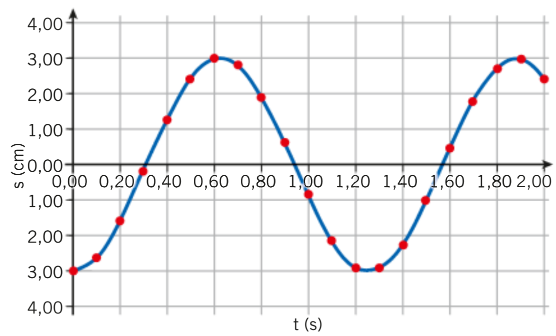
[**2014**: M = 150 000; A = 1 375 000; **2015**: M = 175 000; A = 1 600 000; M: +14,3 %; A: +14,1 %]

10 ★★☆ In un esperimento sono stati trovati i seguenti valori della grandezza y in corrispondenza della grandezza x:

Valore di y	Valore di x	Punto
0	0	A = Origine degli Assi
4	1	B
4	3	C
2	5	D

- ▶ Disegna il grafico x, y.
- ▶ Descrivi l'andamento della variabile y nei tre tratti.

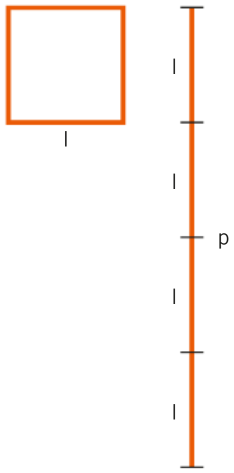
11 ★★☆ Un corpo di massa m è appeso in equilibrio a una molla fissata al soffitto. Luisa tira il corpo allungando la molla e poi lo rilascia: il corpo comincia a oscillare intorno alla sua posizione di equilibrio. Sul seguente grafico sono riportati: sull'asse delle ordinate, la posizione del corpo (lo zero rappresenta la posizione iniziale di equilibrio), e su quello delle ascisse il tempo.



Osservando il grafico:

- ▶ individua gli istanti di tempo in cui il corpo di massa m passa dalla posizione di equilibrio;
- ▶ determina l'istante di tempo in cui l'oggetto raggiunge per la seconda volta la posizione di massima altezza dal pavimento.

[0,32 s; 0,94 s; 1,57 s; 1,88 s]



6 RICONOSCERE UNA PROPORZIONALITÀ DIRETTA

Due variabili sono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante

Il perimetro p del quadrato è uguale a 4 volte il lato l:

$$p = 4\,l.$$

Quindi il rapporto tra p e l è costante (sempre uguale a 4):

$$\frac{p}{l} = \frac{4\,\cancel{l}}{\cancel{l}} = 4.$$

Per questa proprietà, il perimetro e il lato del quadrato sono *direttamente proporzionali*.

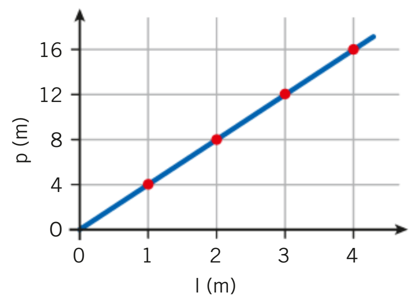
Indichiamo con k una costante. Tra due variabili x e y si ha una relazione di *proporzionalità diretta* se vale l'uguaglianza:

$$\frac{y}{x} = k$$

Com'è fatta la formula di una proporzionalità diretta

Assegniamo al lato l del quadrato i valori 1 m, 2 m, 3 m eccetera. Ricaviamo i corrispondenti valori del perimetro dalla formula $p = 4\,l$ e riportiamoli in una tabella; poi disegniamo il grafico che rappresenta la corrispondenza tra p e l.

Lato l (m)	Perimetro p (m)
1	4
2	8
3	12
4	16



Se il lato raddoppia, il perimetro raddoppia; se il lato triplica, il perimetro triplica…

Due variabili x e y direttamente proporzionali sono legate dalla formula:

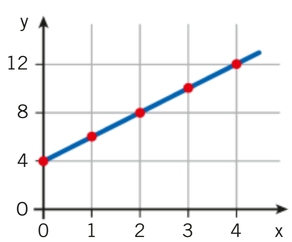
$$y = k\,x$$

In base a questa formula, al raddoppiare o triplicare di x, anche y raddoppia o triplica.

Il grafico di una proporzionalità diretta è una retta che passa per l'origine

Osserviamo il grafico del perimetro p in funzione del lato l: tutti i suoi punti appartengono a una retta che passa per l'origine degli assi.

Si ottiene lo stesso tipo di grafico per ogni coppia di variabili x e y direttamente proporzionali.



La proporzionalità diretta è un caso particolare di dipendenza lineare

Il grafico che rappresenta la formula $y = 2\,x + 4$ è una retta che non passa per l'origine, ma interseca l'asse verticale nel punto (0; 4).

Indichiamo con k e q due costanti. Due variabili x e y si dicono *linearmente dipendenti* se vale la formula:

$$y = k\,x + q$$

Per $q = 0$, la dipendenza lineare si riduce a una relazione di proporzionalità diretta.

1 ★☆☆ Scrivi il valore costante del rapporto fra queste coppie di grandezze, secondo l'esempio:

a. Perimetro P e lato l di un quadrato: $P/l = 4$

b. Perimetro P e lato l di un triangolo equilátero:

c. Circonferenza C e raggio R di un cerchio:

d. Diagonale d e lato l di un quadrato:

e. Area A e quadrato R^2 del raggio di un cerchio:

2 ★☆☆ La tabella seguente riporta il volume e la massa di quantità variabili di alcol.

volume (cm³)	massa (g)
5	4,0
10	8,0
15	12,0
20	16,0
25	20,0

- Qual è il valore costante del rapporto fra massa e volume nell'alcol?
- Qual è la formula che lega la massa m e il volume V di una quantità data di alcol?

[0,80 g/cm³; $m = (0{,}80\ \text{g/cm}^3)\ V$]

3 ★☆☆ Costruisci il grafico della relazione di proporzionalità presentata nell'esercizio precedente.

- Si tratta di una retta passante per l'origine? Perché?

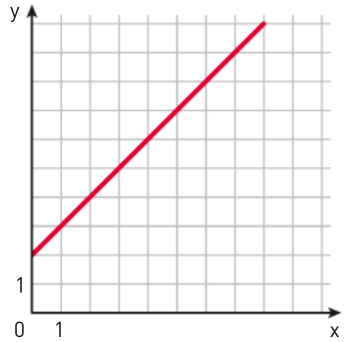
4 ★☆☆ La tabella seguente riporta due grandezze x e y direttamente proporzionali:

x (s)	y (m)
20	72
40	…
…	180
90	…
…	…

- Completa la tabella con i valori mancanti.
- Stabilisci il valore della costante di proporzionalità.
- Scrivi la formula che lega le variabili y e x.
- Costruisci un grafico di tale relazione di proporzionalità.

[$\frac{y}{x} = 3{,}6$ m/s]

5 ★★☆ Il grafico qui sotto rappresenta la relazione di dipendenza lineare fra le grandezze x e y.



- Determina la formula che esprime tale relazione nella forma $x = k\,x + q$.
- Cosa accade alla relazione fra x e y se si pone $q = 0$?
- Come si trasforma un grafico in questo caso?

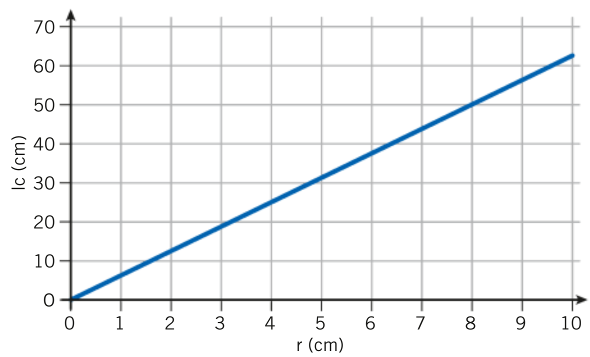
[$y = x + 2$]

6 ★★☆ Un'automobilista dopo aver percorso 10 km procede a una velocità media costante. Osservando il contachilometri, rileva che dopo 1 h ha percorso 60 km, dopo 2 h 120 km e dopo 3 h 180 km.

- Scrivi l'equazione che rappresenta la distanza percorsa dall'automobilista in funzione del tempo.
- Rappresenta l'equazione trovata su un diagramma cartesiano.
- Come si trasforma il grafico se la distanza iniziale percorsa fosse stata di 30 km anziché di 10 km?

[$s = 10\ \text{km} + (60\ \text{km/h})t$]

7 ★★☆ Il grafico seguente rappresenta la lunghezza (in cm) di circonferenze in funzione del proprio raggio (in cm).

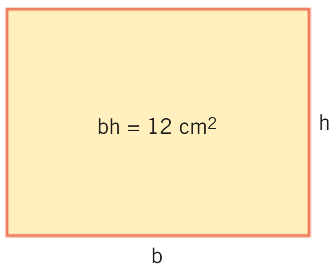


- Di che tipo di relazione di proporzionalità si tratta?
- Scrivi l'equazione che rappresenta la retta del grafico.
- Se sull'asse delle ascisse fosse stato riportato il diametro anziché il raggio, mantenendo la stessa scala, come sarebbe cambiato il grafico?

[$l_c = 6{,}28r$]

7 RICONOSCERE UNA PROPORZIONALITÀ INVERSA

Due variabili sono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante



Un rettangolo di area 12 cm² ha un numero infinito di rettangoli equivalenti (con la stessa area). Il prodotto tra la base b e l'altezza h di tutti questi rettangoli è uguale a 12 cm², cioè è costante:

$$b\,h = 12\ \text{cm}^2.$$

Per questa proprietà, la base e l'altezza dei rettangoli equivalenti sono *inversamente proporzionali*.

Indichiamo con k una costante. Tra due variabili x e y si ha una relazione di *proporzionalità inversa* se vale l'uguaglianza:

$$x\,y = k$$

Com'è fatta la formula di una proporzionalità inversa

In funzione dell'altezza h, la base b di un rettangolo di area 12 cm² è data dalla formula

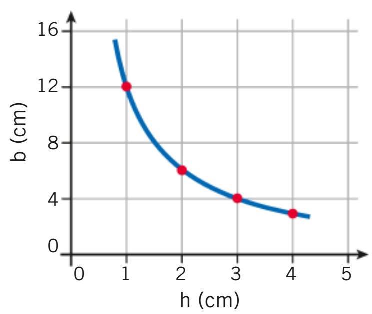
$$b = \frac{12\ \text{cm}^2}{h}.$$

Assegniamo a h i valori 1 cm, 2 cm, 3 cm eccetera e sostituiamoli nella formula per calcolare i corrispondenti valori di b.

$b = \frac{12\ \text{cm}^2}{1\ \text{cm}} = 12\ \text{cm}$ $b = \frac{12\ \text{cm}^2}{2\ \text{cm}} = 6\ \text{cm}$ $b = \frac{12\ \text{cm}^2}{3\ \text{cm}} = 4\ \text{cm}$

Riportiamo le coppie di valori in una tabella; poi disegniamo il grafico cartesiano che rappresenta la corrispondenza tra b e h.

	Altezza h (cm)	Base b (cm)	
	1	12	
×2 ×3	2	6	×1/2 ×1/3
	3	4	
	4	3	



Raddoppiando l'altezza, la base si dimezza; triplicando l'altezza, la base diventa un terzo…

Due variabili x e y inversamente proporzionali sono legate dalla formula:

$$y = \frac{k}{x}$$

In base a questa formula, se x raddoppia o triplica, y diventa la metà o un terzo.

Il grafico di una proporzionalità inversa è un ramo di iperbole

Osserviamo il grafico di b in funzione di h: tutti i suoi punti appartengono a un ramo di iperbole equilatera.

Si ottiene lo stesso tipo di grafico per ogni coppia di variabili x e y inversamente proporzionali.

1 ★★★ Considera i triangoli di base b e altezza h.

- Scrivi l'equazione che rappresenta l'area dei triangoli in funzione della base b e dell'altezza h.
- Costruisci il grafico che ha in ordinata b e in ascissa h per i triangoli di area pari a 25 cm^2. Assegna ad h valori compresi tra 1 cm e 50 cm.

2 ★★★ Considera i coni retti di base circolare e volume pari a 5 dm^3.

- Scrivi l'equazione che rappresenta il volume dei coni retti.
- Traccia il grafico che riporta sull'asse delle ascisse l'altezza h e sull'asse delle ordinate l'area di base A_b per i coni retti. Considera valori dell'altezza compresi tra 1 dm e 30 dm.

3 ★★★ Il prodotto di due lunghezze x e y inversamente proporzionali ha il valore costante di 60 m^2.

- Qual è il valore di y se x è pari a 5,0 m?
- Assegna ad x una serie di valori, calcola i corrispondenti valori di y e traccia il grafico della loro relazione.

[12 m]

4 ★★★ Con uno stesso volume di liquido, pari a 50 cm^3, riempiamo alcuni recipienti cilindrici di diametro variabile. Il liquido raggiunge in ogni caso un'altezza diversa.

- Compila la seguente tabella relativa all'esempio descritto:

area di base a (cm^2)	altezza raggiunta dal liquido h (cm)
10	5,0
20	
30	
40	
50	

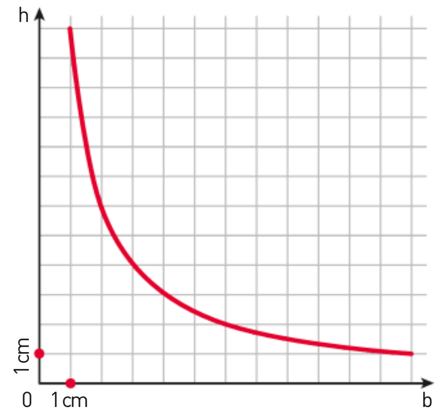
- Qual è la formula che esprime la relazione fra A e h?

5 ★★★ Rita vuole preparare una soluzione acquosa con 10 g di bicarbonato di sodio (detto comunemente *bicarbonato*). Sciogliendo la stessa quantità di *bicarbonato* in diversi volumi d'acqua si ottengono concentrazioni diverse, poiché $c = m/V$.

- Determina le concentrazioni in g/L che ottiene Rita utilizzando m = 10 g e i volumi d'acqua riportati nella seguente tabella:

V di H_2O (mL)	V di H_2O (L)	Concentrazione c (g/L)
200		
250		
500		
750		
1000		

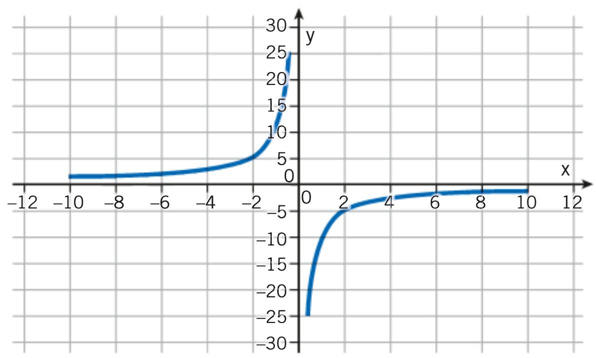
6 ★★★ Il grafico qui sotto illustra la relazione fra la base b e l'altezza h di una serie di rettangoli diversi, aventi tutti la stessa area.



- Qual è il valore comune dell'area dei rettangoli?
- Qual è la formula che esprime la relazione fra b e h?

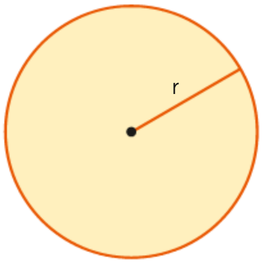
[12 cm^2; h = 12 cm^2/b]

7 ★★★ Il grafico seguente illustra come varia la grandezza y al variare della grandezza x.



- Qual è la relazione che lega x e y?
- Che valore assume y per $x = 5$? E per $x = -5$?

[$xy = -10$; $y = -2$; $y = +2$]



8 RICONOSCERE UNA PROPORZIONALITÀ QUADRATICA

Si ha una proporzionalità quadratica se una variabile è direttamente proporzionale al quadrato di un'altra

L'area A del cerchio è π volte il raggio r elevato al quadrato:

$$A = \pi r^2.$$

Quindi il rapporto tra A e r^2 è costante. In altri termini, A è *direttamente proporzionale al quadrato* di r:

$$\frac{A}{r^2} = \frac{\pi \cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} = \pi.$$

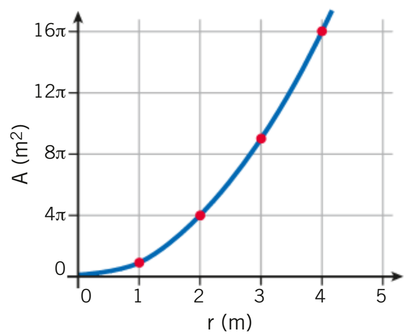
Indichiamo con k una costante. Tra due variabili x e y si ha una relazione di *proporzionalità quadratica* se vale l'uguaglianza:

$$\frac{y}{x^2} = k$$

Com'è fatta la formula di una proporzionalità quadratica

Per r uguale a 1 m, 2 m, 3 m eccetera, ricaviamo i corrispondenti valori di A dalla formula $A = \pi r^2$; riportiamoli in una tabella e disegniamo il grafico che rappresenta la tabella e la formula.

Raggio r (m)	Area A (m^2)
1	π
2	4π
3	9π
4	16π



Raddoppiando il raggio del cerchio, la sua area quadruplica; triplicando il raggio, l'area diventa nove volte più grande…

Se y è direttamente proporzionale al quadrato di x, la formula che esprime y in funzione di x è:

$$y = k\,x^2$$

In base a questa formula, se x raddoppia o triplica, y diventa quattro o nove volte più grande.

Il grafico di una proporzionalità quadratica è un arco di parabola

Osserviamo il grafico di A in funzione di r: la curva ottenuta è un arco di parabola con il vertice nell'origine degli assi.

Si ottiene lo stesso tipo di grafico ogni volta che una variabile y è direttamente proporzionale al quadrato di un'altra variabile x.

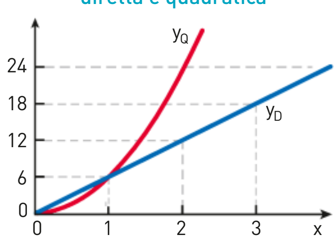
All'aumentare di x, l'aumento di y è più rapido nella proporzionalità quadratica e più lento nella proporzionalità diretta

Confrontiamo i grafici che rappresentano le formule

$y_D = 6\,x$ (proporzionalità diretta) e $y_Q = 6\,x^2$ (proporzionalità quadratica).

Quando x è piccola, y_Q è minore di y_D. A mano a mano che x aumenta, y_Q diventa molto maggiore di y_D e la differenza tra y_Q e y_D aumenta.

Proporzionalità diretta e quadratica



1 ★★★ Dopo aver scritto l'equazione che fornisce la superficie A di un cubo di lato l, calcola A per i seguenti valori di l:

a. l = 10 dm → $A = 6 \times l^2 = 6 \times (10\ \text{dm})^2 = 600\ \text{dm}^2$

b. l = 15 cm

c. l = 32 mm

d. l = 0,021 km

2 ★★★ Considera una sfera di raggio r.

- Scrivi l'equazione che fornisce la superficie A della sfera.
- Calcola l'area per valori di r compresi tra 1 cm e 30 cm (scegline una decina a tuo piacimento) e raccogli in una tabella i valori di r e le aree corrispondenti.
- Costruisci un grafico con tali valori: che tipo di grafico hai ottenuto?

3 ★★★ L'attrazione gravitazionale F fra due corpi rispettivamente di massa M_1 e M_2 posti alla distanza d si determina con la formula

$$F = G \times \frac{M_1 M_2}{d^2},$$

dove G è una costante detta costante di gravitazione universale.

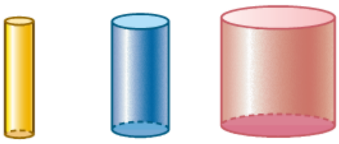
- Che tipo di relazione esiste fra F e d per due corpi dati?

4 ★★★ Quando un oggetto cade all'interno di un tubo in cui è stato fatto il vuoto, la distanza d da esso percorsa e l'intervallo di tempo i da esso impiegato sono legati dalla relazione $d = 4{,}9\ i^2$.

- Qual è la distanza percorsa da un oggetto che cade in questo modo in un intervallo di 1,2 s?

[7,1 m]

5 ★★★ In un cilindro di altezza h = 1,00 m, il volume V aumenta rapidamente all'aumentare del raggio r.



- Assegna al raggio una serie di valori compresi fra 0,10 m e 1,00 m, determina il corrispondente valore del volume e traccia il grafico in base alla tabella ottenuta.

6 ★★★ Il valore della forza di repulsione tra due cariche elettriche positive si calcola con la seguente formula, nota come "legge di Coulomb":

$F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$, dove k è una costante e r è la distanza tra le cariche positive q_1 e q_2.

- Che tipo di relazione esiste tra la forza F e la distanza r tra due cariche date?
- Se la distanza r raddoppia come diventa la forza F?

[$F' = F/4$]

7 ★★★ I valori riportati nella tabella rappresentano due variabili legate da una relazione di proporzionalità:

x	y
0	0
1	4
2	16
3	36
4	64
5	100

- Che tipo di relazione c'è tra x e y?
- Scrivi l'equazione che rappresenta tale relazione.

[$y = 4x^2$]

8 ★★★ L'energia cinetica di un corpo di massa m che si muove alla velocità v è: $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$.

- Per un dato corpo, come varia E_c al variare di v?
- Disegna il grafico che ha in ordinate l'energia cinetica (in Joule) e in ascissa la velocità (in m/s) per un corpo di massa 1 kg .

9 ★★★ Per un veicolo di grandi dimensioni che si muove nell'aria con velocità elevata, la relazione che esiste fra la forza di attrito dell'aria sull'oggetto e la sua velocità è $F = kv^2$, dove k è una costante che dipende dalla densità dell'aria e dalla dimensione dell'oggetto.

- Immagina di triplicare la velocità. Cosa succede alla forza F ?
- Immagina di dimezzare la velocità. Cosa succede alla forza F ?
- Che relazione esiste fra la forza e la velocità dell'oggetto?

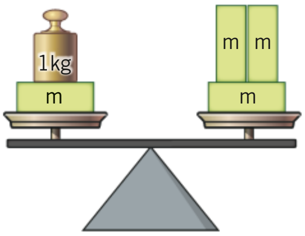
10 ★★★ Un oggetto scivola senza attrito lungo una discesa e a intervalli di un secondo vengono scattate delle foto per registrare la sua posizione. Ecco la tabella dei dati raccolti:

tempo t (s)	**Tempo al quadrato t^2 (s^2)**	**Posizione s (m)**
1	1	0,75
2	4	3,00
3	9	6,75
4	16	12,00

- Stabilisci che relazione di proporzionalità sussiste fra la posizione dell'oggetto lungo la discesa e il tempo.
- Scrivi l'equazione che rappresenta tale relazione.

[$s = (0{,}75\ \text{m/s}^2)t^2$]

9 RISOLVERE UN'EQUAZIONE A UN'INCOGNITA 1A PARTE



Un'equazione a un'incognita è un'uguaglianza tra due espressioni, verificata per particolari valori della variabile incognita

Qual è la massa m che sommata a 1 kg è uguale al proprio triplo?

Questa domanda si traduce nell'equazione

$$m + 1\text{ kg} = 3\,m,$$

in cui m è l'incognita, cioè la variabile di cui bisogna trovare il valore affinché l'espressione a sinistra dell'uguale sia uguale a quella a destra.

Se mettiamo su un piatto di una bilancia un corpo di massa m assieme a un peso da 1 kg, la bilancia è in equilibrio quando ha, sull'altro piatto, tre corpi della stessa massa m.

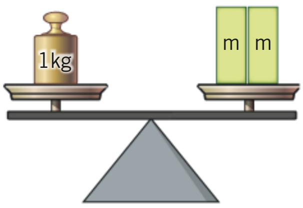
Se, per esempio, m fosse 1 kg, su un piatto ci sarebbero 1 kg + 1 kg = 2 kg e sull'altro 3 × 1 kg = 3 kg; quindi la bilancia non sarebbe in equilibrio. Il valore 1 kg non soddisfa l'equazione perché non verifica l'uguaglianza.

Risolvere l'equazione significa trovare il valore dell'incognita che rende il primo membro uguale al secondo

La soluzione dell'equazione è $m = \frac{1}{2}$ kg.

Infatti, sostituendo a m il valore $\frac{1}{2}$ kg, il primo membro diventa $\frac{1}{2}$ kg + 1 kg = $\frac{3}{2}$ kg e il secondo membro diventa $3 \times \frac{1}{2}$ kg = $\frac{3}{2}$ kg, cioè uguale al primo.

Per risolvere l'equazione si isola l'incognita, applicando i principi di equivalenza



Se la bilancia è in equilibrio e da tutti e due i piatti togliamo una massa m, essa resta in equilibrio. Perciò, il valore di m che soddisfa l'equazione di partenza soddisfa anche l'equazione che otteniamo sottraendo m a entrambi i membri:

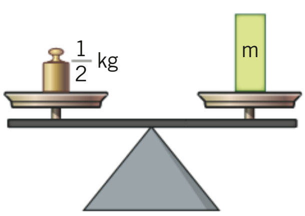
$$\cancel{m} + 1\text{ kg} - \cancel{m} = 3m - m.$$

Semplificando le espressioni ai due membri troviamo:

$$1\text{ kg} = 2\,m \qquad \text{o} \qquad 2\,m = 1\text{ kg}.$$

Primo principio di equivalenza: se si aggiunge o si sottrae uno stesso numero o una stessa espressione a entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'altra equazione che ha la stessa soluzione della prima, cioè è *equivalente* alla prima.

Il primo principio di equivalenza giustifica la *regola del trasporto*: si può spostare da un membro all'altro un termine di un'equazione, cambiandolo di segno.



La bilancia resta in equilibrio anche se dimezziamo la massa posta a destra e quella posta a sinistra. Quindi possiamo dividere i due membri per 2:

$$\frac{\cancel{2}\,m}{\cancel{2}} = \frac{1\text{ kg}}{2}.$$

Abbiamo così isolato l'incognita m, cioè trovato il valore di m che rende uguali i due membri dell'equazione:

$$m = \frac{1}{2}\text{ kg}.$$

Secondo principio di equivalenza: se si moltiplicano o si dividono entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero diverso da zero o una stessa espressione diversa da zero, si ottiene un'equazione equivalente.

1 In queste equazioni, isola l'incognita e specifica quale principio hai usato:

a. $x + 7 = 8$ $x = 8 - 7$ Primo principio

b. $4\,x = 35$ ______________________

c. $27 - x = 30$ ______________________

d. $5x - 9 = 31$ ______________________

2 In queste equazioni, isola l'incognita x applicando i principi di equivalenza:

a. $x + a = b$ $x = b - a$

b. $kx = h$ ______________________

c. $m - x = n$ ______________________

d. $ax - b = c$ ______________________

3 Risolvi le seguenti equazioni:

a. $30x + 12 = 72$

b. $-4x + 24 = 8$

c. $9 = 27x$

d. $141 + 11x = 20$

4 Ricava x dalle seguenti equazioni:

a. $F = -kx$

b. $\frac{2x}{g} = t^2$

c. $\frac{x - a}{v} = t$

d. $\frac{V}{x} = \pi r^2$

5 Trasforma queste frasi in equazioni e risolvile.

- Quale numero moltiplicato per 3 dà come risultato 126?
- Quale numero diminuito di 3 dà come risultato – 7?
- Quale numero diviso per 112 dà come risultato 1?
- Quale numero moltiplicato per 5 e sommato a 12 dà come risultato 27?

[42; –4; 112; 3]

6 Risolvi la seguente equazione, considerando che x è una quantità positiva: $168x^2 - 27 = 85$

[$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$]

7 Risolvi la seguente equazione nell'incognita positiva v: $mv^2 - 2K = 0$

[$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$]

8 Alessia e Federica insieme riescono ad equilibrare sull'altalena la massa di Roberto. Alessia pesa 10 kg in più di Federica e i tre ragazzi hanno una massa complessiva di 120 kg.

- Trasforma queste informazioni in equazione e calcola la massa dei tre ragazzi.

[35 kg; 25 kg; 60 kg]

9 Giulio, il giorno del suo 40° compleanno, afferma che sua figlia Angelica fra 15 anni avrà la metà degli anni che egli sta compiendo ora.

- Trasforma questa frase in equazione e determina l'età di Angelica.

[5 anni]

10 Andrea è nata 8 anni prima di sua cugina Alice che ha un quarto degli anni del nonno il quale aveva 52 anni quando è nata Andrea.

- Trasforma queste informazioni in equazione.
- Quanti anni ha Andrea?

[28]

11 Dato un triangolo rettangolo di cateti a, b e ipotenusa c, calcola il valore mancante nei seguenti casi:

a. $a = 30$ cm; $b = 40$ cm; $c = \sqrt{a^2 + b^2} =$
$= \sqrt{(30\ \text{cm})^2 + (40\ \text{cm})^2} = \sqrt{2500\ \text{cm}^2} = 50$ cm

b. $a = 7{,}00$ m; $c = 13{,}04$ m; $b =$ ________ m

c. $b = \frac{1}{3}$ dm; $c = \frac{\sqrt{13}}{6}$ dm; $a =$ ________ dm

d. $a = 100{,}0$ mm; $c = 223{,}6$ mm; $b =$ ________ mm

[11,00 m; 0,5 dm; 200,0 mm]

12 Sofia va in pasticceria e compra 5 *cannoli* e una *cassata* spendendo in totale 27€.

- La cassata è costata il doppio della cifra spesa per tutti i cannoli. Determina quanto è costato ogni cannolo.

[€ 1,8]

13 Il volume di una sfera di raggio r è $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calcola il raggio delle sfere che hanno i seguenti volumi:

a. $V = 4{,}19\ \text{m}^3$

b. $V = 523{,}60\ \text{cm}^3$

c. $V = 14{,}14\ \text{dm}^3$

d. $V = 212{,}17\ \text{cm}^3$

[1,00 m³; 5,00 cm³; 1,50 dm³; 3,70 cm³]

9 RISOLVERE UN'EQUAZIONE A UN'INCOGNITA 2A PARTE

Le equazioni servono a risolvere i problemi

Spendi 2,00 € per una penna e una matita. La penna costa 1,00 € più della matita. Quanto costa la matita?

Indichiamo con x il prezzo della matita. Allora quello della penna è x + 1,00 €. Conosciamo la spesa totale:

$$x + x + 1{,}00\text{ €} = 2{,}00\text{ €}.$$

Risolvendo questa equazione troviamo la risposta:

$$2\,x = 1{,}00\text{ €}$$

$$x = 0{,}50\text{ €}.$$

Una formula è un'equazione: come si fa a ricavare le formule inverse

La velocità media v in funzione della distanza D e del tempo t è

$$v = \frac{D}{t}.$$

Se sappiamo quanto valgono v e t, per esempio v = 100 km/h e t = 0,25 h, da questa formula possiamo ricavare la distanza percorsa D.

Per isolare D moltiplichiamo entrambi i membri per t. Otteniamo:

$$v\,t = \frac{D}{\cancel{t}}\,\cancel{t}, \qquad \text{cioè} \qquad D = v\,t.$$

Sostituendo ora i valori noti, troviamo $D = \left(100\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}}\right)(0{,}25\,\cancel{\text{h}}) = 25\text{ km}.$

Dalla stessa formula, se conosciamo v e D, per esempio v = 80 km/h e D = 40 km, possiamo ricavare l'incognita t.

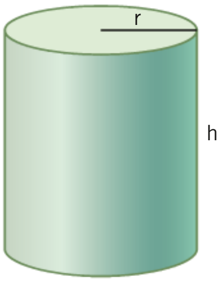
Prima portiamo t al numeratore, moltiplicando i due membri per t come sopra:

$$v\,t = D;$$

poi isoliamo t dividendo per v a sinistra e a destra dell'uguale. Otteniamo:

$$\frac{\cancel{v}\,t}{\cancel{v}} = \frac{D}{v}, \qquad \text{cioè} \qquad t = \frac{D}{v}.$$

Siamo pronti, così, a sostituire i valori noti: $t = \frac{D}{v} = \frac{40\text{ km}}{80\text{ km/h}} = 0{,}5\text{ h}.$

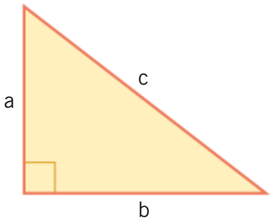


La formula del volume del cilindro è $V = \pi\,r^2\,h$. Se conosciamo V e r, da essa possiamo ricavare h, dividendo entrambi i membri per $\pi\,r^2$ e semplificando:

$$h = \frac{V}{\pi\,r^2}.$$

Se invece conosciamo V e h, possiamo ricavare r. Prima isoliamo r^2 dividendo i due membri per $\pi\,h$; poi estraiamo la radice quadrata di tutti e due:

$$r^2 = \frac{V}{\pi\,h}; \qquad r = \sqrt{\frac{V}{\pi\,h}}.$$



Il teorema di Pitagora dice che il quadrato dell'ipotenusa c è uguale alla somma dei quadrati dei cateti a e b, cioè $c^2 = a^2 + b^2$.

Da questa formula, se conosciamo i cateti, ricaviamo l'ipotenusa:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Se conosciamo l'ipotenusa e un cateto, per esempio b, ricaviamo l'altro cateto:

$$a^2 = c^2 - b^2, \qquad \text{da cui} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

14 ★★★ A causa della rotazione della Terra intorno al suo asse, la velocità di un punto sull'equatore vale circa 28 km/min. L'equazione che lega velocità (v), distanza (D) e tempo (t) è $v = D/t$.

- Calcola la distanza che percorrerebbe un punto sull'equatore in 2 h.
- E in 24 ore? A che cosa corrisponde quest'ultimo valore?

[3 360 km; 40 320 km]

15 ★★★ Hai 30 cubetti uguali e vuoi riempire un volume di 240 dm^3.

- Calcola quanto deve essere lungo il lato di ognuno dei cubetti, in cm, per poter riempire esattamente il volume dato.

[20 cm]

16 ★★★ La relazione tra due grandezze x e y è data dalla seguente equazione: $y = 3x^2 - 5$.

- Calcola il valore positivo di x per i seguenti valori di y:

a. $y = -2$

b. $y = 4$

c. $y = -5$

d. $y = 103$

[1, $\sqrt{3}$; 0; 6]

17 ★★★ Un cilindro e un cono hanno uguale altezza, $h = 20$ cm, e uguale volume. Il cono ha raggio di base pari a 14 cm.

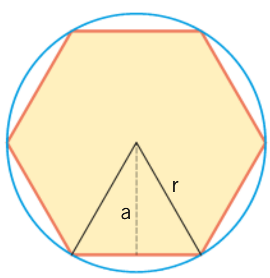
- Determina il raggio del cilindro.

[8,1 cm]

18 ★★★ Un esagono regolare è inscritto in una circonferenza di raggio 10 cm. Il perimetro dell'esagono è 60 cm.

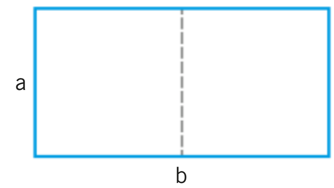
- Calcola l'area dell'esagono.

Suggerimento: ricorda che l'area dell'esagono regolare si calcola moltiplicando il perimetro per l'apotema e dividendo per due. Inoltre, determina l'apotema a con il teorema di Pitagora.



[260 cm^2]

19 ★★★ Considera un rettangolo di lati a e b. L'area (A) del rettangolo è equivalente a due volte l'area del quadrato di lato a.



- Completa la seguente tabella calcolando i valori dei lati a e b.

A = area del rettangolo	a = lato minore	b = lato maggiore
18		
50		
200		
338		

20 ★★★ Caterina ha appeso nella sua stanza una cornice a giorno di lati 35 cm × 50 cm. In questa cornice ha inserito 9 fotografie tutte dello stesso formato ($a \times b$). L'area della cornice non coperta dalle foto risulta pari a 400 cm^2. Il formato delle fotografie è di tipo 3:2, cioè un lato è 3/2 dell'altro.

- Calcola le misure dei lati a e b di ciascuna fotografia.

[15 cm; 10 cm]

21 ★★★ La velocità di caduta di un corpo è data dall'equazione: $v = v_0 + gt^2$, dove v_0 è la velocità all'istante iniziale, $g = 10$ m/s^2 è l'accelerazione di gravità e t è il tempo.

- Ricava l'incognita v_0 e l'incognita t (considerata positiva) dall'equazione precedente.

22 ★★★ Due grandezze a e b, entrambe positive, sono legate dalla relazione $a = 1{,}5\, b^2$.

Calcola il valore di b per i seguenti valori di a:

- $a = 3$
- $a = 6$
- $a = 9$
- $a = 150$

[$\sqrt{2}$; 2; $\sqrt{6}$; 10]

23 ★★★ La densità del sughero vale 300 kg/m^3.

- Quanto vale il volume occupato da 150 kg di sughero? (Ricorda che la densità è definita come il rapporto fra massa e volume di un oggetto, cioè $d = m/V$.)

[0,5 m^3]

POTENZA DI 10	NUMERO
10^9	1 000 000 000 un miliardo
10^6	1 000 000 un milione
10^3	1000 mille
10^2	100 cento
10^1	10 dieci
10^0	1 uno
10^{-1}	0,1 un decimo
10^{-2}	0,01 un centesimo
10^{-3}	0,001 un millesimo
10^{-6}	0,000 001 un milionesimo
10^{-9}	0,000 000 001 un miliardesimo

10 FARE I CONTI CON LE POTENZE DI 10 - 1A PARTE

Le potenze di 10 si classificano in base al segno dell'esponente

Per elevare 10 alla *seconda* potenza moltiplichiamo tra loro *due* termini uguali a 10; per elevare 10 alla *quarta* potenza ne moltiplichiamo *quattro*:

$$10^2 = 10 \times 10 = 100, \qquad 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000.$$

Per elevare 10 all'esponente negativo −4 prendiamo il reciproco di 10^4, cioè 1 fratto 10^4:

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}000\,1.$$

A seconda che l'esponente sia positivo, nullo o negativo, si ha:

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ termini}} \qquad 10^0 = 1 \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Vale la seguente regola mnemonica:

una potenza di 10 è un numero che, scritto in forma decimale, contiene tanti zeri quanti ne indica l'esponente; se l'esponente è negativo, bisogna includere nel conto anche lo zero che precede la virgola.

La forma decimale di 10^4 è 10 000 e il suo numero di zeri è uguale all'esponente 4; la forma decimale di 10^0 è 1, un numero privo di zeri; la forma decimale di 10^{-3} è 0,001 e ha 3 zeri, compreso quello prima della virgola.

Per moltiplicare due potenze di 10 si sommano gli esponenti

$$10^2 \times 10^4 = 100 \times 10\,000 = 1\,000\,000 = 10^6 = 10^{2+4}.$$

$$10^3 \times 10^{-5} = 1000 \times \frac{1}{100\,000} = \frac{1}{100} = 10^{-2} = 10^{3+(-5)}.$$

$$10^{-1} \times 10^{-3} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{10\,000} = 10^{-4} = 10^{-1+(-3)}.$$

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

Per dividere due potenze di 10 si sottraggono gli esponenti

$$\frac{10^5}{10^2} = \frac{100\,000}{100} = 1000 = 10^3 = 10^{5-2}.$$

$$\frac{10^3}{10^4} = \frac{1000}{10\,000} = \frac{1}{10} = 10^{-1} = 10^{3-4}.$$

$$\frac{10^2}{10^{-3}} = \frac{100}{\frac{1}{1000}} = 100\,000 = 10^5 = 10^{2-(-3)}.$$

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

Per elevare a potenza una potenza di 10 si moltiplicano gli esponenti

$$(10^4)^2 = (10\,000)^2 = 10\,000 \times 10\,000 = 100\,000\,000 = 10^8 = 10^{4\times 2}.$$

$$(10^{-1})^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 10^{-3} = 10^{-1\times 3}.$$

$$(10^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{1\,000\,000}} = 1\,000\,000 = 10^6 = 10^{-2\times(-3)}.$$

$$(10^m)^n = 10^{m\,n}$$

1 Traduci queste potenze di 10 in numeri decimali:

a. $10^7 = 10\,000\,000$

b. $10^{11} =$ ____________________

c. $10^{-4} =$ ____________________

d. $10^{-8} =$ ____________________

2 Traduci questi numeri decimali in potenze di 10:

a. $0{,}000\,01 = 10^{-5}$

b. $0{,}001 =$ ____________________

c. $100\,000 =$ ____________________

d. $10\,000\,000 =$ ____________________

3 Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^4 \times 10^{12} = 10^{16}$

b. $10^{11} \times 10^{-8}$

c. $10^{-7} \times 10^4$

d. $10^{-18} \times 10^{-7}$

4 Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^6 \div 10^9$

b. $10^{-5} \div 10^{-11}$

c. $(10^4)^3$

d. $(10^{-2})^5$

5 Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^{-1} \times 10^{-2} = 10^{-3}$

b. $10^{-6} \times 10^6$

c. $10^{-8} \times 10^{15}$

d. $10^8 \times 10$

6 Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^7 \div 10^5$

b. $10^3 \div 10^{-3}$

c. $(10^3)^{-4}$

d. $(10^4)^2$

7 Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $\dfrac{10^3 \times 10^2}{10^4}$

b. $(10^2)^3 \times 10^{-5}$

c. $(10^{-3} \div 10^0) \times 10^7$

d. $\dfrac{10^9 \times (10^3)^{-2}}{10^5}$

8 Inserisci le potenze di 10 mancanti nelle seguenti uguaglianze:

a. $\dfrac{10^8}{....} = 10^6$

b. $10^3 \times .... = 10^{15}$

c. $(....)^2 = 10^{18}$

d. $.... \times 10^5 = 10$

9 Inserisci le potenze di 10 mancanti nelle seguenti uguaglianze:

a. $10^5 \times .... = 10$

b. $\dfrac{....}{10^{-1}} = 10^6$

c. $10^3 \times .... \times 10 = 10^{-2}$

d. $\dfrac{(....)^3}{10^{-1}} = 10^7$

10 Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $\dfrac{10^{12} \times 10^{-2}}{10^4 \times 10}$

b. $\dfrac{1}{10^{-5} \times 10^{-7}}$

c. $(10^{-3} \times 10^0) : 10^{-7}$

d. $\dfrac{10^6 \times (10^4)^{-2}}{10^5 \times 10 \times 10^{-11}}$

11 Il lato dell'area quadrata rappresentata in scala in questa mappa misura $2{,}4 \times 10^3$ m.

► Determina l'area della zona in m².

[$5{,}8 \times 10^6$ m²]

12 Un appezzamento di terreno ha la forma di un rettangolo con i lati che misurano $2{,}61 \times 10^3$ m e $1{,}84 \times 10^3$ m.

► Calcola l'area dell'appezzamento.

[$4{,}80$ x 10^6 m]

13 Alberto ha ottenuto un incarico di lavoro che prevede una retribuzione complessiva di € $2{,}88 \times 10^4$. Tale retribuzione gli sarà corrisposta con compensi mensili di € $1{,}6 \times 10^3$.

► Quanti mesi durerà l'incarico di Alberto?

[18]

10 FARE I CONTI CON LE POTENZE DI 10 - 2A PARTE

La notazione scientifica: come si sfruttano le potenze di 10 per scrivere i numeri

Nella **notazione scientifica** un numero è scritto come il prodotto di due fattori: un coefficiente compreso tra 1 e 10 e una potenza di 10.

Come si scrive in notazione scientifica il numero 120?

Dividiamo 120 per 100: il risultato è il coefficiente 1,2 (compreso tra 1 e 10).

Se ora moltiplichiamo 1,2 per 100, cioè per 10^2, otteniamo di nuovo 120. Per scrivere 120 in notazione scientifica dobbiamo lasciare indicata questa moltiplicazione:

$$120 = \overbrace{\underbrace{1{,}2}_{\text{coefficiente}} \times \underbrace{10^2}_{\text{potenza di 10}}}^{\text{notazione scientifica}}.$$

Vogliamo ora scrivere in notazione scientifica il numero 1251,4.

Dividendo e moltiplicando per 1000 otteniamo:

$$1251{,}4 = 1{,}2514 \times 10^3.$$

Osserviamo che l'esponente della potenza di 10 è uguale al numero di posizioni di cui bisogna spostare la virgola verso sinistra per passare da 1251,4 a 1,2514.

Vogliamo scrivere in notazione scientifica anche 0,75, un numero minore di 1.

Per ottenere da 0,75 il coefficiente 7,5 (compreso tra 1 e 10), dobbiamo moltiplicare per 10; allora, per lasciare invariato il numero di partenza, dobbiamo anche dividere per 10, ossia moltiplicare per 10^{-1}. Otteniamo:

$$0{,}75 = 7{,}5 \times 10^{-1}.$$

In questo caso l'esponente (preceduto dal segno meno perché il numero da rappresentare è minore di 1) è uguale al numero di posizioni di cui bisogna spostare la virgola verso destra per passare da 0,75 a 7,5.

Come addizionare e sottrarre i numeri scritti in notazione scientifica

$3 \times 10^7 + 5 \times 10^7 - 2 \times 10^7 = (3 + 5 - 2) \times 10^7 = 6 \times 10^7$.

Se 10 è elevato allo stesso esponente in tutti i termini, si mette in evidenza la potenza di 10 e si addizionano o sottraggono i coefficienti.

$$4{,}32 \times 10^6 + 3 \times 10^4 = 4{,}32 \times 10^2 \times 10^4 + 3 \times 10^4 = (4{,}32 \times 10^2 + 3) \times 10^4 =$$
$$= (432 + 3) \times 10^4 = 435 \times 10^4 = 4{,}35 \times 10^6.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo aumentato di 2 l'esponente della potenza di 10 e diviso per 100 il fattore moltiplicativo: lasciando invariato il numero, lo abbiamo riscritto in notazione scientifica.

Se i termini dell'addizione o della sottrazione contengono potenze di 10 con esponenti diversi, prima si mette in evidenza il fattore comune, cioè la potenza di 10 con esponente più piccolo, poi si calcola la somma o la differenza.

Come moltiplicarli, dividerli e calcolare una loro potenza

$2{,}5 \times 10^2 \times 1{,}2 \times 10^3 = (2{,}5 \times 1{,}4) \times (10^2 \times 10^3) = 3{,}5 \times 10^5$.

$\dfrac{1{,}05 \times 10^8}{4{,}2 \times 10^5} = \dfrac{1{,}05}{4{,}2} \times \dfrac{10^8}{10^5} = 0{,}25 \times 10^3 = 2{,}5 \times 10^2$.

$(5 \times 10^7)^{-2} = \dfrac{1}{5^2} \times (10^7)^{-2} = \dfrac{1}{25} \times 10^{-14} = 0{,}04 \times 10^{-14} = 4 \times 10^{-16}$.

Nell'addizione, nella sottrazione e nell'elevamento a potenza si opera sui coefficienti e sulle potenze di 10 separatamente.

14 ★★★ Esegui le seguenti operazioni ed esprimi i risultati in notazione scientifica:

a. $1{,}7 \times 10^{-3} + 4{,}2 \times 10^{2} + 862$

b. $10^{-1} - 10^{-2} + 2{,}65$

c. $3{,}5 \times 10^{4} \times 2{,}9 \times 10^{6} - 5{,}78 \times 10^{2}$

d. $7{,}25 \times 10^{8} \div 2{,}01 \times 10^{5} + (11 \times 10^{3})^{2}$

[$1{,}3 \times 10^{3}$; 2,7; $1{,}01 \times 10^{11}$; $1{,}21 \times 10^{8}$]

15 ★★★ Il raggio del pianeta Giove è $7{,}14 \times 10^{7}$ m e la sua massa vale $1{,}900 \times 10^{27}$ kg.

- ▶ Calcola l'area della superficie di Giove, considerandolo di forma sferica.
- ▶ Calcola la densità di Giove, considerandolo di forma sferica.

[$6{,}41 \times 10^{16}$ m^2; $1{,}25 \times 10^{3}$ kg/m^3]

16 ★★★ Esegui le seguenti operazioni ed esprimi i risultati in notazione scientifica:

a. $2{,}8 \times 10^{4} + 3{,}7 \times 10^{6}$

b. $1{,}5 \times 10^{3} - 4{,}9 \times 10^{2} + 2{,}3 \times 10^{5}$

c. $(3{,}4 \times 10^{-7}) \times (6{,}9 \times 10^{10}) + 2{,}5 \times 10^{4}$

d. $(5{,}2 \times 10^{16}) \div (2{,}6 \times 10^{13}) - 1{,}2 \times 10^{2}$

17 ★★★ La forza che si esercita tra due cariche elettriche positive a riposo, q_1 e q_2, poste a distanza r l'una dall'altra, è data dalla legge di Coulomb: $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$, dove k è una costante che vale 9×10^{9} N · m^2/(C^2). Le due cariche valgono $q_1 = q_2 = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C e sono poste a distanza $r = 10^{-10}$ m.

- ▶ Tralasciando le unità di misura, determina la forza di repulsione tra le due cariche.

[$2{,}304 \times 10^{-8}$]

18 ★★★ L'attrazione gravitazionale F fra due corpi rispettivamente di massa M_1 e M_2, posti alla distanza d, si determina (tralasciando le unità di misura) con la formula:

$$F = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

Nel caso del sistema Sole-Terra, i valori delle grandezze indicate sono:
$M_1 = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg; $M_2 = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg;
$d = 1{,}50 \times 10^{11}$ m.

- ▶ Determina l'intensità dell'attrazione gravitazionale fra il Sole e la Terra, sempre tralasciando le unità di misura.

[$3{,}53 \times 10^{22}$]

19 ★★★ Esprimi in notazione scientifica i seguenti dati:

a. Distanza media Terra-Luna, 380 000 000 m

b. Raggio terrestre, 640 000 000 cm

c. Distanza media Sole-Terra, 149 500 000 km

d. Velocità della luce nel vuoto, 300 000 km/s

20 ★★★ La massa di un protone è $m_p = 1{,}7 \times 10^{-24}$ g, quella di un elettrone è $m_e = 9{,}1 \times 10^{-28}$ g.

- ▶ Calcola la massa totale di un protone e un elettrone.
- ▶ Determina il rapporto fra la massa del protone e quella dell'elettrone.

[$1{,}70091 \times 10^{-24}$g; $1{,}9 \times 10^{3}$]

21 ★★★ Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri:

a. 0,000074

b. 14385926

c. 415,12

d. 0,00998

22 ★★★ Dopo aver convertito le seguenti coppie di numeri in notazione scientifica, calcola il loro rapporto.

a. 630 000; 1 800

b. 91 000 000; 7 500 000 000

c. 5 400 000; 230

d. 27 000; 950 000 000

23 ★★★ Dopo aver convertito le seguenti coppie di numeri in notazione scientifica, calcola il loro prodotto.

a. 370; 4100

b. 0,000 62; 850 000

c. 7 900 000; 0,0023

d. 14 000 000; 0,000 000 14

24 ★★★ Converti le seguenti potenze in notazione scientifica.

a. $(4000)^{2}$

b. $(2500)^{3}$

c. $(0{,}000\,3)^{4}$

d. $(-710)^{5}$

e. $(0{,}003)^{-4}$

f. $(4000)^{-2}$