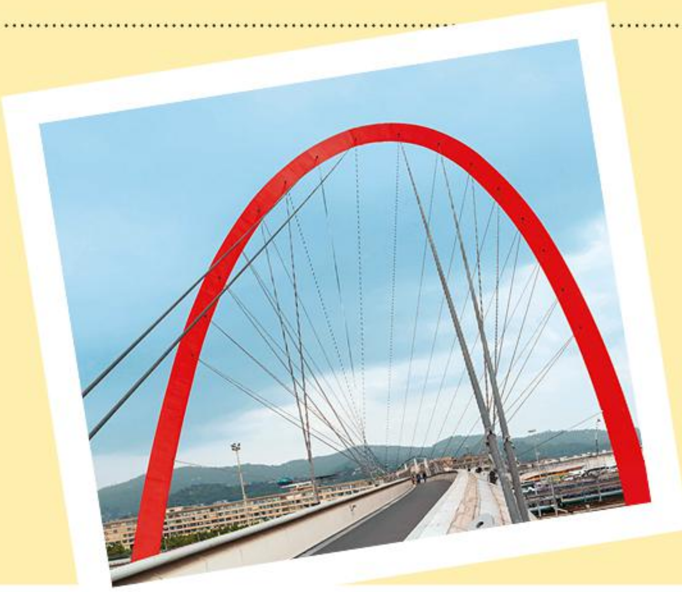
Capitolo

5

Parabola



La parabola è spesso utilizzata per delineare il profilo di ponti, archi ed edifici. Un esempio è l'*Arco Olimpico*, che si trova a Torino, realizzato su progetto dell'architetto Benedetto Camerana e dello studio HDA-Hugh Dutton & Associés, nel 2006, per i Giochi olimpici invernali.

▶ **Come possiamo progettare o studiare le caratteristiche di un edificio a profilo parabolico?**

> il problema e la risposta a pagina **257**

T

TEORIA

1 • Parabola e sua equazione

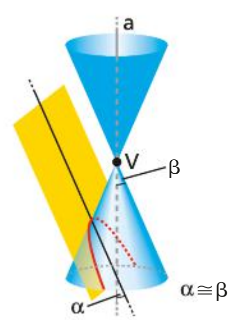
Le coniche

In questo capitolo iniziamo lo studio delle curve che sono dette **coniche**, perché si possono ottenere sezionando una superficie conica (a due falde) con un piano, non passante per il vertice del cono.
Consideriamo un cono di asse a, con un angolo al vertice 2β, e sezioniamo la superficie del cono con un piano che forma con l'asse del cono un angolo $\alpha \cong \beta$. La linea ottenuta dall'intersezione tra il cono e il piano è una *parabola*.

GUARDA!

2 Video

3 Maths in English

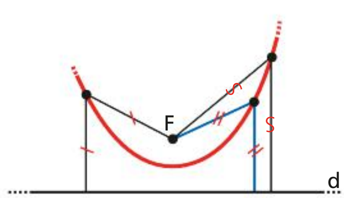


PARABOLA

Si possono studiare le coniche anche considerandole come luoghi geometrici.
Iniziamo dalla parabola.

DEFINIZIONE

Assegnati nel piano un punto F e una retta d, si chiama **parabola** la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d.
Il punto F è il **fuoco** e la retta d è la **direttrice** della parabola.

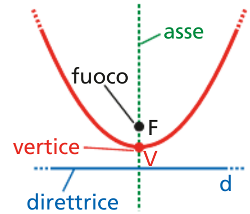


La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse della parabola**.
Il punto V in cui la parabola interseca il suo asse è il **vertice** della parabola.

Il vertice e il fuoco, quindi, appartengono entrambi all'asse.

Si può dimostrare che l'asse della parabola è anche asse di simmetria della curva: preso un punto della parabola, esiste sempre un altro suo punto simmetrico del primo rispetto all'asse.

Ora studiamo le parabole nel piano cartesiano, considerando inizialmente quelle con asse parallelo all'asse y.



T
TEORIA

PARABOLA DI EQUAZIONE $y = ax^2$

> Esercizi a pagina **259**

ESEMPIO

Considera nel piano cartesiano il fuoco $F(0; 2)$ e la direttrice di equazione $y = -2$ (figura **a**).

▶ **Ricaviamo l'equazione della parabola applicando la definizione.**

L'asse della parabola è l'asse y e il vertice coincide con l'origine degli assi; infatti il punto $O(0; 0)$ appartiene all'asse ed è equidistante da F e dalla direttrice.
Se un punto $P(x; y)$ appartiene alla parabola (figura **b**), la sua distanza da F deve essere uguale alla sua distanza dalla retta $y = -2$, cioè

$$\overline{PF} = \overline{PH}.$$

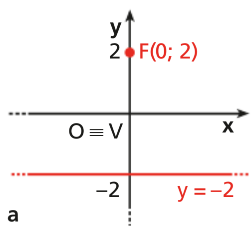
Poiché $\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ e $\overline{PH} = |y+2|$, l'uguaglianza precedente diventa

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+2|.$$

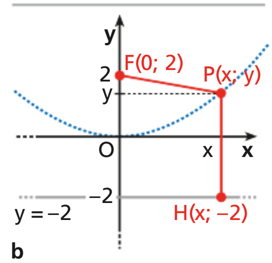
Eleviamo i due membri al quadrato per eliminare la radice (e il valore assoluto):

$$x^2 + (y-2)^2 = (y+2)^2 \rightarrow x^2 + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4} \rightarrow$$
$$x^2 - 8y = 0.$$

Ricavando y, otteniamo l'equazione della parabola cercata: $y = \frac{1}{8}x^2$.

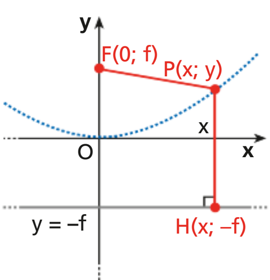


a



b

Con passaggi analoghi, prendendo come fuoco F un punto dell'asse y di coordinate $F(0; f)$, con $f \neq 0$, e come direttrice una retta parallela all'asse x di equazione $y = -f$, dall'uguaglianza $\overline{PF} = \overline{PH}$ si ottiene:



$$\boldsymbol{y = ax^2}, \quad \text{dove } a = \frac{1}{4f},\ a \neq 0.$$

equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y

Essendo $a \neq 0$, da $a = \frac{1}{4f}$ ricaviamo $f = \frac{1}{4a}$, quindi:

$\boldsymbol{F\left(0; \frac{1}{4a}\right)}$; coordinate del fuoco

$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4a}}$. equazione della direttrice

Applica la definizione

Scrivi l'equazione della parabola di fuoco $F(0; 1)$ e direttrice $y = -1$. $\left[y = \frac{x^2}{4}\right]$

ANIMAZIONE nell'ebook

Nell'animazione:

- troviamo l'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse y, vertice in O e fuoco $F(0; 3)$;
- con una figura dinamica, verifichiamo le proprietà della parabola.

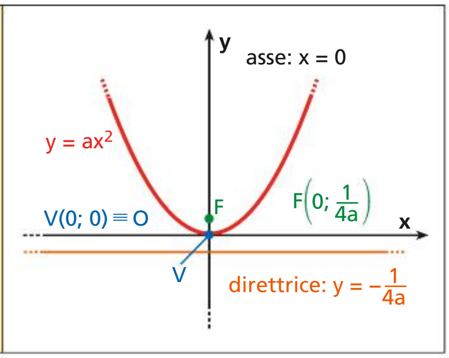
In sintesi

Equazione di una parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y:

$y = ax^2$, con $a \neq 0$.

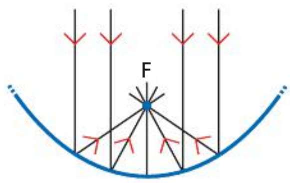
Fuoco: $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$.

Equazione della direttrice: $y = -\frac{1}{4a}$.



Le coordinate dei punti della parabola verificano l'equazione $y = ax^2$. Viceversa, si può dimostrare che i punti del piano le cui coordinate verificano l'equazione appartengono alla parabola.

Il fuoco di una parabola ha una proprietà con importanti applicazioni pratiche: se i raggi incidenti su una superficie parabolica riflettente hanno direzione parallela al suo asse, i raggi riflessi convergono nel fuoco.



Questa proprietà viene sfruttata, per esempio, nelle antenne paraboliche.

Trova il fuoco e la direttrice
Determina fuoco e direttrice della parabola di equazione $y = 2x^2$.

Appartenenza di un punto a una parabola
Verifica che il punto $A(-1; 4)$ appartiene alla parabola di equazione $y = 4x^2$, mentre $B(0; 1)$ non le appartiene. Fai un esempio di un altro punto C della parabola.

T
TEORIA

MATEMATICA E AMBIENTE
Parabole nelle centrali solari

Una **centrale solare** è un impianto di produzione energetica da fonte rinnovabile che usa l'energia del Sole per produrre energia elettrica.

Il funzionamento di una particolare centrale solare, detta **a concentrazione**, è descritto dai seguenti passi:

1. i raggi solari vengono concentrati verso un punto preciso, in cui si trova un tubo che contiene un fluido scelto appositamente perché adatto all'immagazzinamento e al trasporto del calore;
2. il fluido riscaldato dai raggi solari trasferisce calore a un altro fluido, per esempio l'acqua, fino a trasformarlo in vapore;
3. il vapore viene utilizzato per muovere una o più turbine, collegate a loro volta a degli alternatori, per produrre così energia elettrica.

La concentrazione dei raggi solari verso un punto preciso si ottiene con **specchi a sezione parabolica**.

Infatti, i raggi solari, che incidono su tali specchi con direzione praticamente parallela al loro asse, convergono nel fuoco della parabola, che è proprio il punto in cui si trova il tubo contenente il fluido che immagazzina e trasporta il calore.

Spunti di ricerca Cerca nel Web informazioni su: **collettori parabolici lineari**, **a torre centrale**, ***dishstirling***. Quali sono le principali differenze?

DALL'EQUAZIONE $y = ax^2$ AL GRAFICO

> Esercizi a pagina **261**

ESEMPIO

▶ **Studiamo le caratteristiche della parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$ e la rappresentiamo.**

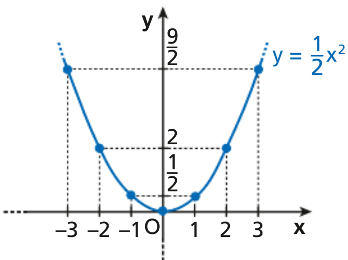
La parabola ha il vertice nell'origine e l'asse di simmetria coincidente con l'asse y.

L'ordinata del fuoco è $y_F = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, quindi $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

La direttrice d ha equazione $y = -\frac{1}{2}$.

Attribuiamo alcuni valori a x: la funzione $y = \frac{1}{2}x^2$ fa corrispondere a ogni valore di x un valore di y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



Le coppie $(x; y)$ corrispondono a punti della parabola che segniamo nel piano cartesiano. Congiungiamo i punti ottenendo il grafico.

La parabola è simmetrica rispetto all'asse y, perché i punti che hanno ascisse opposte hanno la stessa ordinata:

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(-x)^2.$$

ANIMAZIONE nell'ebook

Nell'animazione, tracciata la parabola e disegnati il fuoco e la direttrice, verifichiamo con figure dinamiche:
- la proprietà della parabola come luogo geometrico;
- la simmetria rispetto all'asse y.

Caratteristiche e grafico

Determina il fuoco e l'equazione della direttrice e rappresenta la parabola di equazione $y = -5x^2$.

La simmetria osservata nell'esempio è vera in generale.

Ogni parabola di equazione $y = ax^2$ è simmetrica rispetto all'asse y.

CONCAVITÀ E APERTURA DELLA PARABOLA

> Esercizi a pagina **262**

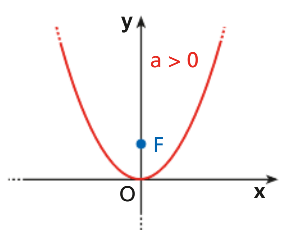
Segno di *a* e concavità

Nell'equazione della parabola $y = ax^2$, se $a > 0$ abbiamo $y \geq 0$, quindi i punti della parabola diversi dal vertice si trovano nel semipiano dei punti con ordinata positiva (primo e secondo quadrante).

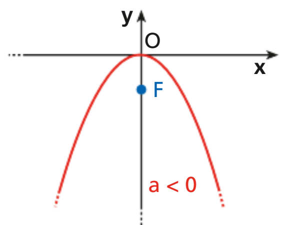
Inoltre, se $a > 0$, anche $f > 0$. Il fuoco è sul semiasse positivo delle y: diciamo che la parabola *volge la concavità verso l'alto*.

Se invece $a < 0$, si ha $y \leq 0$ e i punti della parabola diversi dal vertice sono nel semipiano dei punti con ordinata negativa (terzo e quarto quadrante). Inoltre, se $a < 0$, anche $f < 0$. Il fuoco si trova nel semiasse negativo delle y: la parabola *volge la concavità verso il basso*.

Per $a = 0$, l'equazione diventa $y = 0$, ossia quella dell'asse x. In questo caso diciamo che la parabola è *degenere*.



Concavità verso l'alto

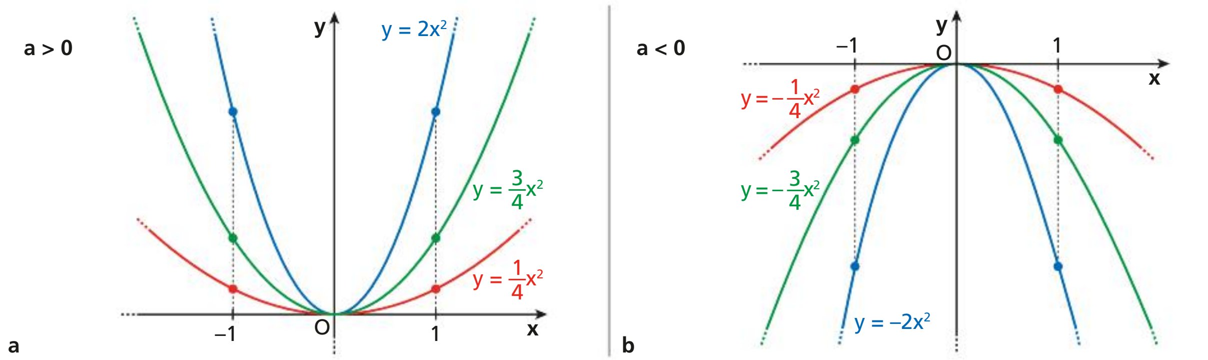


Concavità verso il basso

Valore di *a* e apertura

- Assegnando a x alcuni valori a piacere, disegniamo per punti le parabole di equazioni:

$$y=\frac{1}{4}x^2,\quad y=\frac{3}{4}x^2,\quad y=2x^2,\quad y=-\frac{1}{4}x^2,\quad y=-\frac{3}{4}x^2,\quad y=-2x^2.$$



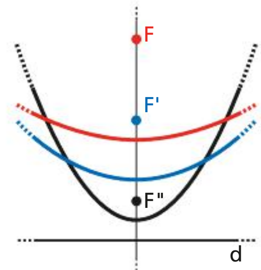
Notiamo che, per $a>0$, all'aumentare di a diminuisce l'apertura della parabola. Se invece il coefficiente a è negativo, l'apertura della parabola diminuisce all'aumentare del valore assoluto di a.

- Ciò che geometricamente influenza l'apertura della parabola è la reciproca distanza tra fuoco e direttrice (figura a lato). Al diminuire della distanza, diminuisce l'apertura. Per comprenderlo dal punto di vista analitico, consideriamo le coordinate del fuoco $F(0; f)$, con $f>0$:

$$f=\frac{1}{4a}\quad\rightarrow\quad a=\frac{1}{4f}.$$

Al diminuire di f aumenta a, quindi diminuisce l'apertura.

- Nei grafici precedenti, puoi notare che le parabole con vertice nell'origine e con *coefficiente opposto* sono *simmetriche rispetto all'asse x* e sono congruenti.



ANIMAZIONE nell'ebook

Nell'animazione, con una figura dinamica, facciamo variare l'apertura della parabola.

PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE *y*

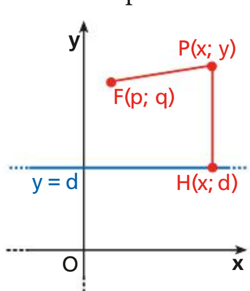
> Esercizi a pagina **263**

Determiniamo l'equazione di una parabola avente fuoco in un punto qualunque del piano e asse parallelo all'asse y. Indichiamo con $(p; q)$ le coordinate del fuoco F e con $y=d$ l'equazione della direttrice. Il fuoco non può appartenere alla direttrice, quindi $q\neq d$. Indichiamo con $P(x; y)$ un punto generico della parabola e scriviamo la condizione $\overline{PF}=\overline{PH}$. Poiché

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}\ \text{ e }\ \overline{PH}=|y-d|,$$

otteniamo:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=|y-d|.$$



Da questa equazione si può giungere, con calcoli che preferiamo omettere, all'equazione:

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c},$$ equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

dove $a, b, c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$.

VIDEO

Il moto parabolico

> Che traiettoria segue un oggetto quando lo lanciamo?
> Da che cosa dipende?

T TEORIA

Una parabola, con l'asse parallelo all'asse y, ha sempre equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ e, viceversa, si può dimostrare che un'equazione qualsiasi del tipo $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta sempre una parabola.

Le caratteristiche di una parabola con asse parallelo all'asse y sono le seguenti.

Equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y:

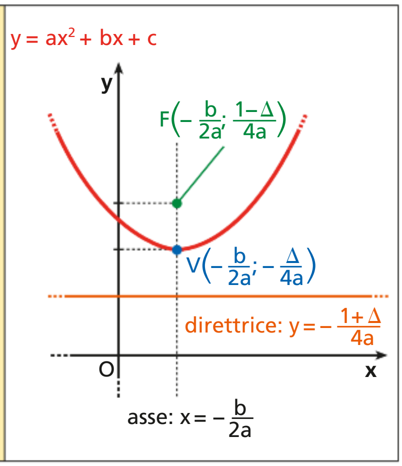
$$y = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0.$$

Equazione dell'asse: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Vertice: $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, con $\Delta = b^2 - 4ac$.

Fuoco: $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$.

Equazione della direttrice: $y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.



MATHS IN ENGLISH

If a parabola has vertical axis of symmetry, then $x = -\dfrac{b}{2a}$ is the equation of the axis of symmetry, $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$ are the coordinates of the focus and the directrix is in the form $y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.

TEORIA

DALL'EQUAZIONE $y = ax^2 + bx + c$ AL GRAFICO

> Esercizi a pagina **264**

ANIMAZIONE nell'ebook

ESEMPIO

▶ **Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$, il suo asse, il fuoco e la direttrice.**

Per rappresentare in modo approssimato la parabola, basta trovare il vertice e alcuni punti, per esempio i punti di intersezione con gli assi cartesiani che si ottengono mettendo a sistema l'equazione della parabola con quelle dell'asse y e dell'asse x.

$$\text{Asse } y\text{: } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0; -3);$$

$$\text{Asse } x\text{: } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2,\ x_2 = 6 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$B(-2; 0),\ B'(6; 0).$$

Il vertice ha ascissa: $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2$.

Sostituiamo x_V nell'equazione: $y_V = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 - 3 = -4 \rightarrow V(2; -4)$.

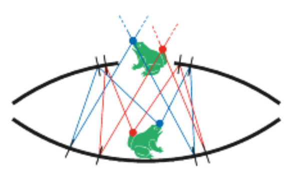
In alternativa, per trovare l'ordinata del vertice, possiamo usare la formula: $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

L'asse della parabola ha equazione $x = 2$.

VIDEO

Mirascopio

Il mirascopio permette di creare l'ologramma dell'oggetto che vi poniamo all'interno. Spieghiamo il suo funzionamento attraverso le proprietà della parabola.



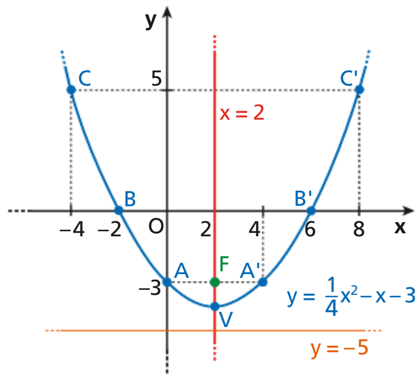
Il fuoco F è sull'asse, quindi $x_F = 2$.

L'ordinata del fuoco è $y_F = \dfrac{1-\Delta}{4a} = \dfrac{1-4}{4\cdot\dfrac{1}{4}} = -3 \rightarrow F(2; -3)$.

La direttrice ha equazione:

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+4}{4\cdot\dfrac{1}{4}} = -5 \quad \rightarrow$$

$y = -5$.

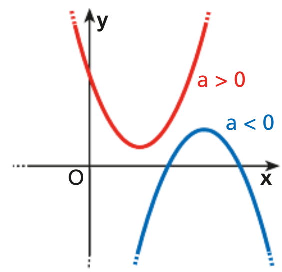


Per ottenere un grafico più preciso, possiamo segnare altri punti. Per esempio: $A'(4; -3)$, che è il simmetrico di A rispetto all'asse, cioè alla retta $x = 2$, $C(-4; 5)$ e $C'(8; 5)$.

Disegna la parabola

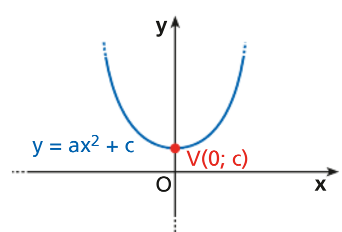
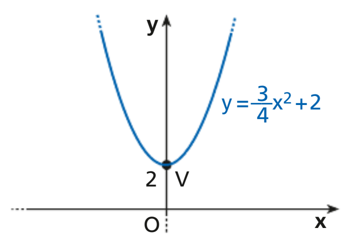
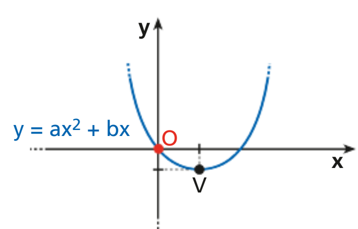
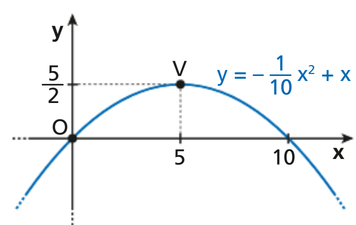
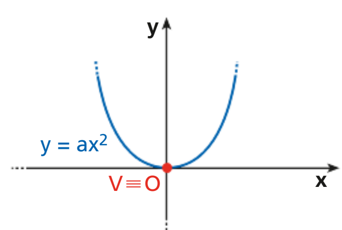
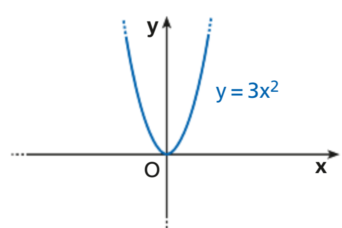
Rappresenta nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 1$ e determina asse, fuoco e direttrice.

Si può dimostrare che anche per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ **la concavità dipende solo dal segno del coefficiente a**: se $a > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto; se $a < 0$, verso il basso.
Inoltre, come abbiamo visto in precedenza, l'apertura della parabola dipende dal valore assoluto di a: all'aumentare di $|a|$ diminuisce l'apertura della parabola, ossia la parabola si «stringe» attorno al proprio asse.



TEORIA

Casi particolari dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$

Caso esaminato	Grafico	Esempio
$b = 0$ e $c \neq 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + c$. La parabola **ha vertice $V(0; c)$ sull'asse y** e il suo asse di simmetria è l'asse y.		
$c = 0$ e $b \neq 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + bx$. La parabola **passa sempre per l'origine O**. Infatti le coordinate (0; 0) soddisfano l'equazione.		
$b = 0$, $c = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2$. La parabola ha asse coincidente con l'asse y e **vertice nell'origine**.		

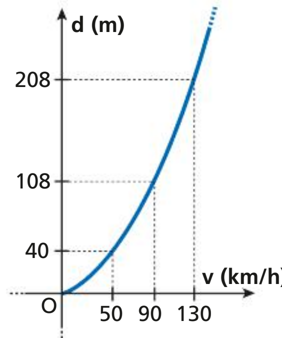
Vediamo con un esempio come si può studiare lo spazio di frenata di un'automobile con un modello che usa l'equazione di una parabola in cui $c = 0$ e $b \neq 0$.

REALTÀ E MODELLI

Un'automobile che viaggia in autostrada a 130 km/h si trova davanti un ostacolo improvviso. Mentre chi guida si accorge del pericolo, l'auto percorre quello che si chiama *spazio di reazione*. Poi c'è lo *spazio di frenata*. Sulla base delle statistiche, lo spazio di reazione e di frenata (espressi in metri) dipendono dalla velocità v (espressa in kilometri all'ora) secondo le relazioni seguenti:

- lo spazio di reazione si ottiene moltiplicando la velocità per 0,3;
- lo spazio di frenata è dato dal quadrato della velocità per 0,01.

► **Qual è lo spazio totale di arresto, cioè lo spazio che occorre all'automobile per fermarsi?**



Lo spazio totale di arresto è la somma degli spazi di reazione e di frenata,

$$d = 0,3v + 0,01v^2,$$

che è l'equazione di una parabola nel piano $(v; d)$.
La parabola passa per l'origine perché manca il termine noto. D'altra parte questo era prevedibile: da fermi lo spazio di arresto è nullo.
Essendo a e b concordi, l'ascissa del vertice è negativa. Non lo rappresentiamo perché della parabola ci interessa soltanto la parte nel primo quadrante, cioè quella per velocità v positive.
Troviamo altri punti per disegnare la parabola.

Se $v = 50$ km/h:

$$d = 0,3 \cdot 50 + 0,01 \cdot 50^2 = 40 \text{ m},$$ quindi per fermarsi servono almeno 40 m.

Se $v = 90$ km/h:

$$d = 0,3 \cdot 90 + 0,01 \cdot 90^2 = 108 \text{ m}.$$

Dal grafico puoi notare quanto rapidamente aumenti lo spazio totale di arresto, e quindi la distanza di sicurezza, al crescere della velocità. Se la velocità è di 130 km/h, lo spazio necessario a fermarsi è

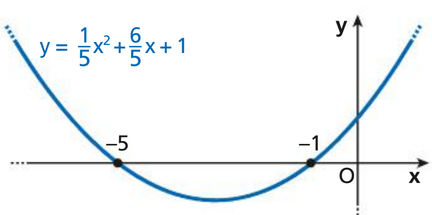
$$d = 0,3 \cdot 130 + 0,01 \cdot 130^2 = 208 \text{ m}.$$

D PARABOLA E FUNZIONI

> Esercizi a pagina **269**

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ fa corrispondere a ogni x *uno e un solo* valore di y, quindi è una funzione, che chiamiamo **funzione quadratica**. Ogni parabola con equazione di questo tipo è pertanto il *grafico di una funzione*.

► $y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 1$ è l'equazione di una funzione quadratica. Il suo grafico è una parabola. A ogni valore di x corrisponde un solo valore di y. Gli **zeri** della funzione si ottengono da



$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -5, x_2 = -1,$$

e sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse x.

Zeri e grafico di una funzione quadratica
Determina gli zeri della funzione $y = 2x^2 + 6x$ e disegna il suo grafico.

PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO

> Esercizi a pagina **270**

Esaminiamo due problemi della realtà, dove si determinano il massimo di una funzione quadratica e il minimo di un'altra analizzando i loro grafici.

EDUCAZIONE FINANZIARIA

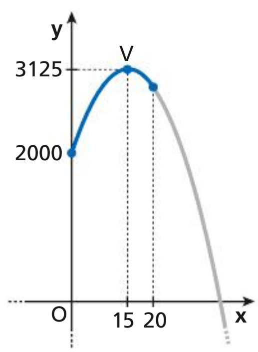
L'iscrizione a un corso per la certificazione linguistica costa 200 € a persona se ci sono 10 iscritti, numero minimo per attivare il corso. Per ogni persona iscritta in più è previsto uno sconto di 5 € a testa e il numero massimo di partecipanti previsti è 30.

▶ **Qual è il numero di iscritti che dà il *massimo ricavo* all'ente organizzatore? Calcola tale ricavo.**

Chiamiamo x il numero di iscritti oltre la soglia minima. Gli studenti totali sono quindi $10+x$. Il numero massimo di partecipanti è 30 e quindi si ha $10 \leq 10+x \leq 30 \rightarrow 0 \leq x \leq 20$.

Ogni iscritto spende $(200-5x)$ € per il corso, quindi il ricavo totale per gli organizzatori è:

$$y=(10+x)(200-5x) \quad \rightarrow \quad y=-5x^2+150x+2000.$$



Il grafico della funzione del ricavo è una parabola che interseca l'asse y nel punto $(0; 2000)$; infatti, se $x=0$, cioè se gli iscritti sono 10, il ricavo totale è di 2000 €. Poiché $a=-5<0$, la parabola volge la concavità verso il basso, e quindi il massimo ricavo è dato dall'ordinata del vertice V:

$$x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{150}{2\cdot(-5)}=15, \qquad y_V=-5\cdot 15^2+150\cdot 15+2000=3125.$$

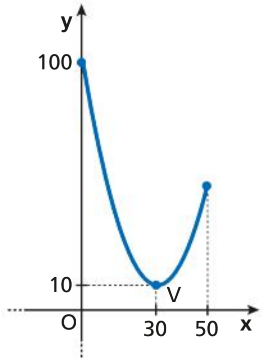
Il massimo è di 3125 €, che si ottiene per $x=15$, cioè quando le persone iscritte sono $10+15=25$, che è un numero accettabile, perché inferiore al numero massimo di possibili partecipanti al corso.

ECONOMIA

Il laboratorio di una farmacia produce lozioni per capelli. Se x è il numero di flaconi prodotti ogni giorno, il costo di produzione y, in euro, per un singolo flacone è espresso dalla funzione

$$y=\frac{1}{10}x^2-6x+100, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 50.$$

▶ **Quanti flaconi di lozione deve produrre ogni giorno il laboratorio per minimizzare il costo del singolo prodotto?**



La funzione del costo unitario è l'equazione di una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Pertanto il minimo viene raggiunto nel vertice:

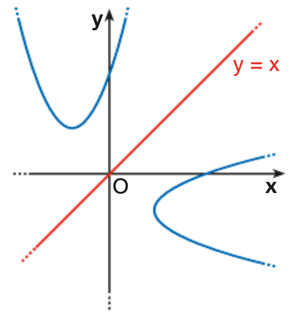
$$x_V=-\frac{b}{2a}=6\cdot 5=30, \qquad y_V=90-180+100=10.$$

Il numero di flaconi di lozione da produrre giornalmente per minimizzare il costo unitario è 30. Il costo di ogni flacone in questo caso è di 10 €.

2 • Parabola con asse parallelo all'asse x

> Esercizi a pagina 273

ANIMAZIONE nell'ebook



Ogni parabola con asse parallelo all'asse x si può ottenere come corrispondente, nella simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, di una parabola con asse parallelo all'asse y.
Per ricavare la sua equazione, all'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y, $y = ax^2 + bx + c$, applichiamo le equazioni della simmetria:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}.$$

Dobbiamo scambiare la variabile x con la variabile y, quindi otteniamo:

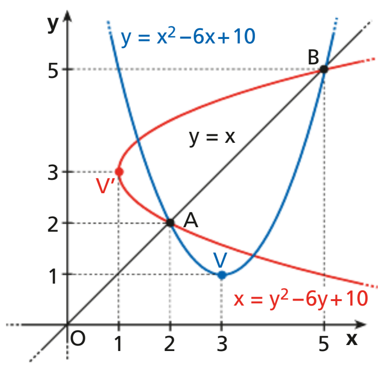
$$\boldsymbol{x = ay^2 + by + c}.$$ equazione della parabola con asse parallelo all'asse x

▶ Nella simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y = x$, alla parabola di equazione

$$y = x^2 - 6x + 10$$

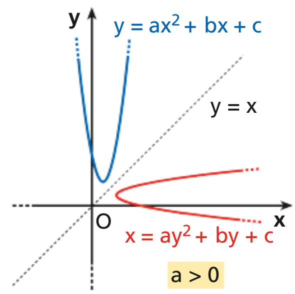
corrisponde la parabola di equazione

$$x = y^2 - 6y + 10.$$



Applica il procedimento
Scrivi l'equazione della parabola che corrisponde a quella di equazione $y = x^2 + x + 2$ nella simmetria assiale rispetto alla retta $y = x$ e rappresenta graficamente le due parabole.

Mediante la simmetria possiamo anche comprendere che una parabola con asse parallelo all'asse x ha concavità rivolta verso la direzione positiva delle ascisse se $a > 0$, verso la direzione negativa se $a < 0$. A fianco, vedi la simmetria nel caso di $a > 0$.



Anche per ottenere le altre caratteristiche della parabola (coordinate del vertice, equazione della direttrice, …) possiamo applicare le equazioni della simmetria alle formule per la parabola con asse parallelo all'asse y, scambiando la x con la y. Otteniamo i seguenti risultati.

Equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x:

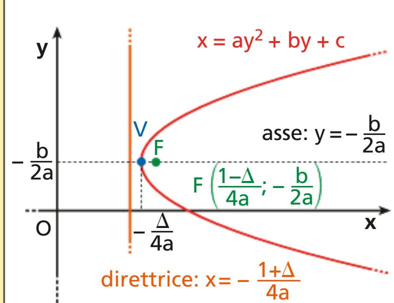
$$x = ay^2 + by + c, \text{ con } a \neq 0.$$

Equazione dell'asse: $y = -\dfrac{b}{2a}$.

Vertice: $V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$, con $\Delta = b^2 - 4ac$.

Fuoco: $F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Equazione della direttrice: $x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.



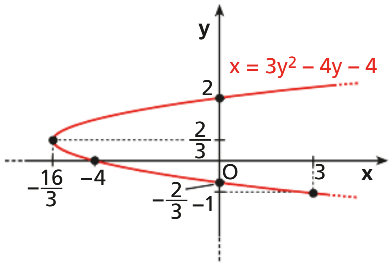
ESEMPIO

▶ **Disegniamo la parabola di equazione $x = 3y^2 - 4y - 4$.**

Il vertice è $V\left(-\frac{16}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Determiniamo le coordinate di alcuni punti della parabola, mediante una tabella, attribuendo valori a y e ricavando i valori corrispondenti di x.

y	x		
$-\frac{2}{3}$	0	→	$\left(0; -\frac{2}{3}\right)$
0	-4	→	$(-4; 0)$
2	0	→	$(0; 2)$
-1	3	→	$(3; -1)$



Il fuoco è $F\left(-\frac{21}{4}; \frac{2}{3}\right)$, l'equazione della direttrice è $x = -\frac{65}{12}$.

ANIMAZIONE nell'ebook

Disegna la parabola

Rappresenta la parabola di equazione $x = -2y^2 + y - 2$. Individua le coordinate del vertice e del fuoco e l'equazione della direttrice.

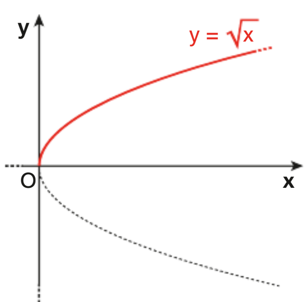
PARABOLA E FUNZIONI

L'equazione $x = ay^2 + by + c$ *non* fa corrispondere a ogni x uno e un solo valore di y, quindi una parabola con asse parallelo all'asse x *non* è il grafico di una funzione da x a y.
Tuttavia è possibile considerare una parte del grafico della parabola in modo che rappresenti una funzione.

▶ La parabola di equazione $x = y^2$ non è il grafico di una funzione, perché se ricaviamo y nell'equazione otteniamo:

$$y = \pm\sqrt{x}.$$

È, invece, una funzione $y = \sqrt{x}$ con dominio $x \geq 0$ e insieme immagine $y \geq 0$. Il suo grafico è il ramo della parabola che si trova nel primo quadrante.



MATHS IN ENGLISH

The equation

$x = ay^2 + by + c$

does not describe a function because it associates two possible values of y to each value of x.

Dalla parabola alla funzione

Rappresenta graficamente la parabola $x = y^2 - 1$. Ricava poi y in funzione di x ed evidenzia, nel grafico, il ramo di parabola corrispondente alla funzione $y = -\sqrt{x+1}$. Qual è il suo dominio? E il suo insieme immagine?

3 • Rette e parabole

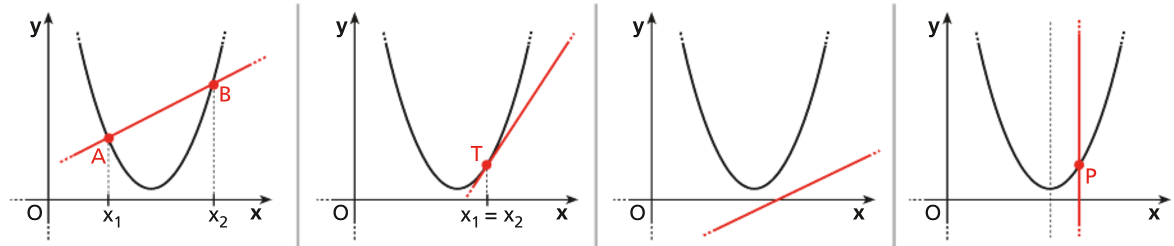
POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

> Esercizi a pagina **277**

Consideriamo una parabola con asse parallelo all'asse y e osserviamo le possibili posizioni di una retta rispetto ad essa.

Nelle figure che seguono, osserva che una parabola e una retta possono essere *secanti in due punti*, essere *tangenti in un punto*, *non intersecarsi* in alcun punto oppure, se la retta è parallela all'asse della parabola, *intersecarsi in un solo punto*.

TEORIA



a. La retta è secante la parabola: i punti di intersezione sono due.

b. La retta è tangente alla parabola: il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna alla parabola: non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela all'asse della parabola: c'è un unico punto di intersezione.

Deduciamo le reciproche posizioni di una retta e una parabola conoscendo le loro equazioni. Supponiamo che la retta non sia parallela all'asse y e che, dunque, la sua equazione possa essere scritta nella forma esplicita $y = mx + q$.
Mettiamo a sistema l'equazione della parabola e l'equazione della retta:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow ax^2 + bx + c = mx + q.$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + (b - m)x + c - q = 0,$$

le cui soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola con la retta. Il numero di soluzioni dipende dal discriminante Δ, quindi:

- se $\boldsymbol{\Delta > 0}$, la retta è **secante** la parabola in due punti;
- se $\boldsymbol{\Delta = 0}$, la retta è **tangente** alla parabola in un punto;
- se $\boldsymbol{\Delta < 0}$, la retta è **esterna** alla parabola.

Nei primi due casi, risolvendo il sistema otteniamo le coordinate dei due punti di intersezione o del punto di tangenza. Se la retta è esterna alla parabola, il sistema è impossibile.

ESEMPIO

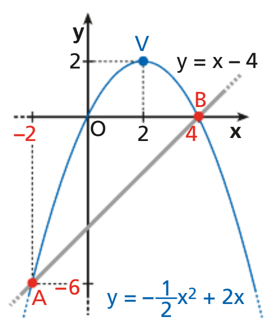
▶ **Determiniamo gli eventuali punti di intersezione della parabola di equazione $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x}$ con la retta di equazione $\boldsymbol{y = x - 4}$.**

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \\ y = x - 4 \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x = x - 4 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Poiché $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$, la retta è **secante** la parabola.

L'equazione $x^2 - 2x - 8 = 0$ ha due soluzioni reali distinte, $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$, ascisse dei punti di intersezione tra retta e parabola. Troviamo le ordinate.



T
TEORIA

MATHS IN ENGLISH

If $\Delta > 0$, we have **two points of intersection** between the line and the parabola; if $\Delta = 0$, the line is **tangent** to the parabola; if $\Delta < 0$, the line does not intersect the parabola.

ANIMAZIONE
nell'ebook

Quale posizione?

Considera la parabola $y = -x^2 + 3x + 1$. Stabilisci se le seguenti rette sono secanti, tangenti o esterne alla parabola. Quando possibile, trova i punti o il punto di intersezione.

a. $y = -x + 4$;

b. $y = -x + 5$;

c. $y = -x + 6$.

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=x-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=x-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

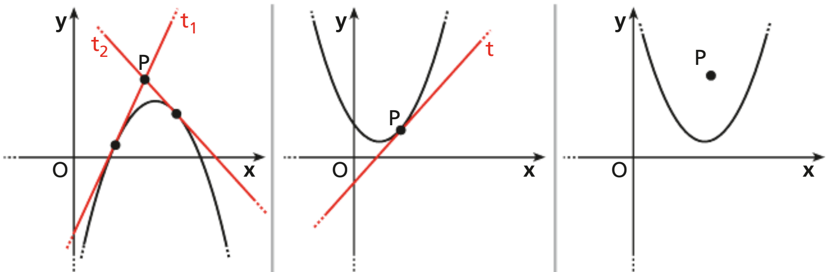
La retta interseca la parabola nei punti $A(-2; -6)$ e $B(4; 0)$.

RICERCA DELLE RETTE TANGENTI A UNA PARABOLA

> Esercizi a pagina 279

Le rette passanti per un punto P e tangenti a una parabola possono essere due, una o nessuna, a seconda della posizione di P rispetto alla parabola.

Se per un punto P si possono tracciare due rette tangenti, si dice che P è **esterno** alla parabola; se la retta tangente è una sola, P è **sulla** parabola; se da P non è possibile tracciare rette tangenti, allora P si dice **interno** alla parabola.



a. *P* **esterno** alla parabola: due rette tangenti. **b.** *P* **sulla** parabola: una retta tangente. **c.** *P* **interno** alla parabola: non esistono rette tangenti.

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti:

- scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0; y_0)$:

  $y - y_0 = m(x - x_0)$;

- scriviamo il sistema delle equazioni del fascio di rette e della parabola:

  $$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases};$$

- poniamo la condizione di tangenza, ossia poniamo uguale a 0 il discriminante dell'equazione risolvente, cioè $\mathbf{\Delta = 0}$ (se una retta è tangente deve avere due intersezioni con la parabola coincidenti in un punto);
- risolviamo rispetto a m l'equazione ottenuta e sostituiamo nell'equazione del fascio gli eventuali valori trovati.

ESEMPIO

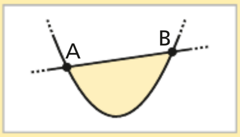
► **Determiniamo le equazioni delle eventuali rette passanti per $P(1; -5)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2$.**

Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per P: $y + 5 = m(x - 1)$.
Scriviamo il sistema delle equazioni del fascio e della parabola, e determiniamo l'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y + 5 = m(x - 1) \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \rightarrow x^2 - mx + m + 3 = 0.$$

MATEMATICA E STORIA

> Il segmento parabolico Se una retta è secante una parabola nei punti *A* e *B*, il segmento *AB* e l'arco di parabola *AB* delimitano una parte di piano detta **segmento parabolico**, evidenziata in giallo nella figura.



Archimede ha dimostrato un teorema fondamentale per calcolare l'area.

- Che cosa ha dimostrato Archimede?
- Cerca informazioni sulla sua vita.

Cerca nel Web: area segmento parabolico, vita Archimede, Plutarco, Vitruvio, Cicerone

Disegna e deduci

Rappresenta graficamente la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 1$ e i punti $A(2; -4)$, $B(4; -6)$ e $C(0; 1)$. Stabilisci se, per ciascuno di questi punti, è possibile tracciare una o due tangenti alla parabola, oppure se non si possono tracciare tangenti alla parabola.

ANIMAZIONE nell'ebook

TEORIA

Calcoliamo Δ:

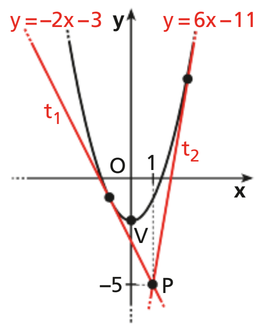
$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+3) = m^2 - 4m - 12.$$

Poniamo la **condizione di tangenza $\Delta = 0$**:

$$m^2 - 4m - 12 = 0 \rightarrow m_1 = -2,\ m_2 = 6.$$

Sostituiamo i valori trovati nell'equazione del fascio di rette. Alle soluzioni $m_1 = -2$ e $m_2 = 6$ corrispondono le due rette tangenti:

$$t_1\colon y = -2x - 3 \quad \text{e} \quad t_2\colon y = 6x - 11.$$



In alternativa al metodo generale appena esaminato, *se il punto* $P(x_0; y_0)$ *si trova sulla parabola* di equazione $y = ax^2 + bx + c$, l'equazione della retta tangente in P alla parabola si determina rapidamente applicando la seguente formula, detta **formula di sdoppiamento**:

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x + x_0}{2} + c.$$

equazione della tangente se $P(x_0; y_0)$ appartiene alla parabola

Applica il metodo

Determina le equazioni delle eventuali rette passanti per $P(0; -2)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = 6x^2 + 4$.

$[y = 12x - 2;\ y = -12x - 2]$

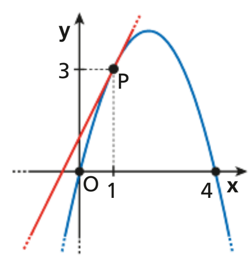
TEORIA

ESEMPIO

▶ **Determiniamo l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ nel suo punto $P(1; 3)$.**

Applichiamo la formula di sdoppiamento: $\dfrac{y+3}{2} = -1 \cdot 1 \cdot x + 4 \cdot \dfrac{x+1}{2}$,

da cui otteniamo: $y + 3 = -2x + 4x + 4 \rightarrow y = 2x + 1$.



4 • Determinare l'equazione di una parabola

> Esercizi a pagina 281

Se dobbiamo scrivere l'equazione di una parabola, dobbiamo determinare i tre coefficienti a, b e c che compaiono nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$, quindi ci occorrono tre informazioni sulla parabola, dette *condizioni*. Queste permettono di scrivere un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c.

ANIMAZIONE nell'ebook

ESEMPIO

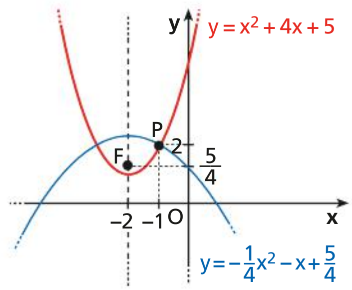
▶ **Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per il punto $P(-1; 2)$ e avente per fuoco il punto $F\left(-2; \frac{5}{4}\right)$.**

Nell'equazione generica $y = ax^2 + bx + c$ sostituiamo a x e a y le coordinate di P; utilizziamo poi le formule del fuoco e scriviamo il sistema.

$$\begin{cases} 2 = a - b + c & \text{passaggio per } P(-1; 2) \\ -\dfrac{b}{2a} = -2 & x_F = -2 \\ \dfrac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \dfrac{5}{4} & y_F = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{5}{4} \end{cases}.$$



Le parabole che soddisfano le condizioni richieste sono due:

$$y = x^2 + 4x + 5,$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{5}{4}.$$

Trova l'equazione

Determina le equazioni della parabola con asse parallelo all'asse y:

a. passante per l'origine, per $A(-4; 0)$ e di vertice con ordinata -3;

b. con vertice nell'origine e passante per $B\left(-2; -\frac{4}{5}\right)$;

c. con vertice $V(0; 3)$ e passante per $P(2; 2)$;

d. passante per $A(-1; 9)$, $B(0; 6)$ e $C(4; 14)$.

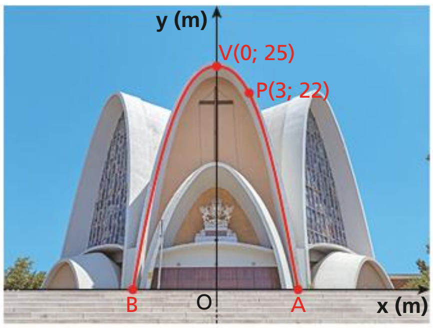
IDEE E PROBLEMI

Parabole a Cagliari

L'architettura moderna ricorre spesso all'uso dell'arco parabolico, grazie alla sua forma slanciata ed elegante e alla sua stabilità. Con un opportuno sistema di riferimento e il giusto numero di informazioni, si possono studiare le caratteristiche degli archi parabolici utilizzati.

L'edificio nella foto è la chiesa dei Santi Giorgio e Caterina.
Il profilo della facciata è individuato da un arco di parabola.

Marco Piloni, Francesco Giachetti, Chiesa dei Santi Giorgio e Caterina, 1967, Cagliari.



▶ **Qual è la distanza fra i punti A e B dell'arco?**

L'arco appartiene a una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, di vertice $V(0; 25)$ e passante per $P(3; 22)$.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 & \text{ascissa del vertice} \\ c = 25 & \text{passaggio per } V(0;\, 25) \\ 9a + 3b + c = 22 & \text{passaggio per } P(3;\, 22) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 25 \\ 9a + 25 = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 25 \end{cases}$$

La parabola ha equazione $y = -\frac{1}{3}x^2 + 25$.

Troviamo le intersezioni della parabola con l'asse x:

$$-\frac{1}{3}x^2 + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 75 \quad \rightarrow \quad x = \pm 5\sqrt{3}.$$

La distanza fra i punti A e B è allora di $10\sqrt{3}$ m, cioè di circa 17 m.

✔ **Spunti di ricerca** Cerca informazioni ed esempi di applicazioni dell'**arco parabolico** in architettura, spesso realizzato con una **catenaria**, che è una curva con un aspetto simile a una parabola. In particolare, esamina i contributi degli architetti **Gaudí**, **Calatrava**, **Saarinen**, **Candela** e **Nervi**.

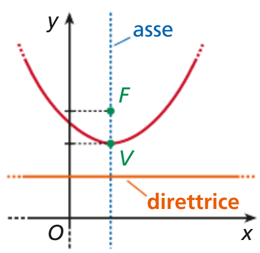
TEORIA

Mappa dei fondamentali

GUARDA! Inquadrami per vedere la mappa interattiva

Equazione della parabola

Con asse parallelo all'asse *y*



$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

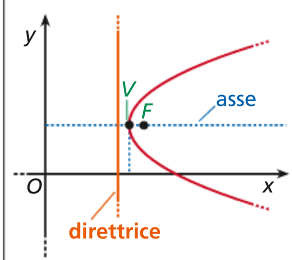
Asse: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Vertice: $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Fuoco: $F\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$.

Direttrice: $y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.

Con asse parallelo all'asse *x*



$x = ay^2 + by + c, a \neq 0$

Asse: $y = -\dfrac{b}{2a}$.

Vertice: $V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Fuoco: $F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

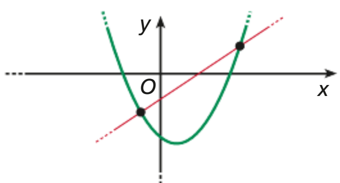
Direttrice: $x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.

Posizione di una retta rispetto a una parabola

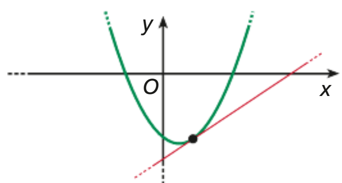
Una retta, non parallela all'asse *y*, può essere secante, tangente o esterna a una parabola.

$$\begin{cases} \overbrace{y = ax^2 + bx + c}^{\text{equazione della parabola}} \\ \underbrace{y = mx + q}_{\text{equazione della retta}} \end{cases} \rightarrow \underbrace{ax^2 + (b - m)x + c - q = 0}_{\text{equazione risolvente del sistema}} \rightarrow$$

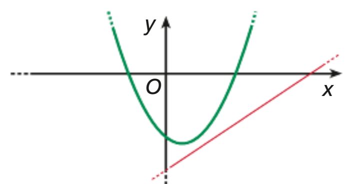
se $\Delta > 0$, retta **secante**;
se $\Delta = 0$, retta **tangente**;
se $\Delta < 0$, retta **esterna**.



retta secante



retta tangente



retta esterna

Determinare l'equazione di una parabola

Nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ dobbiamo trovare *a*, *b* e *c*, quindi servono **tre condizioni.**

Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y*, passante per i punti $A(0; -6)$ e $B(2; 10)$ e con il vertice di ascissa -1.

$$\begin{cases} c = -6 & \text{passaggio per } A \\ 10 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & \text{passaggio per } B \\ -\dfrac{b}{2a} = -1 & \text{ascissa del vertice} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -6 \end{cases} \rightarrow y = 2x^2 + 4x - 6$$

FAI IL PUNTO SUI FONDAMENTALI
> Parabola: definizione e sue caratteristiche. Problemi di massimo e di minimo **pag. 275**
> Parabole e rette, ricerca dell'equazione di una parabola **pag. 291**

TEORIA

ESERCIZI

GUARDA!
9 Attività interattive
9 Prova tu

1 • Parabola e sua equazione

PARABOLA DI EQUAZIONE $y = ax^2$

> Teoria a pagina 244 Attività interattiva

1 **Test.** Se un punto P appartiene a una parabola di vertice V, fuoco F, asse a e direttrice d, allora P è equidistante:

A da V e d. B da F e d. C da F e a. D da V e a.

Applicando la definizione, determina l'equazione della parabola, dati il fuoco F e la direttrice d.

2 $F(0; 2)$ d: $y = -2$ $\left[y = \frac{1}{8}x^2\right]$

3 $F\left(0; \frac{1}{3}\right)$ d: $y = -\frac{1}{3}$ $\left[y = \frac{3}{4}x^2\right]$

4 $F(0; -4)$ d: $y = 4$ $\left[y = -\frac{1}{16}x^2\right]$

5 **Associa** il fuoco F alla corrispondente direttrice d, relativi a una parabola con asse $x = 0$ e vertice $V(0; 0)$.

a. $F(0; -5)$ **b.** $F(0; 1)$ **c.** $F(0; 5)$ **d.** $F(0; -2)$

1. d: $y = -5$ **2.** d: $y = 5$ **3.** d: $y = 2$ **4.** d: $y = -1$

6 Determina l'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse y, vertice nell'origine e fuoco $F\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Il fuoco ha coordinate $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, quindi:

$$\frac{1}{4a} = \frac{\square}{\square} \quad \to \quad a = \frac{\square}{\square}.$$

La parabola ha equazione $y = \frac{1}{3}x^2$.

Parabola di equazione $y = ax^2$
Vertice: $V(0; 0)$.
Fuoco: $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$.
Direttrice: $y = -\frac{1}{4a}$.

7 Determina l'equazione di una parabola che ha per asse l'asse y, il vertice nell'origine degli assi e il fuoco nel punto $F\left(0; \frac{5}{2}\right)$. $\left[y = \frac{1}{10}x^2\right]$

8 Una parabola ha vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y e direttrice che passa per il punto $\left(0; \frac{7}{4}\right)$. Scrivi l'equazione della parabola e le coordinate del fuoco. $\left[y = -\frac{1}{7}x^2; F\left(0; -\frac{7}{4}\right)\right]$

9 Una parabola di equazione $y = ax^2$ ha fuoco nel punto $F(0; 5)$. Quanto vale il coefficiente a? $\left[\frac{1}{20}\right]$

10 Per quale valore di a la parabola di equazione $y = ax^2$ ha direttrice di equazione $y = \frac{1}{8}$? $[-2]$

11 Una parabola di equazione $y = ax^2$ passa per il punto $P(-1; 5)$. Quanto vale a?

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Sostituiamo a x e a y le coordinate di P.

$$\square = a \cdot (\square)^2 \quad \to \quad a = 5.$$

Se un punto P appartiene a una parabola, le sue coordinate devono verificarne l'equazione.

E

ESERCIZI

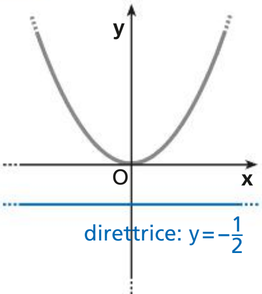
12 La parabola di equazione $y = ax^2$ passa per $P\left(2; -\frac{2}{3}\right)$. Quanto vale a? $\left[-\frac{1}{6}\right]$

13 Trova l'equazione della parabola che ha l'asse coincidente con l'asse y, il vertice nell'origine e passa per il punto $A(2; 12)$. $[y = 3x^2]$

LEGGI IL GRAFICO

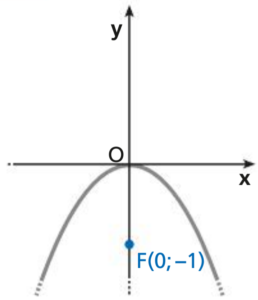
Trova le equazioni delle seguenti parabole, utilizzando i dati delle figure.

14



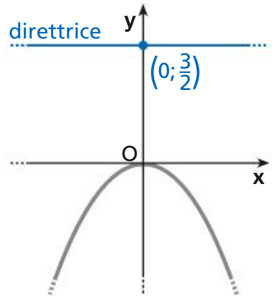
$\left[y = \frac{1}{2}x^2\right]$

15



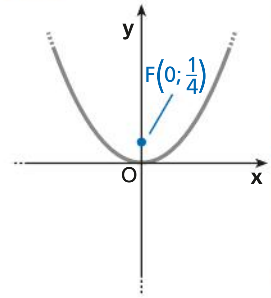
$\left[y = -\frac{1}{4}x^2\right]$

16



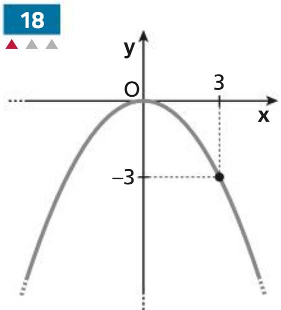
$\left[y = -\frac{1}{6}x^2\right]$

17



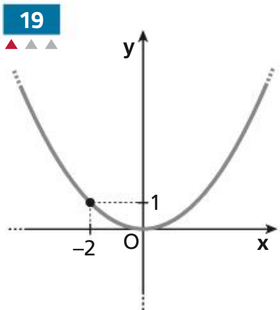
$[y = x^2]$

18



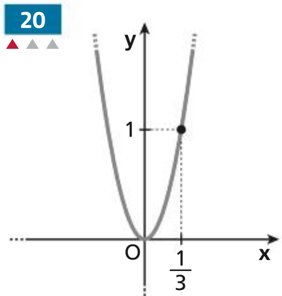
$\left[y = -\frac{1}{3}x^2\right]$

19



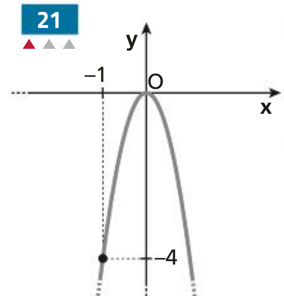
$\left[y = \frac{1}{4}x^2\right]$

20



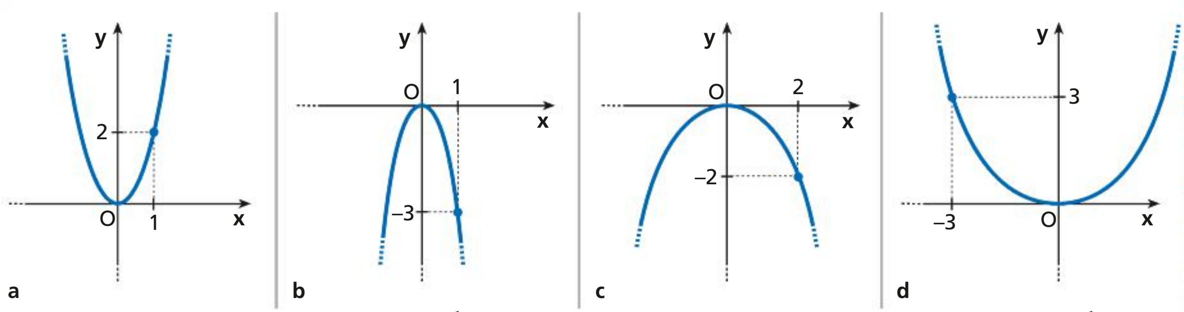
$[y = 9x^2]$

21



$[y = -4x^2]$

22 **Associa** a ogni grafico l'equazione corrispondente.

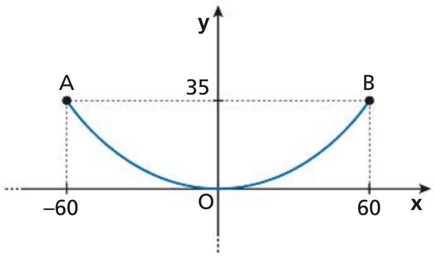


1. $y = -3x^2$ **2.** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **3.** $y = 2x^2$ **4.** $y = \frac{1}{3}x^2$

23 **TURISMO** **Il canto che incanta** In un'oasi naturalistica, come integrazione al birdwatching si propone l'uso di dispositivi per l'ascolto basati su microfoni parabolici. Il microfono parabolico consente di amplificare suoni provenienti anche da kilometri di distanza: le onde sonore si riflettono su un riflettore con profilo parabolico e vengono concentrate nel fuoco, dove si trova un microfono.
Se il profilo riflettente è descritto dalla parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$, dove dovrebbe trovarsi il microfono? $[F(0; 1)]$

E ESERCIZI

24 ▲▲▲ **REALTÀ E MODELLI** **In campeggio** Vuoi costruire un forno solare sfruttando una vecchia antenna parabolica. Per farlo devi rivestirla con dei fogli di alluminio e posizionare la pentola nel punto focale. Calcola le sue coordinate.



$\left[F\left(0;\ \frac{180}{7}\right)\right]$

DALL'EQUAZIONE $y = ax^2$ AL GRAFICO

> Teoria a pagina **246**

25 ▲△△ **Test.** La parabola di equazione $y = -2x^2$ ha fuoco di coordinate:

A $(0; 8)$. B $\left(0; -\frac{1}{8}\right)$. C $(0; -8)$. D $(0; 0)$.

26 ▲△△ **Test.** La parabola di equazione $y = \frac{1}{3}x^2$ ha direttrice di equazione:

A $y = -\frac{1}{12}$. B $y = -\frac{3}{4}x$. C $y = \frac{4}{3}$. D $y = -\frac{3}{4}$.

I FONDAMENTALI Rappresentare la parabola di equazione $y = ax^2$ — 1

► Disegniamo la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{4}$ e determiniamo le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

La parabola ha il vertice nell'origine degli assi e l'asse di simmetria coincidente con l'asse y.

La parabola di equazione $y = ax^2$ si rappresenta solo costruendo una tabella. Se il coefficiente di x^2 è frazionario, conviene scegliere valori di x il cui quadrato sia multiplo del denominatore.

Costruiamo la tabella e disegniamo la parabola per punti.

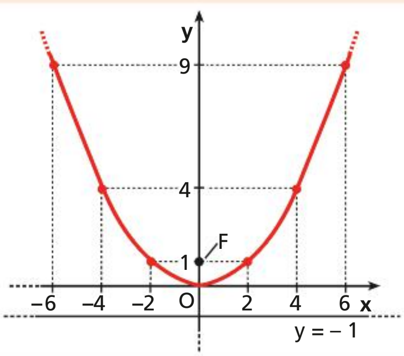
Il fuoco ha ascissa nulla e ordinata

$$y_F = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1 \rightarrow F(0; 1).$$

L'equazione della direttrice è

$$y = -\frac{1}{4a} \rightarrow y = -1.$$

x	y
0	$\frac{0^2}{4} = 0$
±2	$\frac{(\pm 2)^2}{4} = 1$
±4	$\frac{(\pm 4)^2}{4} = 4$
±6	$\frac{(\pm 6)^2}{4} = 9$



PROVA TU. Svolgi un esercizio simile interattivo per vedere se hai capito.

Completa la tabella e disegna la parabola data.

27 ▲△△ $y = 2x^2$

x		±1		
y	8		18	$\frac{1}{2}$

28 ▲△△ $y = -\frac{1}{3}x^2$

x	0	±1	±3	±6
y				

29 ▲△△ $y = \frac{1}{6}x^2$

x	0	±1	±2	±6
y				

30 $y = -\frac{1}{4}x^2$

x		−1		4
y	0		−1	

31 $y = \frac{5}{4}x^2$

x	0	±1	±2	±4
y				

32 $y = -\frac{1}{6}x^2$

x			6	
y	0	$-\frac{2}{3}$		−6

Rappresenta la parabola di equazione assegnata e trova le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

33 $y = \frac{3}{2}x^2$

34 $y = -4x^2$

35 $y = 3x^2$

36 $y = -\frac{1}{8}x^2$

37 $x^2 + 2y = 0$

38 $2x^2 = 7y$

39 Verifica se i punti $A\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$ e $B(-5; 5)$ appartengono alla parabola di equazione $y = \frac{1}{5}x^2$.

40 Trova per quale valore di a la parabola di equazione $y = ax^2$ ha direttrice di equazione $y = -2$ e rappresentala graficamente. Stabilisci se i punti $A(-1; 8)$ e $B\left(2; \frac{1}{2}\right)$ appartengono alla parabola. $\left[\frac{1}{8}\right]$

41 Determina il valore di a affinché la parabola di equazione $y = ax^2$ passi per il punto $P(-2; 8)$ e rappresenta la parabola ottenuta. [2]

CONCAVITÀ E APERTURA DELLA PARABOLA

> Teoria a pagina 246

42 Stabilisci come è rivolta la concavità delle seguenti parabole e disegna il loro grafico:

a. $y = \frac{1}{9}x^2$; **b.** $y = 2x^2$; **c.** $y = -6x^2$; **d.** $y = -\frac{3}{2}x^2$.

43 Determina per quali valori di a la parabola di equazione $y = (2a - 4)x^2$ ha concavità rivolta verso l'alto e disegna la parabola che si ottiene per $a = \frac{7}{2}$. $[a > 2]$

44 Determina per quali valori di a la parabola di equazione $y = (6 - a)x^2$ ha la concavità rivolta verso il basso e disegna la parabola che si ottiene per $a = 8$. $[a > 6]$

45 Nell'equazione $y = ax^2$ determina per quale valore di a si ha una parabola con la concavità rivolta verso il basso e con il fuoco che ha distanza da $O(0; 0)$ uguale a $\frac{2}{3}$. $\left[-\frac{3}{8}\right]$

46 **FAI UN ESEMPIO** Scrivi l'equazione di una parabola con vertice nell'origine e concavità rivolta verso il basso.

Per ogni coppia di parabole assegnata, stabilisci quale delle due parabole ha apertura minore e rappresenta graficamente le due parabole.

47 $y = \frac{3}{4}x^2$; $y = -\frac{4}{3}x^2$.

48 $y = -3x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$.

49 $y = 6x^2$; $y = 5x^2$.

50 **SPIEGA PERCHÉ** Senza fare calcoli, spiega per quale motivo la parabola di equazione $y = -6x^2$ *non* passa per il punto $A(-2; 24)$.

51 **Vero o falso?** La parabola di equazione $y = -7x^2$:

a. passa per l'origine. V F

b. ha il vertice nell'origine. V F

c. ha il fuoco nell'origine. V F

d. rivolge la concavità verso l'alto. V F

Il punto $A(-1; -7)$ appartiene alla parabola? Spiega perché la parabola non può avere punti nel primo e nel secondo quadrante.

52 **Completa.** La parabola di equazione $y = -3x^2$:

a. ha il fuoco di coordinate (____ ; ____);

b. rivolge la concavità verso ____ ;

c. passa per il punto $A\left(-\frac{1}{3}; \text{____}\right)$;

d. ha come direttrice la retta di equazione ____ .

53 **Completa.**

a. La parabola di equazione $y = 5x^2$ passa per il punto $A(-3; \square)$.

b. Il punto $B(-5; -50)$ appartiene alla parabola di equazione $y = \square x^2$.

c. La parabola di equazione $y = (1-2k)x^2$ ha la concavità rivolta verso il basso se $k \square \frac{1}{2}$.

d. La parabola di equazione $y + (k-1)x^2 = 0$ ha la concavità rivolta verso $\square$ se $k < 1$.

PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE y

> Teoria a pagina 247

I FONDAMENTALI **Determinare le caratteristiche della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$** 2

▶ Troviamo vertice, fuoco, asse e direttrice della parabola di equazione $y = x^2 + 6x - 1$.

I coefficienti della parabola sono: $a = 1$; $b = 6$; $c = -1$.
Calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 36 + 4 = 40.$$

Parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$
Vertice: $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
Fuoco: $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$.
Direttrice: $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.

- Vertice V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3; \; y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40}{4 \cdot 1} = -10 \;\rightarrow\; V(-3; -10).$$

- Fuoco F:

$$x_F = x_V = -3; \qquad y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-40}{4 \cdot 1} = -\frac{39}{4} \;\rightarrow\; F\left(-3; -\frac{39}{4}\right).$$

- Asse:
è l'insieme dei punti che hanno la stessa ascissa del vertice, quindi è la retta di equazione $x = -3$.

- Direttrice:

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+40}{4 \cdot 1} = -\frac{41}{4}.$$

PROVA TU. Svolgi un esercizio simile interattivo per vedere se hai capito.

Determina, per le seguenti parabole, vertice, fuoco, direttrice e asse di simmetria.

54 $y = x^2 - 1$

55 $y = -x^2 - 3x$

56 $y = x^2 + 3x + 2$

57 $y = -x^2 - 2x + 3$

58 $y = x^2 - 2x - 8$

59 $y = -4x^2 + 4$

60 $y = -x^2 + 6x$

61 $y = x^2 - 4x + 4$

62 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

63 $3y = x^2 - 4x$

64 $y = (x+3)^2$

65 $y = (x-1)(x+2)$

66 **Associa** ogni parabola al suo vertice:

a. $y = 3x^2 + 6x - 1$ b. $y = 3x^2 - 6x + 7$ c. $y = x^2 + 2x - 1$ d. $y = x^2 - x - \frac{1}{2}$

1. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ 2. $(-1; -4)$ 3. $(1; 4)$ 4. $(-1; -2)$

67 **Test.** Le parabole di equazioni $y = -2x^2 + 6x - 1$ e $y = -x^2 + 3x$ hanno:

A lo stesso fuoco. B lo stesso vertice. C lo stesso asse. D la stessa direttrice.

68 **Test.** Una parabola con asse parallelo all'asse y ha vertice $V(-2; 2)$ e fuoco $F(-2; 1)$. La sua direttrice ha equazione:

A $x = -2$. B $y = 0$. C $y = 3$. D $y = -2$.

ESERCIZI E